УДК 517.9 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 4
MSC 54H25, 47H10

Задача о неподвижной точке для гибридного сжатия и устойчивость Улама — Хайерса — Рассиаса относительно w-расстояния

Б. С. Чоудхури[1], *П. Чакраборти*[2]

[1] Индийский институт инженерных наук и технологий,
Индия, Шибпур Хора-711103, Западная Бенгалия
[2] Индийский институт информационных технологий,
Индия, Ранчи Ранчи-834010, Джаркханд

Для цитирования: *Чоудхури Б. С., Чакраборти П.* Задача о неподвижной точке для гибридного сжатия и устойчивость Улама — Хайерса — Рассиаса относительно w-расстояния // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 4. С. 744–754. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.410

В этом исследовании мы рассматриваем задачу о неподвижной точке, относящуюся к гибридному многозначному сжимающему отображению, соединяя подходы, лежащие в основе изучения двух хорошо известных семейств сжатий — сжатия типа Джерати и типа Каннана. Задача сформулирована относительно w-расстояний, которые являются дополнительными структурами в метрических пространствах и, как известно, используются при доказательстве важных результатов теории о неподвижной точке. Получены несколько следствий, связанных с вариантами основного результата для однозначных отображений. Описан наглядный пример. Также обсуждается вопрос сравнения некоторых известных результатов с результатами, полученными в этом исследовании. Исследована устойчивость Хайерса — Улама — Рассиаса для рассматриваемой задачи о неподвижной точке относительно w-расстояния.

Ключевые слова: неподвижная точка, w-расстояние, сжатие Каннана, функция Герати, HUR-устойчивость.

1. Введение и математические основы. (*В дальнейшем мы обозначаем через* $\mathbb{N}$ *множество натуральных чисел;* $\mathbb{R}$ — *множество действительных чисел;* $N(X)$ — *множество всех непустых подмножеств* X*;* $CB(X)$ — *множество всех непустых замкнутых и ограниченных подмножеств* X*.*)

Это исследование связано с теорией неподвижных точек. В нем мы строим и анализируем многозначную функцию, удовлетворяющую неравенству сжатия относительно w-расстояния. Используемое здесь условие сжатия имеет гибридный тип, полученный объединением двух существующих понятий, которые мы опишем ниже. Сжатия вызывают очень большой интерес у математиков, занимающихся функциональным анализом. В частности, метрическая теория неподвижной точки берет свое начало в работе Банаха [1], написанной сто лет назад, в 1922 г., в которой было введено понятие метрического сжатия и установлен знаменитый принцип сжатия. В последующие годы было введено несколько типов сжатий и исследованы их свойства, связанные с неподвижными точками. Некоторые из них являются обобщениями сжатия по Банаху [2–7], в то же время есть много независимых типов сжатий, отличающихся от сжатия по Банаху [8–11]. Оба вышеуказанных направления формируют определенные направления в современных исследованиях.

Из первого направления отметим важный для цели нашего исследования результат Джерати [3]. Джерати использовал класс $\mathcal{S}$ таких функций $\beta : [0, \infty) \to [0, 1)$, что

$$\beta(t_n) \to 1 \quad \text{влечет} \quad t_n \to 0, \tag{1}$$

и пришел к следующему результату.

Теорема 1 (Geraghty [3]). *Пусть $T : X \to X$ — отображение полного метрического пространства (X, d), удовлетворяющее условию $d(Tx, Ty) \le \beta(d(x, y))d(x, y)$, где $\beta \in \mathcal{S}$. Тогда T имеет единственную неподвижную точку в X.*

Из второго направления отметим старый результат о неподвижных точках сжатий, допускающих разрывы, полученный Каннаном [8]. Он имеет множество обобщений, некоторые из которых описаны в [11–16]. Эти отображения известны как отображения типа Каннана и считаются важным классом при изучении теории неподвижных точек.

Определение 1 ([8]). *Пусть (X, d) — метрическое пространство. Отображение $T : X \to X$ называется сжатием типа Каннана, если существует $0 \le k < 1/2$ такое, что для всех $x, y \in X$,*

$$d(Tx, Ty) \le k[d(Tx, x) + d(Ty, y)]. \tag{2}$$

Теорема 2 (Kannan [8]). *Пусть (X, d) — полное метрическое пространство и $T : X \to X$ — отображение, удовлетворяющее* (2)*. Тогда T имеет единственную неподвижную точку.*

Понятие неподвижной точки для многозначных отображений заключается в следующем.

Определение 2 ([5]). *Пусть $T : X \to N(X)$ — многозначное отображение. Точка $x \in X$ называется неподвижной точкой T, если $x \in Tx$.*

Надлер распространил принцип сжимающих отображений Банаха на случай многозначных отображений следующим образом.

