

О сходимости дифференциально-разностных схем высшего порядка для телеграфного уравнения*

Л. М. Хьюе, Н. Х. Н. Суан

Экономический университет — Университет Дананга,
Вьетнам, 590000, Дананг, ул. Нгу Хан Сон, 71

Для цитирования: *Хьюе Л. М., Суан Н. Х. Н.* О сходимости дифференциально-разностных схем высшего порядка для телеграфного уравнения // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 4. С. 718–732. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.408>

Целью данной статьи является представление приближенного метода решения начально-краевой задачи Дирихле для телеграфного уравнения. Подход включает в себя идею дискретизации пространственной переменной и использования интегро-интерполяционного метода с конкретными фундаментальными функциями. Исходное уравнение умножается на вспомогательные функции, а затем к пространственной переменной применяются методы интерполяции и интегрирования для создания системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Гибкие применения интерполяции Ньютона — Стирлинга и Эрмита — Биркгофа выполняются для внутренних и близких к границе узлов. Кроме того, граничные условия выполняются автоматически без необходимости отдельной аппроксимации в классических численных методах, таких как метод сеток или метод прямых. В результате предложенные схемы имеют более высокий порядок аппроксимации. Для доказательства сходимости дифференциально-разностных схем высокой степени точности используется логарифмическая норма матрицы.

Ключевые слова: телеграфное уравнение, уравнение в частных производных, численное решение, численный алгоритм, дифференциально-разностная схема, интерполяция Эрмита — Биркгофа, интерполяция Ньютона — Стирлинга, логарифмическая норма, интегрально-интерполяционный метод.

1. Введение. В свете результатов, полученных в области численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), рекомендуется разработать более точные дифференциально-разностные схемы, сводящие исходную задачу к задаче Коши для систем ОДУ, и заняться решением краевых задач в случае уравнений в частных производных (УЧП) [1, 2].

Начально-краевая задача Дирихле (НКЗД) для УЧП может быть решена с использованием таких методов, как метод сеток, методы интегральных соотношений, проекционно-вариационные методы и т. д. Для решения этой задачи [3–8] рассматриваются методы конечных разностей как полезный инструмент. Порядок аппроксимации схем, построенных методом прямых [9] на трехточечном шаблоне, не достигал $O(h^4)$ из-за сложности аппроксимации вблизи границы, и для увеличения порядка аппроксимации необходимо увеличивать число узлов в шаблоне разностной схемы. Целью данного исследования является предложение подхода к простому и эффективному методу аппроксимации высшего порядка.

* Исследование финансируется Фондом развития науки и технологий Университета Дананга в рамках проекта № B2020-DN04-39.

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2024

В статье мы рассматриваем гиперболическое линейное дифференциальное телеграфное уравнение в частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \beta u(x, t) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (1)$$

$$0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T,$$

с начальными условиями

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi_2(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

и граничными условиями Дирихле

$$u(0, t) = \psi_1(t), \quad u(1, t) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

где коэффициенты α , β — известные константы; f , φ_1 , φ_2 , ψ_1 и ψ_2 — известные функции, а функция $u(x, t)$ является неизвестной.

Помимо применения в других областях, это уравнение часто используется при анализе сигналов для описания передачи и распространения электрических сигналов. Модели телеграфного уравнения объединяют диффузию и распространение волн за счет включения члена, который учитывает влияние конечной скорости на стандартное уравнение переноса тепла или массы [10–12].

Численное решение уравнения в частных производных телеграфного типа в последние годы привлекло внимание ряда исследователей. Эти авторы использовали ряд методов, в том числе метод Чебышёва — Тау [10], аппроксимацию радиальными базисными функциями [13], дифференциальный квадратурный метод [14], метод спектральной коллокации Лагерра — Лежандра [15], вариационный итерационный метод Хе [16] и метод дифференциального преобразования [17].

Целью нашего исследования является разработка нового алгоритма численного решения НКЗД для телеграфного уравнения. Кроме того, мы исследуем сходимость этого алгоритма, используя логарифмическую норму матрицы. Этот подход был впервые предложен в [18] для решения приведенного ниже уравнения, которое служит примером уравнений в частных производных параболического типа:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T.$$

Лозинский [19] и Далквист [20] независимо друг от друга развили идею логарифмической нормы матрицы, также известной как логарифмическая производная или логарифмическая константа Липшица для нелинейных операторов, с целью оценки ошибки дискретизации при численном анализе дифференциальных уравнений [21–27]. Поскольку эта «норма» может принимать отрицательные значения, на самом деле она не является нормой в смысле функционального анализа, но учитывает и позволяет оценить меру диссипативности оператора. Диссипативные члены исходной задачи можно использовать для создания отрицательных членов в оценках ошибок, поскольку они обладают несколькими свойствами, подобными свойствам нормы. В частности, эта норма часто дает оценки, которые являются однородными во времени, устраняя один из существенных недостатков неравенства Гронуолла, заключающийся в том, что константы растут экспоненциально с течением времени.

В настоящей работе формируются схемы аппроксимации высшего порядка для задачи (1)–(3), а также решается задача аппроксимации в граничных точках. Исходные задачи для нестационарных телеграфных уравнений сводятся вычислительными алгоритмами к решению задачи Коши для систем ОДУ второго порядка, для которых вычислительные методы были ранее развиты и применены в [1, 2]. В частности, для приграничных узлов универсально используется интерполяция Эрмита — Биркгофа [29], что приводит к автоматическому удовлетворению граничных условий (т. е. не нужно их аппроксимировать, как это делалось ранее). Логарифмическая норма матрицы используется для демонстрации сходимости дифференциально-разностных схем с высоким порядком точности.

2. Дифференциально-разностные схемы. Проведем частичную дискретизацию по переменной x : введем сетку узлов

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = x_0 + ih, \quad i = \overline{0, N}, \quad h = 1/N\},$$

переменную времени t будем считать непрерывной.