Теорема 3 (Nadler [5]). *Пусть (X, d) — полное метрическое пространство, H — метрика Хаусдорфа, порожденная d на $CB(X)$, и $T : X \to CB(X)$ — многозначное сжимающее отображение, т. е. существует $k \in [0, 1)$ такое, что для всех $x, y \in X$*

$$H(Tx, Ty) \le kd(x, y). \tag{3}$$

Тогда T имеет неподвижную точку.

Результаты нашего исследования получены относительно w-расстояний, которые являются функциями, дополняющими метрику в метрическом пространстве. Это понятие было введено в работе Када [17]. Оно использовалось для получения новых теорем о неподвижной точке в нескольких работах [17–23]. Ниже приведены некоторые технические определения, связанные с w-расстоянием.

Определение 3 ([17]). *Пусть (X, d) — метрическое пространство. Функция $p : X \times X \to [0, \infty)$ называется w-расстоянием на X, если она обладает следующими свойствами:*

1) $p(x, z) \leq p(x, y) + p(y, z)$ для любых $x,\ y,\ z\ \in\ X$;

2) p полунепрерывна снизу по второй переменной, т. е. если $x \in X$ и $y_n \to y$ в X, то $p(x, y) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} p(x, y_n)$;

3) для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из неравенств $p(z, x) \leq \delta$ и $p(z, y) \leq \delta$ следует, что $d(x, y) \leq \varepsilon$.

Следующая лемма будет использоваться ниже.

Лемма 1 ([17]). *Пусть (X, d) — метрическое пространство, а, p — w-расстояние на X.*

(i) Пусть $\{x_n\}$ — последовательность в X такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} p(x_n, x) = \lim\limits_{n\to\infty} p(x_n, y) = 0$. Тогда $x = y$. В частности, если $p(z, x) = p(z, y) = 0$, то $x = y$.

(ii) Если $p(x_n, y_n) \leq \alpha_n$ и $p(x_n, y) \leq \beta_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — последовательности из $[0, \infty)$, сходящиеся к 0, тогда $\{y_n\}$ сходится к y.

(iii) Пусть p — w-расстояние в метрическом пространстве (X, d). Пусть $\{x_n\}$ — последовательность из X такая, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что для $m > n > k$ $p(x_n, x_m) < \varepsilon$ (или $\lim\limits_{m,n\to\infty} p(x_n, x_m) = 0$). Тогда $\{x_n\}$ — последовательность Коши.

Замечание 1. Поскольку $p(a, a) \leq p(a, b)+p(b, a)$, из равенств $p(a, b) = p(b, a) = 0$ следует, что $p(a, a) = 0$. По лемме 1 $a = b$.

Определение 4. *Пусть p — w-расстояние на X. Обозначим для $A \in N(X)$ и $b \in X$ w-расстояние точки b от множества A через $Q(A, b)$ и определим $Q(A, b) = \inf\limits_{a\in A} p(a, b)$.*

Аналогично обозначим w-расстояние множества A от точки b через $Q(b, A)$ и определим $Q(b, A) = \inf\limits_{a\in A} p(b, a)$.

Ниже мы описываем тип устойчивости, называемый устойчивостью Хайерса—Улама—Рассиаса (HUR-устойчивость). Говорят, что в задаче о неподвижной точке имеет место этот тип устойчивости, если приближенная неподвижная точка может быть аппроксимирована фактической неподвижной точкой. Далее приводится формальное описание вышеуказанной идеи.

Определение 5 ([19]). *Пусть (X, d) — метрическое пространство, $T : X \to N(X)$ — отображение на X и p — w-расстояние на X. Говорят, что задача о неподвижной точке*

$$\text{“Найти} \quad x \in Tx\text{”} \tag{4}$$

устойчива по Хайерсу — Уламу — Рассиасу (относительно w-расстояния), если существует положительное действительное число c такое, что для каждого $\varepsilon > 0$ и каждого $z \in X$ таких, что

$$p(w, z) < \varepsilon, w \in Tz, \tag{5}$$

существует $x_0 \in X$, удовлетворяющее уравнению (4), такое, что

$$p(x_0, z) < c\varepsilon. \tag{6}$$

Идея HUR-устойчивости очень широка и применима к различным областям математики. Определение 5 описывает только вариант этого типа устойчивости, применимый к теории неподвижных точек. Долгая и увлекательная история HUR-устойчивости началась с вопроса, поднятого Уламом в 1940 г. в его выступлении перед Математическим клубом Висконсинского университета, на который частично ответили Д. Х. Хайерс, Т. М. Рассиас, а затем и другие, и изучалась в таких областях, как функциональные уравнения, дифференциальные уравнения и т. д. в нескольких работах [24–28] более чем восемь десятилетий. Особенностью определения 5 является то, что оно сформулировано в терминах w-расстояний, в отличие от распространенной практики использования метрического расстояния.

2. Основной результат

Теорема 4. *Пусть $(X,\ d)$ — полное метрическое пространство, снабженное w-расстоянием p, и $T : X \to N(X)$ — многозначное отображение. Предположим, что выполнены следующие условия:*

(i) существует $a \in [0, 1)$ такое, что для каждого $x \in X$ существует $u \in X$ такое, что

$$Q(Tu, u) \leq aQ(Tx, x); \tag{7}$$

(ii) существует $\beta \in \mathcal{S}$ такое, что для каждых $x, y \in X$ и для каждого $x^{'} \in Tx$ существует $y^{'} \in Ty$ такое, что

$$p(x^{'}, y^{'}) \leq \beta \left(Q\left(Tx, x\right) + Q\left(Ty, y\right)\right) \left\{Q\left(Tx, x\right) + Q\left(Ty, y\right)\right\}; \tag{8}$$

(iii) из следующих утверждений верно либо (a), либо (b):

(a) если $\{\alpha_n^{'}\}$ — любая последовательность, сходящаяся к $\alpha \in X$, такая, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ $\alpha_n^{'} \in T\alpha_n$ для некоторого $\alpha_n \in X$, то существует подпоследовательность $\{\alpha_{n_k}\}$ из $\{\alpha_n\}$ такая, что для всех $k \in \mathbb{N}$, соотношение (8) выполняется для каждого $x^{'} \in T\alpha$ при $x = \alpha, y^{'} = \alpha_{n_k}^{'}, y = \alpha_{n_k}$;

(b) $\inf\{p(x, \alpha) + Q(Tx, x) : x \in X\} > 0$ для каждой $\alpha \in X$ с $\alpha \notin T\alpha$.

Тогда T имеет неподвижную точку.

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$ выбрано произвольно. В силу (7) существует $x_1 \in X$ такое, что $Q(Tx_1, x_1) \leq aQ(Tx_0, x_0)$. Для $x_1 \in X$ существует $x_2 \in X$ такое, что $Q(Tx_2, x_2) \leq aQ(Tx_1, x_1)$.

Индуктивно построим последовательность $\{x_n\}$ такую, что

$$Q(Tx_{n+1}, x_{n+1}) \leq aQ(Tx_n, x_n). \tag{9}$$

Из (9) следует цепочка неравенств $Q(Tx_{n+1}, x_{n+1}) \leq aQ(Tx_n, x_n) \leq \ldots \leq a^{n+1}Q(Tx_0, x_0)$. Поскольку $a \in [0, 1)$, имеем

$$Q(Tx_n, x_n) \to 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{10}$$

Теперь для $x_1^{'} \in Tx_1$ существует $x_2^{'} \in Tx_2$ такое, что соотношение (8) выполняется для $x_1^{'} = x^{'}, x_2^{'} = y^{'}, x_1 = x, x_2 = y$. Индуктивно для каждого $n \in \mathbb{N}$ мы строим последовательность $\{x_n^{'}\}$ такую, что $x_n^{'} \in Tx_n$ и равенство (8) выполнено для $x_n^{'} = x^{'}, x_{n+1}^{'} = y^{'}, x_n = x, x_{n+1} = y$.

Кроме того, для $m, n \in \mathbb{N}$ с $m < n$ мы имеем:

$$
\begin{aligned}
p(x_m^{'}, x_n^{'}) &\leq \sum_{i=m}^{n-1} p(x_i^{'}, x_{i+1}^{'}) \leq \\
&\leq \sum_{i=m}^{n-1} \beta\left(Q\left(Tx_i, x_i\right) + Q\left(Tx_{i+1}, x_{i+1}\right)\right)\left\{Q\left(Tx_i, x_i\right) + Q\left(Tx_{i+1}, x_{i+1}\right)\right\} < \\
&< \sum_{i=m}^{n-1} \left\{Q\left(Tx_i, x_i\right) + Q\left(Tx_{i+1}, x_{i+1}\right)\right\} \leq \sum_{i=m}^{n-1} \left\{Q\left(Tx_i, x_i\right) + aQ\left(Tx_i, x_i\right)\right\} = \\
&= (1+a) \sum_{i=m}^{n-1} Q\left(Tx_i, x_i\right) \leq (1+a) \sum_{i=0}^{n-m-1} a^i Q\left(Tx_m, x_m\right) = \\
&= (1+a) Q\left(Tx_m, x_m\right) \sum_{i=0}^{n-m-1} a^i \leq (1+a) Q\left(Tx_m, x_m\right) \sum_{i=0}^{\infty} a^i = \\
&= (1+a) Q\left(Tx_m, x_m\right) \frac{1}{1-a} \to 0 \text{ as } m, n \to \infty. \qquad (11)
\end{aligned}
$$

Из (11) и леммы 1 видно, что $\{x_n^{'}\}$ является последовательностью Коши. Поскольку X полно, можно считать, что $x_n^{'} \to z$ для некоторого $z \in X$ при $n \to \infty$.