В качестве базисных функций введем вспомогательные кусочно-линейные непрерывные функции $E_i^{(3)}(x)$ [30]:

$$E_i^{(3)}(x) = (x - x_{i-1})_+ - 2(x - x_i)_+ + (x - x_{i+1})_+, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad x_i \in \bar{\omega}_h,$$

где

$$(x - x_i)_+^n = \begin{cases} (x - x_i)^n, & x \geq x_i, \\ 0, & x < x_i. \end{cases}$$

Основное свойство функции $E_i^{(3)}(x)$ отражает соотношение

$$\int_0^1 E_i^{(3)}(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx = u(x_{i-1}, t) - 2u(x_i, t) + u(x_{i+1}, t).$$

При построении дифференциально-разностных схем более высокого порядка аппроксимации можно пойти путем увеличения числа узлов в шаблоне разностной схемы. Для создания пятиточечных схем введем вспомогательные непрерывные кусочно-линейные функции:

$$\begin{aligned} E_1^{(5)}(x) &= \alpha_0 E_1^{(3)}(x) + \alpha_1 E_2^{(3)}(x), \\ E_i^{(5)}(x) &= \alpha_1 E_{i-1}^{(3)}(x) + \alpha_0 E_i^{(3)}(x) + \alpha_1 E_{i+1}^{(3)}(x), \quad i = \overline{2, N-2}, \\ E_{N-1}^{(5)}(x) &= \alpha_1 E_{N-2}^{(3)}(x) + \alpha_0 E_{N-1}^{(3)}(x), \end{aligned}$$

где α_0, α_1 — произвольные параметры.

Умножим уравнение (1) на введенные функции и проинтегрируем по x от 0 до 1:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 E_i^{(5)}(x) \left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \beta u(x, t) \right) dx = \\ & = \int_0^1 E_i^{(5)}(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx + \int_0^1 E_i^{(5)}(x) f(x, t) dx, \quad i = \overline{1, N-1}. \end{aligned} \tag{4}$$

Интегралы в правых частях равенств (4) вычисляются точно и представляются через конечные разности второго и четвертого порядков следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_0^1 E_1^{(5)}(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx &= (\alpha_0 + 2\alpha_1) (-2u(x_1, t) + u(x_2, t)) + \\ &+ \alpha_1 (5u(x_1, t) - 4u(x_2, t) + u(x_3, t)) + \alpha_0 u(x_0, t), \\ \int_0^1 E_i^{(5)}(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx &= (\alpha_0 + 2\alpha_1) \Delta^2 u(x_{i-1}, t) + \alpha_1 \Delta^4 u(x_{i-2}, t), \quad i = \overline{2, N-2}, \\ \int_0^1 E_{N-1}^{(5)}(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx &= (\alpha_0 + 2\alpha_1) (u(x_{N-2}, t) - 2u(x_{N-1}, t)) + \\ &+ \alpha_1 (u(x_{N-3}, t) - 4u(x_{N-2}, t) + 5u(x_{N-1}, t)) + \alpha_0 u(x_N, t). \end{aligned} \quad (5)$$

Интегралы $\int_0^1 E_i^{(5)}(x) f(x, t) dx$, $i = \overline{1, N-1}$, могут быть вычислены точно или приближенно с необходимой точностью.

Для вычисления интегралов в левых частях в предположении достаточной гладкости решения воспользуемся интерполяцией функции

$$y(x, t) := \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \beta u(x, t)$$

по переменной x . Получаем пятиточечные схемы различного порядка аппроксимации в зависимости от количества узлов использованной интерполяции. С помощью формулы Ньютона – Стирлинга интерполируем функцию $y(x)$, например по пяти узлам $x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}$, $i = 2, 3, \dots, N-2$:

$$\begin{aligned} y(x, t) = y(x_i + ph, t) &\approx y(x_i, t) + \frac{p}{1!} \frac{\Delta y(x_{i-1}, t) + \Delta y(x_i, t)}{2} + \frac{p^2}{2!} \Delta^2 y(x_{i-1}, t) + \\ + \frac{p(p^2 - 1)}{3!} \frac{\Delta^3 y(x_{i-2}, t) + \Delta^3 y(x_{i-1}, t)}{2} &+ \frac{p^2(p^2 - 1)}{4!} \Delta^4 y(x_{i-2}, t), \quad i = \overline{2, N-2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Далее при $i = \overline{2, N-2}$ с помощью (6) получаем

$$\begin{aligned} \int_0^1 E_i^{(5)}(x) y(x, t) dx &= h^2 \left[(\alpha_0 + 2\alpha_1) y(x_i, t) + \frac{1}{12} (\alpha_0 + 14\alpha_1) \Delta^2 y(x_{i-1}, t) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{240} (18\alpha_1 - \alpha_0) \Delta^4 y(x_{i-2}, t) \right] + \frac{1}{60480} (31\alpha_0 - 190\alpha_1) h^8 y^{(6)}(x_i, t) + O(h^{10}). \end{aligned} \quad (7)$$

Чтобы замкнуть систему ОДУ (5), (7), необходимо добавить два уравнения в приграничных узлах x_i , $i = 1, N-1$ так, чтобы их порядок аппроксимации не был бы ниже порядка аппроксимации во внутренних узлах. В этом случае мы используем интерполяцию Эрмита – Биркгофа [29] для функции $y(x, t)$ при вычислении левой части равенств (4). Интерполяционный полином $P(x, t)$ для функции $y(x, t)$ в приграничном узле x_1 должен удовлетворять условиям $P(x_i, t) = y(x_i, t)$, $i = \overline{0, 3}$,

$P^{(k)}(x_0, t) = y^{(k)}(x_0, t)$, $k = 2, 4, 6$, $P^{(6)}(x_1, t) = y^{(6)}(x_1, t)$. Производные $y^{(k)}(x_0, t)$ получены с использованием граничных условий и дифференциального уравнения. Тогда левая часть равенства (4) примет вид

$$\begin{aligned} \int_0^1 E_1^{(5)}(x)y(x, t)dx &= h^2 \left[(\alpha_0 + 2\alpha_1)y(x_1, t) + \frac{1}{12}(\alpha_0 + 14\alpha_1)(-2y(x_1, t) + y(x_2, t)) + \right. \\ &+ \frac{1}{240}(18\alpha_1 - \alpha_0)(5y(x_1, t) - 4y(x_2, t) + y(x_3, t)) \left. \right] + \frac{h^2}{120}(11\alpha_0 + 2\alpha_1)y(x_0, t) - \\ &- \frac{h^4}{240}(\alpha_0 + 2\alpha_1)y''(x_0, t) + h^6 \left(\frac{1}{2880}\alpha_0 - \frac{1}{288}\alpha_1 \right) y^{(4)}(x_0, t) + \\ &+ h^8 \left(-\frac{1}{86400}\alpha_0 + \frac{1}{6300}\alpha_1 \right) y^{(6)}(x_0, t) + \frac{h^8}{60480}(31\alpha_0 - 190\alpha_1)y^{(6)}(x_1, t) + O(h^{10}). \end{aligned}$$