Пусть условие (iii.a) теоремы выполнено. Тогда существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ из $\{x_n\}$ такая, что для всех $k \in \mathbb{N}$ соотношение (8) выполняется для каждого $x^{'} \in Tz$ при $x = z, y = x_{n_k}, y^{'} = x_{n_k}^{'}$.

Поскольку p полунепрерывна снизу по второй переменной, для любого $z^{'} \in Tz$ имеем

$$
\begin{aligned}
Q(Tz,\ z) &\leq p(z^{'},\ z) \leq \liminf_{n\to\infty} p(z^{'}, x_n^{'}) \leq \liminf_{k\to\infty} p(z^{'}, x_{n_k}^{'}) \leq \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} \left\{\beta\left(Q\left(Tz,\ z\right) + Q\left(Tx_{n_k},\ x_{n_k}\right)\right)\left\{Q\left(Tz,\ z\right) + Q\left(Tx_{n_k},\ x_{n_k}\right)\right\}\right\} = \\
&= \liminf_{k\to\infty} \left\{\beta(Q(Tz,\ z) + Q\left(Tx_{n_k},\ x_{n_k}\right)\right\} \lim_{k\to\infty} \left\{Q(Tz,\ z) + Q\left(Tx_{n_k},\ x_{n_k}\right)\right\} = \\
&= \liminf_{k\to\infty} \beta\left(Q\left(Tz,\ z\right) + Q\left(Tx_{n_k},\ x_{n_k}\right)\right) Q\left(Tz,\ z\right). \qquad (12)
\end{aligned}
$$

Из соотношения (12) следует, что либо $Q(Tz,\ z) = 0$, либо $\liminf\limits_{k\to\infty} \beta(Q(Tx_{n_k},\ x_{n_k}) + Q(Tz,\ z)) = 1$.

Если $\liminf\limits_{k\to\infty} \beta(Q(Tx_{n_k},\ x_{n_k}) + Q(Tz,\ z)) = 1$, то $\lim\limits_{k\to\infty} \beta(Q(Tx_{n_k},\ x_{n_k}) + Q(Tz,\ z)) = 1$, поскольку $\beta(t) < 1$ для всех $t \geq 0$. Поскольку $\beta \in \mathcal{S}$, $\lim\limits_{k\to\infty} Q(Tx_{n_k},\ x_{n_k}) + Q(Tz,\ z) = 0$, т. е. $Q(Tz,\ z) = 0$. Тогда из (12) получаем

$$
p(z^{'}, z) \leq \lim_{k\to\infty} \beta(Q(Tz,\ z) + Q(Tx_{n_k},\ x_{n_k}))Q(Tz,\ z) = 0. \qquad (13)
$$

Вновь, для $z^{'} \in Tz$ существует $z^{''} \in Tz$ такое, что

$$
p(z^{'},\ z^{''}) \leq \beta(Q(Tz,\ z) + Q(Tz,\ z))\left\{Q(Tz,\ z) + Q(Tz,\ z)\right\} = 0. \qquad (14)
$$

Теперь из равенств (13) и (14), используя лемму 1, получаем $z = z^{''}$ или $z \in Tz$. Следовательно, z — неподвижная точка T.

Пусть условие (iii.b) теоремы выполнено. Пусть $z \notin Tz$. Тогда

$$0 < \inf\{p(x^{'}, z) + Q(Tx, x) : x \in X, x^{'} \in Tx\}. \quad (15)$$

Пусть $k \in \mathbb{N}$. В силу сотношения (11), для $\frac{1}{k} > 0$ существует $N_k \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $m, n \geq N_k$, $p(x^{'}_m, x^{'}_n) < 1/k$. В частности, $p(x^{'}_{N_k}, x^{'}_n) < 1/k$ для всех $n \geq N_k$. Кроме того, поскольку p полунепрерывна снизу по второй переменной, мы имеем $p(x^{'}_{N_k}, z) \leq \liminf_{n\to\infty} p(x^{'}_{N_k}, x^{'}_n) \leq 1/k$.

Из (15) следует, что $0 < \inf\{p(x^{'}_{N_k}, z) + Q(Tx_{N_k}, x_{N_k}) : x_{n_k} \in X\} = \inf_{k\in\mathbb{N}}\{p(x^{'}_{N_k}, z) + Q(Tx_{N_k}, x_{N_k})\}$=0 в силу (10). Это противоречие. Таким образом, $z \in Tz$. Следовательно, z — неподвижная точка T. □

Пример 1. Рассмотрим метрическое пространство (X, d), где $X = [0, 1/2]$ и d — стандартная метрика. Рассмотрим w-расстояние p, определяемое формулой $p(x, y) = |y|$. Пусть многозначное отображение $T : X \in N(X)$ определяется формулой

$$Tx = \begin{cases} [0, x^2] & \text{if } \ 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ [0, \frac{1}{4}] \cup \{\frac{1}{2}\} & \text{if } \ x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Пространство X очевидно полно.

Если для всех $x \in X$ мы выберем $u = 0 \in X$ и $a = \dfrac{1}{2}$, то соотношение (7) будет выполнено.

Теперь пусть $\beta : [0,\ \infty) \to [0,\ 1)$ определяется как $\beta(t) = 1/2$ и $x, y \in X$. Тогда для каждого $x^{'} \in Tx$ существует $y^{'} = 0 \in Ty$ такой, что

$$p(x^{'}, y^{'}) = |y^{'}| = 0 \leq \beta(\{Q(Tx, x) + Q(Ty, y)\})\{Q(Tx, x) + Q(Ty, y)\}.$$

Таким образом, T удовлетворяет соотношению (8).

Пусть теперь $\{x^{'}_n\}$ — любая последовательность, сходящаяся к $x \in X$, и пусть $x^{'}_n \in Tx_n$ для некоторого $x_n \in X$, для каждого $n \in \mathbb{N}$. Тогда либо $0 \leq x \leq 1/4$, либо $x = 1/2$.

Рассмотрим следующие два случая.

• Случай I. Если $x = \frac{1}{2}$, то $\{x^{'}_n\}$ является эвентуально постоянной последовательностью. Таким образом, существует $m_1 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n \geq m_1$ $x^{'}_n = \frac{1}{2}$ и, следовательно, $x_n = \frac{1}{2}$. Таким образом, для подпоследовательности $\{x^{'}_{n_k}\}$, где $n_k = m_1 + k$ для каждого $x^{'} \in T\frac{1}{2}$, с $x = \frac{1}{2}$, $y^{'} = x^{'}_{n_k}$, $y = x_{n_k}$, соотношение (8) удовлетворено.

• Случай II. Если $x \leq \frac{1}{4}$, то существует $m_2 \in \mathbb{N}$ такое, что $0 \leq x^{'}_n \leq \frac{1}{4}$ для всех $n \geq m_2$. Таким образом, для всех $n \geq m_2$, $x^{'}_n \leq x_n^2 \leq \dfrac{x_n}{2}$, так как $0 \leq x_n \leq \dfrac{1}{2}$. В этом случае для любого $x^{'} \in Tx$ и для всех $n \geq m_2$

$$p(x^{'}, x^{'}_n) = x^{'}_n \leq \frac{x_n}{2} \leq \frac{1}{2}(x+x_n) \leq \beta(\{Q(Tx, x)+Q(Tx_n, x_n)\})\{Q(Tx, x)+Q(Tx_n, x_n)\}.$$

Следовательно, T удовлетворяет всем условиям теоремы 4 и 0 является неподвижной точкой отображения.

Замечание 2. *Для* $x = 0$, $y = 1/2$, $x^{'} = 0 \in T(0)$ *и* $y^{'} = 1/2 \in T(1/2)$ *соотношение* (8) *не выполняется. Это означает, что соотношение* (8) *не обязательно выполняется для всех* $x^{'} \in Tx, y^{'} \in Ty$.

Замечание 3. *Кроме точки* 0, *точка* $1/2$ *также является неподвижной точкой* T. *Таким образом, неподвижная точка не единственна. Это согласуется с тем фактом, что многозначные отображения часто имеют неединственные неподвижные точки, как, например, в случае теоремы Надлера [5]. Если* (X, d) — *компактное метрическое пространство и* $T : x \to CB(X)$ *задается формулой* $Tz = X$ *для всех* $z \in X$, *то* $H(Tz_1, Tz_2) = H(X, X) = 0$ *для всех* $z_1, z_2 \in X$. *Следовательно,* T *удовлетворяет теореме Надлера. Здесь каждая точка* X *является неподвижной точкой* T.

Приведенный выше иллюстративный пример показывает, что неподвижная точка в теореме Надлера не обязательно единственна.

Замечание 4. *Стоит отметить, что в примере 1 невозможно применить теорему Надлера, поскольку* $H(T(1/2), T(0)) = |1/2 - 0|$.

В следующих следствиях основной теоремы обсуждаются соответствующие результаты для однозначных отображений.