Для приграничного узла x_{N-1} интерполяционный полином строится аналогично: $P(x_i, t) = y(x_i, t)$, $i = \overline{N-3, N}$, $P^{(k)}(x_N, t) = y^{(k)}(x_N, t)$, $k = 2, 4, 6$, $P^{(6)}(x_{N-1}, t) = y^{(6)}(x_{N-1}, t)$. Производные $y^{(k)}(x_N, t)$ получены с использованием граничных условий и дифференциального уравнения. В результате мы получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned} \int_0^1 E_{N-1}^{(5)}(x)y(x, t)dx &= \\ &= h^2 \left[(\alpha_0 + 2\alpha_1)y(x_{N-1}, t) + \frac{1}{12}(\alpha_0 + 14\alpha_1)(y(x_{N-2}, t) - 2y(x_{N-1}, t)) + \right. \\ &+ \frac{18\alpha_1 - \alpha_0}{240}(y(x_{N-3}, t) - 4y(x_{N-2}, t) + 5y(x_{N-1}, t)) \left. \right] + \frac{h^2}{120}(11\alpha_0 + 2\alpha_1)y(x_N, t) - \\ &- \frac{h^4}{240}(\alpha_0 + 2\alpha_1)y''(x_N, t) + \frac{h^6}{2880}(-\alpha_0 + 10\alpha_1)y^{(4)}(x_N, t) + \\ &+ h^8 \left(-\frac{\alpha_0}{86400} + \frac{\alpha_1}{6300} \right) y^{(6)}(x_N, t) + \frac{h^8}{60480}(31\alpha_0 - 190\alpha_1)y^{(6)}(x_{N-1}, t) + O(h^{10}). \end{aligned}$$

Основные части остаточных членов для приграничных узлов и внутренних узлов совпадают и равны $\frac{h^8}{60480}(31\alpha_0 - 190\alpha_1)y^{(6)}(x_i, t)$, $i = \overline{1, N-1}$.

Объединяя полученные результаты, приходим к задаче Коши, аппроксимирующей с порядком $O(h^6)$ исходную краевую задачу (1)–(3) для телеграфного уравнения:

$$\begin{aligned} h^2 \left[\sum_{m=0}^2 A^m Q^m \right] (U'' + \alpha U' + \beta U) &= \left[\sum_{m=1}^2 H^m Q^m \right] U + F, \\ U(0) &= \Phi_1, \quad U'(0) = \Phi_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $U = (u_1, u_2, \dots, u_{N-1})^T$, i – вектор-столбец приближенного решения, $u_n = u_n(t) \approx u(x_n, t)$, $0 \leq t \leq T$, $n = \overline{1, N-1}$; матрица $Q = \{q_{ij}\}_{i,j=1}^{N-1}$, $q_{ii} = -2$, $q_{ij} = 1$ при $|i - j| = 1$, $q_{ij} = 0$ при $|i - j| > 1$; вектор $F = (f_1, f_2, \dots, f_{N-1})^T$ зависит от $f(x, t)$, параметры α_0, α_1 и граничные условия ψ_1, ψ_2 ; $\Phi_1 = (\varphi_1(x_1), \varphi_1(x_2), \dots, \varphi_1(x_{N-1}))^T$; $\Phi_2 = (\varphi_2(x_1), \varphi_2(x_2), \dots, \varphi_2(x_{N-1}))^T$; $A^0 = \alpha_0 + 2\alpha_1$, $A^1 = (\alpha_0 + 14\alpha_1)/12$, $A^2 = (18\alpha_1 - \alpha_0)/240$, $H^1 = \alpha_0 + 2\alpha_1$, $H^2 = \alpha_1$.

Замечание 1. Выбрав параметры α_0, α_1 так, что $31\alpha_0 - 190\alpha_1 = 0$, мы находим, что главный член остатка равен нулю для всех уравнений системы, и получаем порядок остаточного члена $O(h^8)$.

Замечание 2. Семиточечные схемы допускают дальнейшее увеличение порядка аппроксимации. Для создания этих схем используются следующие базисные функции:

$$\begin{aligned} E_1^{(7)}(x) &= (\alpha_0 - \alpha_2) E_1^{(3)}(x) + \alpha_1 E_2^{(3)}(x) + \alpha_2 E_3^{(3)}(x), \\ E_2^{(7)}(x) &= \alpha_1 E_1^{(3)}(x) + \alpha_0 E_2^{(3)}(x) + \alpha_1 E_3^{(3)}(x) + \alpha_2 E_4^{(3)}(x), \\ E_i^{(7)}(x) &= \alpha_2 E_{i-2}^{(3)}(x) + \alpha_1 E_{i-1}^{(3)}(x) + \alpha_0 E_i^{(3)}(x) + \alpha_1 E_{i+1}^{(3)}(x) + \alpha_2 E_{i+2}^{(3)}(x), \quad i = \overline{3, N-3}, \\ E_{N-2}^{(7)}(x) &= \alpha_1 E_{N-1}^{(3)}(x) + \alpha_0 E_{N-2}^{(3)}(x) + \alpha_1 E_{N-3}^{(3)}(x) + \alpha_2 E_{N-4}^{(3)}(x), \\ E_{N-1}^{(7)}(x) &= (\alpha_0 - \alpha_2) E_{N-1}^{(3)}(x) + \alpha_1 E_{N-2}^{(3)}(x) + \alpha_2 E_{N-3}^{(3)}(x), \end{aligned}$$

где α_0, α_1 и α_2 — произвольные параметры.

3. Сходимость дифференциально-разностных схем. В этом разделе логарифмическая норма матрицы используется для доказательства сходимости дифференциально-разностных схем высокой точности. В теории ОДУ, где они дают оценки роста ошибок, широкое признание получили логарифмические матричные нормы.

Для доказательства сходимости схемы будут полезны следующие результаты.

Пусть A — матрица $n \times n$. Тогда 1, 2 и 3-я нормы матрицы A равны соответственно

$$\|A\|_I = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad \|A\|_{II} = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad \|A\|_{III} = \sqrt{v},$$

где v — наибольшее собственное значение матрицы A^*A , A^* — сопряженная транспонированная матрица для A .

Лемма 1. (см. [19]) Для любой нормы матрицы существует конечный предел

$$\mu(A) = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{\|E + \tau A\| - 1}{\tau},$$

который называется логарифмической нормой A .

Лемма 2. (см. [19]) Пусть $\mu_{III}(A)$ — логарифмическая норма матрицы A , соответствующая 3-й матричной норме. Тогда $\mu_{III}(A) = v_0$, где v_0 — наибольшее собственное значение матрицы $(A + A^*)/2$.

Для определения ошибки метода $\gamma_n = \gamma_n(t) = u(x_n, t) - u_n(t)$, $n = \overline{1, N-1}$, $0 \leq t \leq T$, в силу линейности нашей задачи получаем следующую задачу Коши:

$$h^2 \left[\sum_{m=0}^2 A^m Q^m \right] (\Gamma'' + \alpha \Gamma' + \beta \Gamma) = \left[\sum_{m=1}^2 H^m Q^m \right] \Gamma + R, \quad (9)$$

$$\Gamma(0) = 0, \quad \Gamma'(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где

$$\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{N-1})^T, \quad R = (r_1, r_2, \dots, r_{N-1})^T,$$

$$r_i = \frac{-h^8}{60480} (31\alpha_0 - 190\alpha_1) L(x_i, t) + O(h^{10}), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (10)$$

$$L = \frac{\partial^8 u}{\partial x^6 \partial t^2} + \alpha \frac{\partial^7 u}{\partial x^6 \partial t} + \beta \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}.$$

Используя матрицу преобразования [3],

$$B = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^{N-1} = \left\{ \sqrt{\frac{2}{N}} \sin \frac{\pi ij}{N} \right\}_{i,j=1}^{N-1}, \quad B = B^{-1} = B^*,$$

составленную из собственных векторов матрицы Q , получаем следующее соотношение:

$$\left[\sum_{m=0}^2 A^m Q^m \right]^{-1} = B \left[\frac{\delta_{ij}}{\sum_{m=0}^2 A^m \mu_i^m} \right] B^{-1},$$

$$\left[\sum_{m=1}^2 H^m Q^m \right] = B \left[\delta_{ij} \sum_{m=1}^2 H^m \mu_i^m \right] B^{-1},$$

где $\left[\delta_{ij} / \sum_{m=0}^2 A^m \mu_i^m \right]$ — диагональная матрица, $\mu_i = -2 + 2 \cos(\pi i/N)$ — собственные значения матрицы Q , а δ_{ij} — дельта-символ Кронекера.

Умножив матричное уравнение (9) на матрицу

$$\frac{1}{h^2} \left[\sum_{m=0}^2 A^m Q^m \right]^{-1}$$

слева, переходим к эквивалентной задаче

$$\Gamma'' + \alpha \Gamma' = B \left[\left(\frac{\sum_{m=1}^2 H^m \mu_i^m}{h^2 \sum_{m=0}^2 A^m \mu_i^m} - \beta \right) \delta_{ij} \right] B^{-1} \Gamma +$$

$$+ \frac{1}{h^2} B \left[\frac{\delta_{ij}}{\sum_{m=0}^2 A^m \mu_i^m} \right] B^{-1} R, \quad \Gamma(0) = 0, \quad \Gamma'(0) = 0.$$

Вводя новые обозначения, имеем

$$\Gamma'' = -B \Lambda B^{-1} \Gamma - \alpha \Gamma' + \bar{R}, \quad (11)$$

$$\Gamma(0) = 0, \quad \Gamma'(0) = 0, \quad (12)$$

где

$$\Lambda = \left[\left(\frac{\sum_{m=1}^2 H^m \mu_i^m}{h^2 \sum_{m=0}^2 A^m \mu_i^m} - \beta \right) \delta_{ij} \right], \quad \bar{R} = \frac{1}{h^2} B \left[\frac{\delta_{ij}}{\sum_{m=0}^2 A^m \mu_i^m} \right] B^{-1} R.$$

Полагая $\Gamma' = W$, переписываем уравнение (11) в виде

$$W' = -B\Lambda^{\frac{1}{2}}\Lambda^{\frac{1}{2}}B^{-1}\Gamma - \alpha W + \bar{R}. \quad (13)$$

Обозначив $Z = \Lambda^{\frac{1}{2}}B^{-1}\Gamma = (z_1, z_2, \dots, z_{N-1})^T$, получаем из уравнения (13)

$$W' = -\alpha W - B\Lambda^{\frac{1}{2}}Z + \bar{R}. \quad (14)$$

С другой стороны,

$$Z' = \Lambda^{\frac{1}{2}}BW. \quad (15)$$

В силу равенств (14)–(15) задача (11)–(12) записывается в виде

$$M' = AM + R^*, \quad M(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (16)$$

где

$$M = \begin{pmatrix} W \\ Z \end{pmatrix}, \quad R^* = \begin{pmatrix} \bar{R} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -\alpha E & -B\Lambda^{\frac{1}{2}} \\ \Lambda^{\frac{1}{2}}B & 0 \end{pmatrix}.$$

Изучим сходимость задачи (8), используя логарифмическую норму матрицы [19, 20]. Понятие логарифмической нормы матрицы широко используется в теории ОДУ для оценки решений систем ОДУ первого порядка.

С помощью леммы Лозинского [19] оценим по норме решение задачи (16) (будет рассматриваться 3-я норма):

$$\|M\| \leq \int_0^t \|R^*\| \exp \left(\int_{\tau}^t \mu_{III}(A) d\xi \right) d\tau, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (17)$$

где

$$\|M\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{N-1} \gamma_n^2 + \sum_{n=1}^{N-1} z_n^2},$$

$$\|R^*\| = \frac{1}{h^2} \left\| B \left[\frac{\delta_{ij}}{\sum_{m=0}^2 A^m \mu_i^m} \right] B^{-1} R \right\| \leq \frac{1}{h^2} d(\alpha_0, \alpha_1) \sqrt{\sum_{n=1}^{N-1} r_n^2}, \quad (18)$$

$$d(\alpha_0, \alpha_1) = \max_{1 \leq i \leq N-1} \left| \frac{1}{\sum_{m=0}^2 A^m \mu_i^m} \right| = \max_{1 \leq i \leq N-1} \left| \frac{120}{s(\alpha_0, \alpha_1)} \right|,$$

$$s(\alpha_0, \alpha_1) = (18\alpha_1 - \alpha_0) \cos^2 \frac{\pi i}{N} + (122\alpha_0 - 1644\alpha_1) \cos \frac{\pi i}{N} - \alpha_0 - 1422\alpha_1.$$

Согласно лемме 2, логарифмическая норма A равна наибольшему собственному значению матрицы

$$(A^* + A)/2 = \begin{bmatrix} -\alpha E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, $\mu_{III}(A) = \max\{-\alpha, 0\}$. Используя неравенство (17) для функций $\gamma'_n(t)$ из задачи (16), получаем следующую оценку:

$$|\gamma'_n(t)| \leq \|M\| \leq \int_0^t \|R^*\| \exp\left(\int_\tau^t \max\{0, -\alpha\} d\xi\right) d\tau \leq (\exp \bar{\xi}) \int_0^t \|R^*\| d\tau, \quad (19)$$

$$\bar{\xi} = \max\left\{0, \max_{0 \leq t \leq T} \{-\alpha t\}\right\}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad n = \overline{1, N-1}.$$