Следствие 1. *Пусть* $(X,\ d)$ — *полное метрическое пространство, снабженное* w*-расстоянием* p *и отображением* T *пространства* X *в себя. Предположим, что выполнены следующие условия.*

(i) Существует $a \in [0, 1)$ *такое, что для каждого* $x \in X$ *существует* $u \in X$ *такое, что*

$$p(Tu, u) \le ap(Tx, x). \tag{16}$$

(ii) Существует $\beta \in \mathcal{S}$ *такое, что для всех* $x, y \in X$

$$p(Tx, Ty) \le \beta \left(p\left(Tx, x\right) + p\left(Ty, y\right)\right) \left\{p\left(Tx, x\right) + p\left(Ty, y\right)\right\}. \tag{17}$$

Тогда T *имеет неподвижную точку.*

Доказательство. Здесь условие (iii.a) теоремы 4 выполнено, поскольку T однозначно. Ясно, что T удовлетворяет всем условиям теоремы 4. Отсюда следует результат. □

Следствие 2. *Если в дополнение к условиям следствия 1 выполнено следующее условие*

(iii) *для неподвижной точки* v *из* T, $p(v, v) = 0$,

тогда неподвижная точка единственна.

Доказательство. Пусть T имеет две различные неподвижные точки x и y. Поскольку $x = Tx$, для $y = Ty$ имеем

$$p(x,\ y) \le \beta(p(Tx,\ x) + p(Ty,\ y))(p(Tx,\ x) + p(Ty,\ y)) = 0. \tag{18}$$

Таким образом, $p(x, x) = p(x, y) = 0$, откуда следует $x = y$. Отсюда следует результат. □

Следствие 3. *Пусть $(X,\ d)$ — полное метрическое пространство, снабженное отображением T на себя. Предположим, что выполнены следующие условия.*

(i) Существует $a \in [0,1)$ такое, что для каждого $x \in X$ существует $u \in X$ такое, что

$$d(Tu, u) \leq ad(Tx, x). \tag{19}$$

(ii) Существует $\beta \in \mathcal{S}$ такое, что для всех $x, y \in X$

$$d(Tx, Ty) \leq \beta\left(d\left(Tx, x\right) + d\left(Ty, y\right)\right)\left\{d\left(Tx, x\right) + d\left(Ty, y\right)\right\}. \tag{20}$$

Тогда T имеет единственную неподвижную точку.

Доказательство. При выборе $p = d$ результат следует из (8). □

Пример 2. *Рассмотрим метрическое пространство (X, d), где $X = [0, 1/2]$ и d — обычная метрика. Рассмотрим w-расстояние p, определяемое формулой $p(x, y) = |y|$. Пусть однозначное отображение $T : X \to X$ определяется формулой $Tx = x^2$.*

Пространство X очевидно полно.

Если для всех $x \in X$ мы выберем $u = 0 \in X$ и $a = \dfrac{1}{2}$, то соотношение (16) *будет удовлетворено.*

Пусть $\beta : [0,\ \infty) \to [0,\ 1)$ определяется как $\beta(t) = \frac{1}{2}$. Для $x, y \in X$ имеем

$$p(Tx, Ty) = y^2 \leq \frac{y}{2} \leq \frac{1}{2}(x + y) = \beta\left(p\left(Tx, x\right) + p\left(Ty, y\right)\right)\left\{p\left(Tx, x\right) + p\left(Ty, y\right)\right\}.$$

Таким образом, T удовлетворяет соотношению (17).

Следовательно, T удовлетворяет всем условиям следствия 1. Ясно, что 0 — *неподвижная точка T.*

Заметим, что если v — неподвижная точка T, то из равенства $Tv = v$ следует, что $v^2 = v$. Таким образом, $v = 0$ и $p(v, v) = 0$. Итак, T удовлетворяет всем условиям следствия 2. Ясно, что 0 — *единственная неподвижная точка T.*

Замечание 5. *Отображение T в примере 2 не является сжатием типа Каннана пространства X. Полагая $x = 0$, $y = 1/2$, можно проверить, что не существует $k \in [0, 1/2)$ такого, что выполняется соотношение* (2).

С другой стороны, для сжатия типа Каннана S в метрическом пространстве (X, d) существует $k \in [0, 1/2)$ такое, что для всех $x, y \in X$ соотношение (2) *удовлетворено. Выбирая $\beta(t) = k$, мы видим, что S удовлетворяет соотношению* (20) *следствия 3. Также известно, что для сжатия типа Каннана S существует точка u такая, что $d(Su, u) = 0$. Таким образом, соотношение* (19) *также удовлетворяется. Это подтверждает то, что наш результат является правильным обобщением теоремы Каннана (теоремы 2).*

Далее заметим, что при выборе $\beta(t) = k$, где $0 \leq k < 1$ в (20)*, мы имеем обобщение неравенства типа Каннана, приведенного в* (2). *Следствие 3 представляет собой результат о неподвижной точке для этого обобщенного неравенства типа Каннана при дополнительном условии* (19).