С другой стороны, полагая

$$v = \max_{1 \leq i \leq N-1} \left(\max_{0 \leq t \leq T} |v_i(t)| \right), \quad v_i(t) = \frac{190\alpha_1 - 31\alpha_0}{60480} L(x_i, t),$$

получим из (10), (18) следующую последовательность соотношений:

$$\begin{aligned} \|R^*\| &\leq \frac{1}{h^2} d(\alpha_0, \alpha_1) v \sqrt{\sum_{n=1}^{N-1} h^{16}} = \frac{1}{h^2} d(\alpha_0, \alpha_1) v \sqrt{(N-1)h^{16}} \leq \\ &\leq \frac{1}{h^2} d(\alpha_0, \alpha_1) v \sqrt{Nh^{16}} = \frac{1}{h^2} d(\alpha_0, \alpha_1) v \sqrt{h^{15}} = h^{5.5} d(\alpha_0, \alpha_1) v. \end{aligned}$$

Подставив последнее неравенство в (19), получим оценку

$$|\gamma'_n(t)| \leq \|M\| \leq h^{5.5} d(\alpha_0, \alpha_1) vt \exp \bar{\xi}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad n = \overline{1, N-1}. \quad (20)$$

С помощью неравенства

$$\left| \int_0^t \gamma'_n(t) dt \right| \leq \int_0^t |\gamma'_n(t)| dt,$$

используя (20), окончательно получаем оценку погрешности метода

$$|\gamma_n(t)| \leq h^{5.5} \frac{d(\alpha_0, \alpha_1)}{2} vt^2 \exp \bar{\xi}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad n = \overline{1, N-1}.$$

□

Теорема 1. *Предположим, что функция*

$$L = \frac{\partial^8 u}{\partial x^6 \partial t^2} + \alpha \frac{\partial^7 u}{\partial x^6 \partial t} + \beta \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}$$

непрерывна в области $0 \leq t \leq T$, $0 \leq x \leq 1$. Тогда решение задачи (8) равномерно сходится к решению задачи (1)–(3) со скоростью порядка $h^{5.5}$.

Замечание 3. Выбрав параметры α_0, α_1 так, что $31\alpha_0 - 190\alpha_1 = 0$, мы увеличим скорость сходимости задачи (8) до порядка $h^{7.5}$.

Замечание 4. Метод решения дифференциально-разностных схем (8). Введем функции $\Theta = BU = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{N-1})^T$ и умножим оба векторных уравнения задачи (8) на матрицу B слева. Мы получаем $(N-1)$ независимые задачи Коши для $\varepsilon_n, n = 1, 2, \dots, N-1$:

$$h^2 \left[\sum_{m=0}^2 A^m \mu_n^m \right] (\varepsilon_n'' + \alpha \varepsilon_n' + \beta \varepsilon_n) = \left[\sum_{m=1}^2 H^m \mu_n^m \right] \varepsilon_n + \sum_{m=1}^{N-1} b_{nm} f_m, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$\varepsilon_n(0) = \sum_{m=1}^{N-1} b_{nm} \varphi_1(x_m), \quad \varepsilon_n'(0) = \sum_{m=1}^{N-1} b_{nm} \varphi_2(x_m).$$

Эти задачи могут быть решены аналитическими методами. Обратным преобразованием $U = B\Theta$ находим решение исходной задачи (8).

4. Численные эксперименты. Сравним 5-точечную схему с пятью узлами интерполяции (8) с известной дифференциально-разностной схемой (21) аппроксимации второго порядка (метод 3-точечной сетки) на примере тестовой задачи (1)–(3) с точным решением $u(x, t) = e^t \sin(-2x) \cos(\pi x/2)$, $\alpha = \beta = 1$, следующим образом:

$$\begin{cases} U''(t) + \alpha U'(t) + \beta U(t) = h^{-2}QU(t) + \bar{F}(t), \\ U(0) = \Phi_1, \quad U'(0) = \Phi_2, \end{cases} \quad (21)$$

где

$$\bar{F}(t) = \begin{pmatrix} f(x_1, t) + h^{-2}\psi_1(t) \\ f(x_2, t) \\ \vdots \\ f(x_{N-2}, t) \\ f(x_{N-1}, t) + h^{-2}\psi_2(t) \end{pmatrix}.$$

Функции $f(x, t), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \psi_1(t), \psi_2(t)$ получаются подстановкой точного решения в исходную задачу (1)–(3).

Базисные функции $E_4^{(3)}(x), E_1^{(5)}(x), E_9^{(5)}(x)$ и $E_5^{(5)}(x)$ на $[0, 1]$ с $\alpha_0 = -1/31, \alpha_1 = 1/190$ и пространственным шагом $h = 0.1$ показаны соответственно на рис. 1–4. Базисные функции $E_5^{(5)}(x), E_1^{(5)}(x), E_9^{(5)}(x)$ на $[0, 1]$ с оптимальными параметрами $\alpha_0 = 1/31, \alpha_1 = 1/190$ и пространственным шагом $h = 0.1$ показаны соответственно на рис. 6–8.

Табл. 1 содержит аппроксимации

$$\|\gamma(t)\|_C = \max_{1 \leq n \leq N-1} |u(x_n, t) - u_n(t)| \quad (22)$$

для методов (8), (21), упомянутых выше. Численные результаты показаны на рис. 5. Результаты для ошибки аппроксимации (22), полученные дифференциально-разностным методом (8) с оптимальными параметрами $\alpha_0 = 1/31, \alpha_1 = 1/190$ в моменты времени $t = 0, 25, t = 0, 5, t = 0, 75$, приведены в табл. 2.

Чтобы проверить, сходится ли на практике разностная схема (8) со скоростью $O(h^{5.5})$ в случае $\alpha_0 = -1/31, \alpha_1 = 1/190$ и со скоростью $O(h^{7.5})$ в случае $\alpha_0 = 1/31,$

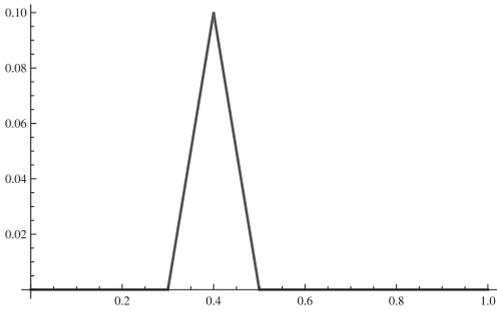


Рис. 1. График базисной функции $E_4^{(3)}(x)$ на $[0, 1]$ при $h = 0.1$.