Замечание 6. *В этом контексте можно провести сравнение с нашей недавно опубликованной статьей [19]. И в настоящей статье, и в упомянутой выше работе мы объединяем в один подходы Джерати и Каннана в отношении w-расстояния. Кроме того, в [19] мы предполагаем наличие отношения в метрическом пространстве. Если мы сравним результат теоремы 4 с основным результатом [19] в случае отсутствия отношения (т. е., другими словами, в предположении универсального отношения), то мы увидим, что сжимающие неравенства не влекут друг друга. По существу настоящая теорема представляет собой другой способ объединения двух упомянутых выше конструкций сжимающих неравенств.*

3. Устойчивость Хайерса — Улама — Рассиаса. В этом разделе мы показываем, что наша задача устойчива по Хайерсу — Уламу — Рассиасу.

Теорема 5. *Пусть (X, d), T и p такие же, как в теореме 4, с выполнением условий теоремы. Предположим, кроме того, что для заданного $\varepsilon > 0$, если $w \in X$ таково, что $p(w', w) \le \varepsilon$ для всех $w' \in Tw$ и существует неподвижная точка v функции T такая, что $Q(Tv, v) = 0$, то $p(v, w) < 2\varepsilon$. Таким образом, возникающая задача (4) устойчива по Хайерсу — Уламу — Рассиасу (см. определение 5).*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и возьмем $w \in X$ такое, что $p(w', w) \le \varepsilon$ для всех $w' \in Tw$. Пусть v — неподвижная точка T и существует $w_0' \in Tw$ такое, что

$$p(v,\ w_0') \le \beta(Q(Tv,\ v) + Q(Tw,\ w))(Q(Tv,\ v) + Q(Tw,\ w)) = \\ = \beta(Q(Tw,\ w)Q(Tw,\ w)).$$

Наконец, мы имеем

$$p(v,\ w) \le p(v,\ w_0') + p(w_0',\ w) \le \beta(Q(Tw,\ w)Q(Tw,\ w)) + p(w_0',\ w) \le \\ \le \beta(Q(Tw,\ w)) \times \varepsilon + \varepsilon \le \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Таким образом, полагая $c = 2$, для каждого $\varepsilon > 0$ и каждого $w \in X$ с учетом $p(w', w) \le \varepsilon$ для всех $w' \in Tw$ существует неподвижная точка $v \in X$ в T такая, что $p(v, w) < c\varepsilon$. Следовательно, задача устойчива. □

4. Заключение. Гибридные сжатия, подобные построенным здесь, имеют специфику: они объединяют различные конструкции сжимающих неравенств. Более того, использование w-расстояния в этих неравенствах, как и в данном случае, должно привести к новым интересным результатам в теории неподвижных точек. Эти исследования можно рассматривать как попытку объединить различные направления теории неподвижных точек в одно целое. Предполагается, что наша дальнейшая работа будет этому посвящена.

Авторы выражают благодарность высококвалифицированным рецензентам за их ценные предложения.

Литература/References

1. Banach S. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux équations intégrales. *Fund Math.* **3**, 133–181 (1922).

2. Boyd D. W., Wong J. S. W. On nonlinear contractions. *Proc. Amer. Math. Soc.* **20** (2), 458–464 (1969).

3. Geraghty M. A. On contractive mappings. *Proc. Amer. Math. Soc.* **40**, 604–608 (1973).

4. Meir A., Keeler E. A theorem on contraction mappings. *J. Math. Anal. Appl.* **28**, 326–329 (1969).

5. Nadler (Jr.) S. B. Multivalued contraction mappings. *Pacific J. Math.* **30**, 475–488 (1969).

6. Mizoguchi N., Takahashi W. Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces. *J. Math. Anal. Appl.* **141**, 177–188 (1989).

7. Rhoades B. E. Some theorems on weakly contractive maps. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Appl.* **47** (4), 2683–2693 (2001).

8. Kannan R. Some results on fixed points. *Bull. Cal. Math. Soc.* **60**, 71–76 (1968).

9. Salazar L. A., Reich S. A remark on weakly contractive mappings. *J. Nonlinear Convex Anal.* **16**, 767–773 (2015).

10. Gnana Bhaskar T., Lakshmikantham V. Fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications. *Nonlinear Anal.* **65**, 1379–1393 (2006).

11. Suzuki T. A generalized Banach contraction principle that characterizes metric completeness. *Proc. Amer. Math. Soc.* **136**, 1861–1869 (2008).