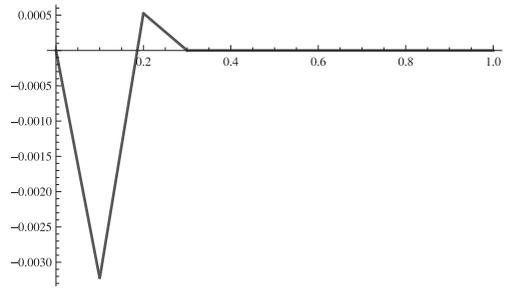


Рис. 2. График базисной функции $E_1^{(5)}(x)$ на $[0, 1]$ с $\alpha_0 = -1/31$, $\alpha_1 = 1/190$, $h = 0.1$.

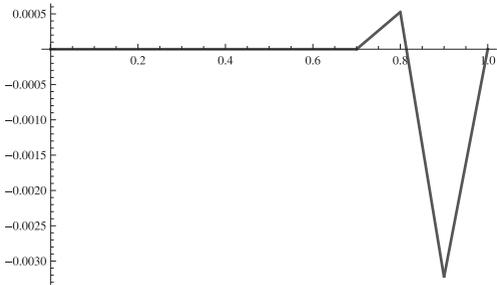


Рис. 3. График базисной функции $E_9^{(5)}(x)$ на $[0, 1]$ с $\alpha_0 = -1/31$, $\alpha_1 = 1/190$, $h = 0.1$.

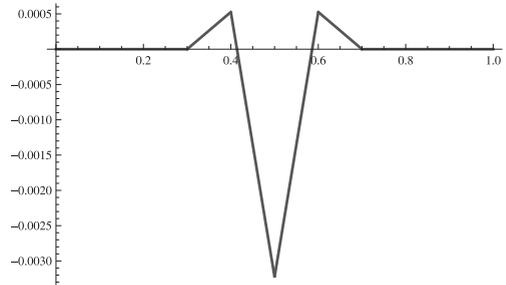


Рис. 4. График базисной функции $E_5^{(5)}(x)$ на $[0, 1]$ с $\alpha_0 = -1/31$, $\alpha_1 = 1/190$, $h = 0.1$.

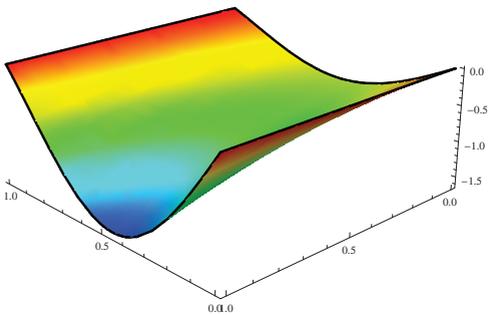


Рис. 5. Численное решение $u(x, t)$ на $[0, 1] \times [0, 1]$ с $\alpha_0 = -1/31$, $\alpha_1 = 1/190$, $h = 0, 1$.

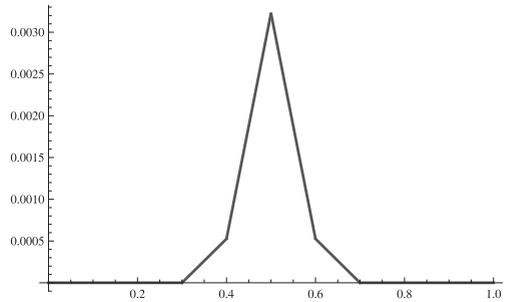


Рис. 6. График базисной функции $E_5^{(5)}(x)$ на $[0, 1]$ с оптимальными параметрами $\alpha_0 = 1/31$, $\alpha_1 = 1/190$, $h = 0.1$.

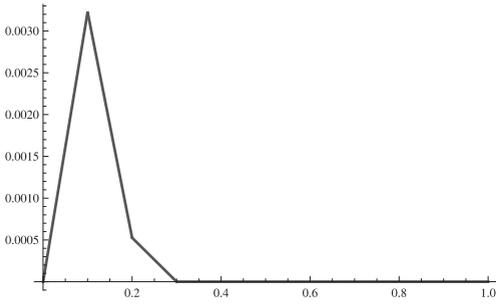


Рис. 7. График базисной функции $E_1^{(5)}(x)$ на $[0, 1]$ с оптимальными параметрами $\alpha_0 = 1/31$, $\alpha_1 = 1/190$, $h = 0.1$.

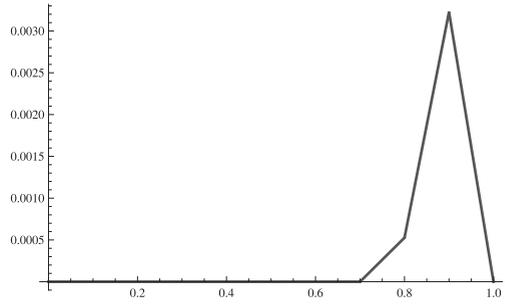


Рис. 8. График базисной функции $E_9^{(5)}(x)$ на $[0, 1]$ с оптимальными параметрами $\alpha_0 = 1/31$, $\alpha_1 = 1/190$, $h = 0.1$.

Таблица 1. Сравнение ошибки аппроксимации методов при $t = 1$

Узлы $t = 1$	Метод сеток (21)	Дифференциально-разностный метод (8)	
		$\alpha_0 = -1/31, \alpha_1 = 1/190$	$\alpha_0 = 1/31, \alpha_1 = 1/190$
0.1	5.2×10^{-3}	2.97×10^{-7}	4.33×10^{-10}
0.2	9.8×10^{-3}	5.61×10^{-7}	8.16×10^{-10}
0.3	1.4×10^{-2}	7.61×10^{-7}	1.11×10^{-9}
0.4	1.6×10^{-2}	8.71×10^{-7}	1.27×10^{-9}
0.5	1.6×10^{-2}	8.93×10^{-7}	1.29×10^{-9}
0.6	1.5×10^{-2}	8.18×10^{-7}	1.18×10^{-9}
0.7	1.2×10^{-2}	6.63×10^{-7}	9.54×10^{-10}
0.8	8.6×10^{-3}	4.55×10^{-7}	6.47×10^{-10}
0.9	4.2×10^{-3}	2.24×10^{-7}	3.07×10^{-10}