12. Reich S. Kannan's fixed point theorem. *Bollettino Della Unione Matematica Italiana* **4**, 1–11 (1971).

13. Górnicki J. Fixed point theorems for Kannan type mappings. *Journal of Fixed Point Theory and Application* **19**, 2145–2152 (2017).

14. Janos L. On mappings contractive in the sense of Kannan. *Proc. Amer. Math. Soc.* **61** (1), 171–175 (1976).

15. Kikkaw M., Suzuki T. Some similarity between contractions and Kannan mappings. *Fixed Point Theory and Appl.* **2008**, 1–8, Art. ID 649749 (2008).

16. Enjouji Y., Nakanishi M., Suzuki T. A generalization of Kannan's fixed point theorem. *Fixed Point Theory and Applications* **2009**, 192872 (2009).

17. Kada O., Suzuki T., Takahashi W. Nonconvex minimization theorems and fixed point theorems in complete metric spaces. *Math. Jpn.*, 381–591 (1996).

18. Suzuki T., Takahashi W. Fixed point theorems and characterizations of metric completeness. *Topological methods in nonlinear analysis* **8**, 371–382 (1996).

19. Choudhury B. S., Chakraborty P. Fixed point problem of a multi-valued Kannan — Geraghty type contraction via w-distance. *Journal of Analysis*, 439–458 (2022).

20. Soltani Z. A fixed point theorem for generalized contractive type set-valued mappings with application to nonlinear fractional differential inclusions. *Filomat* **32** (15), 5361–5370 (2018).

21. Fierro R. Fixed point theorems for set-valued mappings and variational principles in uniform spaces with w-distances. *Fixed Point Theory* **18** (2), 555–564 (2017).

22. Zeqing Liu, Yan Lu, Shin Min Kang. Fixed point theorems for multi-valued contractions with w-distance. *Applied mathematics and computation* **224**, 535–552 (2013).

23. Lakzian H., Rakočević V., Aydi H. Extensions of Kannan contraction via w-distances. *Aequat. Math.* **93**, 1231–1244 (2019).

24. Ulam S. M. *Problems in Modern Mathematics.* New York, Wiley (1964).

25. Hyers D. H. On the stability of the linear functional equation. *Proc. Natl. Acad. Sci.* **27** (4), 222–224 (1941).

26. Rassias T. M. On the stability of the linear mappings in Banach spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.* **72**, 297–300 (1978).

27. Rus I. A. Remarks on Ulam stability of the operatorial equations. *Fixed Point Theory* **10** (2), 305–320 (2009).

28. Sintunavarat W. Generalized Ulam — Hyers stability, well-posedness and limit shadowing of fixed point problems for α-β — contraction mapping in metric spaces. *The Scientific World Journal* **2014**, 569174 (2014).

Статья поступила в редакцию 29 июля 2023 г.;
доработана 26 декабря 2023 г.;
рекомендована к печати 23 мая 2024 г.

Контактная информация:

Чоудхури Бинаяк С. — PhD, проф.; https://orcid.org/0000-0002-7263-6636,
binayak@math.iiests.ac.in
Чакраборти Приям — PhD, ассистент проф.; https://orcid.org/0000-0001-5125-1465,
priyam.math123@gmail.com

A fixed point problem for a hybrid contraction and Ulam — Hyers — Rassias stability result with respect to w-distance

B. S. Choudhury[1], *P. Chakraborty*[2]

[1] Indian Institute of Engineering Science and Technology, Shibpur Howrah-711103, West Bengal, India
[2] Indian Institute of Information Technology, Ranchi Ranchi-834010, Jharkhand, India

For citation: Choudhury B. S., Chakraborty P. A fixed point problem for a hybrid contraction and Ulam — Hyers — Rassias stability result with respect to w-distance. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 4, pp. 744–754. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.410 (In Russian)

In the present research, we consider a fixed point problem pertaining to a hybrid multivalued contractive mapping constructed by putting together the ideas behind the two well known families of contractions known as Geraghty and Kannan type contractions respectively. The problem is formulated with respect to w-distances which are additional structures on metric spaces and are known to be instrumental in proving important results in fixed point theory. There are several corollaries dealing with the corresponding single-valued cases of the main result. An illustrative example is described. There are also some discussions, on comparisons of certain existing results, with the results derived here. A Hyers — Ulam — Rassias stability result, of the present fixed point problem, with respect to the w-distance, is established.

Keywords: fixed point, w-distance, Kannan contraction, Geraghty function, H — U — R stability.

Received: July 29, 2023
Revised: December 26, 2023
Accepted: May 23, 2024

Authors' information:

Binayak S. Choudhury — https://orcid.org/0000-0002-7263-6636, binayak@math.iiests.ac.in
Priyam Chakraborty — https://orcid.org/0000-0001-5125-1465, priyam.math123@gmail.com