Таблица 2. Ошибка аппроксимации $t = 0, 25, t = 0, 5, t = 0, 75$ при оптимальных параметрах $\alpha_0 = 1/31, \alpha_1 = 1/190$

Узлы	$t = 0.25$	$t = 0.5$	$t = 0.75$
0.1	2.04×10^{-10}	2.63×10^{-10}	3.37×10^{-10}
0.2	3.85×10^{-10}	4.95×10^{-10}	6.35×10^{-10}
0.3	5.22×10^{-10}	6.71×10^{-10}	8.61×10^{-10}
0.4	5.99×10^{-10}	7.71×10^{-10}	9.88×10^{-10}
0.5	6.11×10^{-10}	7.85×10^{-10}	1.01×10^{-9}
0.6	5.58×10^{-10}	7.17×10^{-10}	9.21×10^{-10}
0.7	4.51×10^{-10}	5.79×10^{-10}	7.43×10^{-10}
0.8	3.06×10^{-10}	3.92×10^{-10}	5.04×10^{-10}
0.9	1.45×10^{-10}	1.86×10^{-10}	2.39×10^{-10}

Таблица 3. Фактическая скорость сходимости ошибки аппроксимации метода (8) с нормальными параметрами $\alpha_0 = -1/31, \alpha_1 = 1/190$ при $t = 1$

N	h	$\ \gamma(t)\ _C$	R^N
10	1/10	8.92804×10^{-7}	—
20	1/20	1.43110×10^{-8}	5.96
40	1/40	2.76872×10^{-10}	5.69
80	1/80	3.97904×10^{-12}	6.12

Таблица 4. Фактическая скорость сходимости ошибки аппроксимации метода (8) с оптимальными параметрами $\alpha_0 = 1/31, \alpha_1 = 1/190$ при $t = 1$

N	h	$\ \gamma(t)\ _C$	R^N
10	1/10	1.29449×10^{-9}	—
20	1/20	5.01332×10^{-12}	8.01
40	1/40	4.18192×10^{-14}	6.91
80	1/80	2.21021×10^{-16}	7.56

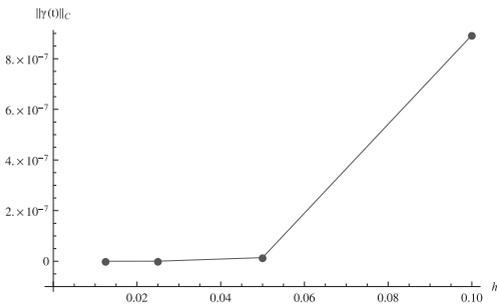


Рис. 9. График сходимости с нормальными параметрами $\alpha_0 = -1/31$, $\alpha_1 = 1/190$ при $t = 1$.

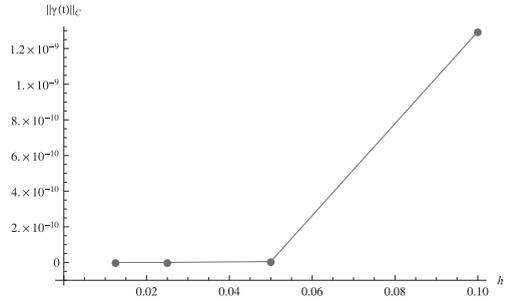


Рис. 10. График сходимости с оптимальными параметрами $\alpha_0 = 1/31$, $\alpha_1 = 1/190$ при $t = 1$.

$\alpha_1 = 1/190$, уменьшаем каждый интервал в 2 раза по пространственной переменной. Вначале получаем $D_N = \|\gamma(t)\|_C$ в случае N узлов. Затем уменьшаем каждый шаг пространственной сетки в два раза и получаем $D_{2N} = \|\gamma(t)\|_C$. Фактическая скорость сходимости ошибки аппроксимации, определяемая формулой

$$R^N = \log_2 \frac{D_N}{D_{2N}},$$

приведена в табл. 3 и 4. Графики сходимости в различных случаях параметров α_0 , α_1 показаны на рис. 9 и 10 соответственно. Как можно видеть, предложенный алгоритм показал превосходные результаты с точки зрения точности.

5. Выводы. В результате проведенных исследований с использованием интегрально-интерполяционного метода со специализированными фундаментальными функциями была разработана 5-точечная дифференциально-разностная схема шестого порядка для телеграфного уравнения. Для построения схем использовались специальные интерполяции во внутренних и приграничных узлах (интерполяции Эрмита — Биркгофа и Ньютона — Стирлинга). Граничные условия удовлетворялись автоматически без необходимости отдельных аппроксимаций, как это делается в классических численных методах. Для демонстрации сходимости дифференциально-разностных схем высокого порядка точности была применена логарифмическая норма матрицы. Подбором оптимальных параметров можно увеличить скорость сходимости до порядка $h^{7.5}$ дифференциально-разностной задачи. Приведены вычислительные эксперименты, подтверждающие теоретические выводы. По результатам эксперимента видно, что порядок аппроксимации приближенного решения повышается за счет использования схем с большим количеством точек и оптимальным выбором параметров.

Литература/References

1. Bobkov V.V. Spectrally Consistent Approximations to the Matrix Exponent and Their Applications to Boundary Layer Problem. *Computational Methods in Applied Mathematics* **2** (4), 354–377 (2002).
2. Hairer E., Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential — Algebraic Problems*. Berlin; Heidelberg, Springer-Verlag (1996).

3. Samarskii A. *The theory of difference schemes*. New York, Marcel Dekker (2001).
4. Matus P. P., Hieu L. M., Vulkov L. G. Analysis of second order difference schemes on non-uniform grids for quasilinear parabolic equations. *J. Comput. Appl. Math.* **310**, 186–199 (2017).
5. Matus P. P., Hieu L. M., Pylak D. Monotone Finite-Difference Schemes of Second-Order Accuracy for Quasilinear Parabolic Equations with Mixed Derivatives. *Differential Equations* **55** (3), 424–436 (2019).
6. Hieu L. M., Hanh T. T. H., Thanh D. N. H. Monotone Finite-Difference Schemes with Second Order Approximation Based on Regularization Approach for the Dirichlet Boundary Problem of the Gamma Equation. *IEEE Access* **8**, 45119–45132 (2020).
7. Hieu L. M., Hanh T. T. H., Thanh D. N. H. A Finite-Difference Scheme for Initial Boundary Value Problem of the Gamma Equation in the Pricing of Financial Derivatives. *Journal of Mathematics and Computer Science* **20** (4), 283–291 (2020).
8. Hieu L. M., Thanh D. N. H., Tu T. T. Second Order Monotone Finite-Difference Schemes on Non-Uniform Grids for Multi-Dimensional Convection-Diffusion Problem with a Boundary Condition of the Third Kind. *Lobachevskii Journal of Mathematics* **42** (7), 1661–1674 (2021).
9. Liskovets O. A. The method of lines. *Differential Equations* **1** (12), 1662–1678 (1965). (In Russian)
10. Dehghan M., Shokri A. A numerical method for solving the hyperbolic telegraph equation. *Numer. Methods Part. Differ. Equ.* **24**, 1080–1093 (2008).
11. El-Azab M. S., El-Gamel M. A numerical algorithm for the solution of telegraph equations. *Appl. Math. Comput.* **109**, 757–764 (2007).
12. Georges R., Pearce J. A. *Foundations and Industrial Applications of Microwave and Radio Frequency Fields Physical and Chemical Processes*. Wiley, Chichester, UK (1995).
13. Saadatmandi A., Dehghan M. Numerical solution of hyperbolic telegraph equation using the Chebyshev tau method. *Numer. Methods Part. Differ. Equ.* **26**, 239–252 (2010).
14. Jiwari R., Pandit S., Mittal R. C. A differential quadrature algorithm to solve the two dimensional linear hyperbolic telegraph equation with Dirichlet and Neumann boundary conditions. *Appl. Math. Comput.* **218**, 7279–7294 (2012).
15. Tatari M., Haghghi M. A generalized Laguerre—Legendre spectral collocation method for solving initial-boundary value problems. *Appl. Math. Model.* **38**, 1351–1364 (2014).
16. Dehghan M., Yousefi S. A., Lotfi A. The use of He’s variational iteration method for solving the telegraph and fractional telegraph equations. *Int. J. Numer. Methods Biomed. Eng.* **27**, 219–231 (2011).
17. Srivastava V. K., Mukesh K. A., Chaurasia R. K. Reduced differential transform method to solve two and three dimensional second order hyperbolic telegraphic equations. *Journal of King Saud University — Engineering Sciences* **29** (2), 166–171 (2017).
18. Samusenko A. V., Oguzko S. V. Five-layer schemes for parabolic equations. *Vestnik BSU. Series 1. Physics. Mathematics. Informatics* **2**, 65–69 (2006). (In Russian)
19. Lozinskii S. M. Error estimate for numerical integration of ordinary differential equations. *I. Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.* **5**, 52–90 (1958). (In Russian)
20. Dahlquist G. Stability and error bounds in the numerical integration of ordinary differential equations. *Trans. Royal Inst. Tech., Stockholm, Sweden* **130** (1959).
21. Martin Jr., Robert H. Logarithmic norms and projections applied to linear differential systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **45** (2), 432–454 (1974).
22. Ladde G. S. Logarithmic norm and stability of linear systems with random parameters. *International Journal of Systems Science* **8** (9), 1057–1066 (1977).
23. Winkler R. *On logarithmic norms for differential algebraic equations*. Berlin, Humboldt Universiti zu Berlin, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fak. II, Institute Mathematik (2005).
24. Verwer J. G., Sanz-Serna J. M. *Convergence of method of lines approximations to partial differential equations*. Amsterdam, CWI. Department of Numerical Mathematics (1984).
25. Grigoryan G. A. On the stability of systems of two first-order linear ordinary differential equations. *Differential Equations* **51**, 283–292 (2015).
26. Shampine L. F. ODE solvers and the method of lines. *Numerical Methods for Partial Differential Equations* **10** (6), 739–755 (1994).
27. Hairer E., Bader G., Lubich C. On the stability of semi-implicit methods for ordinary differential equations. *BIT Numerical Mathematics* **22** (2), 211–232 (1982).
28. Banasiak J. Logarithmic norms and regular perturbations of differential equations. *Annales Universitatis Mariae Curie-Sklodowska, Sectio A — Mathematica* **73** (2), 5–19 (2020).

29. Mysovskikh I.P. *Lectures on methods of computation: A textbook for universities*. St. Petersburg, St. Petersburg University Press (1998). (In Russian)

30. Marchuk G.I. *Methods of computational mathematics*. Moscow, Nauka Publ. (1989). (In Russian)

Статья поступила в редакцию 20 ноября 2023 г.;
доработана 27 декабря 2023 г.;
рекомендована к печати 23 мая 2024 г.

Контактная информация:

Хью Ле Минь — PhD; <https://orcid.org/0000-0001-5252-199X>, hieulm@due.edu.vn
Хуан Нгуен Хуу Нгуен — канд. экон. наук; <https://orcid.org/0000-0002-2562-9759>,
xuannhn@due.edu.vn

On convergence of higher order differential-difference schemes for telegraph equation*

L. M. Hieu, N. H. N. Xuan

University of Economics — The University of Danang,
71, ul. Ngu Hanh Son, Da Nang, 590000, Vietnam

For citation: Hieu L. M., Xuan N.H. N. On convergence of higher order differential-difference schemes for telegraph equation. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 4, pp. 718–732.

<https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.408> (In Russian)

The purpose of this article is to introduce an approximation method for solving the Dirichlet initial boundary value problem for the telegraph equation. The approach involves the idea of discretizing a spatial variable and utilizing the integral-interpolation method with specific fundamental functions. The original equation is multiplied by auxiliary functions, and subsequently interpolation and integration methods are applying on the spatial variable to generate system of ordinary differential equations. Flexible applications of the Newton — Stirling and Hermite — Birkhoff interpolations are made to internal and close-to-boundary nodes. Additionally, the boundary conditions are automatically satisfied without the need for a separate approximation as in classical numerical methods like the grid method or the method of lines. As a result, the suggested schemes have a higher level of approximation. To prove the convergence of differential-difference schemes of high degree of accuracy, the logarithmic norm of the matrix is used.

Keywords: telegraph equation, partial differential equation, numerical solution, numerical algorithm, differential-difference scheme, Hermite — Birkhoff interpolation, Newton — Stirling interpolation, logarithmic norm, integral-interpolation method.

Received: November 20, 2023

Revised: December 27, 2023

Accepted: May 23, 2024

Authors' information:

Le Minh Hieu — <https://orcid.org/0000-0001-5252-199X>, hieulm@due.edu.vn
Nguyen Huu Nguyen Xuan — <https://orcid.org/0000-0002-2562-9759>, xuannhn@due.edu.vn

*The research is funded by the Danang University Science and technology Development Fund as part of the project no. B2020-DN04-39.