

МЕХАНИКА

УДК 514.85
MSC 53Z05, 70F20

Силы реакции и силы трения в динамике систем с геометрическими особенностями

С. Н. Бурьян

Государственный научно-исследовательский институт прикладных проблем,
Российская Федерация, 191167, Санкт-Петербург, наб. Обводного канала, 29

Для цитирования: Бурьян С. Н. Силы реакции и силы трения в динамике систем с геометрическими особенностями // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 4. С. 755–771.

<https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.411>

В статье рассматриваются особенности движения голономных механических систем с параметрами. Для некоторых (критических) значений параметров конфигурационное пространство механической системы является многообразием с особенностями. Для других значений параметров конфигурационное пространство является гладким многообразием. Предполагается, что на одну из материальных точек в механической системе может действовать сила трения скольжения по модели Амонтона — Кулона. Когда параметры механической системы отличны от критических значений, то для описания ее динамики применимы классические уравнения Лагранжа. Основной интерес представляет движение на гладких многообразиях вблизи точек, которые в пределе переходят в особые точки. Рассматривается поведение сил реакции и множителей Лагранжа для таких «предособых» точек. Изучается два типа конфигурационных пространств с особенностями: объединение двух пересекающихся кривых на плоскости и объединение двух касающихся кривых на плоскости. Впервые показаны различные варианты поведения множителей Лагранжа на примере заданного типа возмущений конфигурационных пространств с особенностями. В общем виде доказано, что для особенности типа пересечения множители Лагранжа становятся неограниченными вблизи особой точки (на многообразии с особенностями), независимо от влияния силы трения. Для особенности типа касания возможно несколько вариантов. С учетом силы трения для одного типа возмущений конфигурационного пространства полученные множители Лагранжа являются ограниченными; для другого типа возмущений — неограниченными. Получено общее свойство силы трения для рассмотренных механических систем. Если учитывается сила трения, то при движении вблизи особой точки в одном

направлении есть два решения для сил реакции, а при движении в другом направлении решений нет.

Ключевые слова: реакция связей, сила трения, шарнирный механизм, особая точка, голономная связь, множители Лагранжа, многообразия с особенностями.

1. Введение. В теоретической механике для описания движения голономных систем применяются уравнения Лагранжа или Гамильтона. Практически всегда предполагается, что голономные связи являются независимыми. Если это условие выполняется, то конфигурационное пространство механической системы является гладким многообразием. Уравнения движения могут быть записаны как система дифференциальных уравнений второго порядка.

Предположение о независимости голономных связей приводит к тому, что в системе не возникают бесконечные силы реакции. Но силы реакции связей могут быть не определены или определены неоднозначно. Например, если на систему действует сила трения в модели Амонтона — Кулона. Соответствующие примеры были рассмотрены Пенлеве [1]. Если учитывается сила трения, то матрица системы в уравнениях динамики, которая содержит обобщенные силы трения, может иметь неполный ранг. В результате могут возникать заклинивание или резкое торможение движения, которые рассматриваются в статье [2].

Одним из вариантов разрешения данных «парадоксов» является замена одного или нескольких жестких звеньев механизма упругими звеньями [3, с. 53–61]. В литературе рассматривается общая модель, в которой некоторые голономные связи $f_k(\mathbf{q}) = 0$ заменяются на дополнительный потенциал (штрафную функцию) вида $W = N \left(\sum c_k f_k^2(\mathbf{q}) \right)$ с положительными константами c_k . Когда константа N стремится к бесконечности, то траектории движения системы с дополнительным потенциалом W стремятся к траекториям движения системы с голономными связями $f_k(\mathbf{q}) = 0$. В работе [4] данная схема реализации голономных связей доказана для систем с потенциальными силами. В статье [5] предельный переход доказан в более общем случае: для сил с некоторыми условиями гладкости. Движение с начальным вектором скорости, который не касается многообразия связей, рассматривается в [6].

Особенности сил реакций также возникают в системах с избыточными связями. Уравнения зависимых связей обычно исключаются из рассмотрения. Исключенным связям соответствует нулевой множитель Лагранжа. Другим методом для определения сил реакций является псевдообращение матрицы системы. Схема вычислений в этом случае приведена в работах [7, 8].

Если голономные связи являются зависимыми в некоторых положениях механической системы, то в конфигурационном пространстве могут возникать геометрические особые точки. Конфигурационное пространство механической системы обычно зависит от нескольких параметров. Основными параметрами плоских шарнирных механизмов являются длины стержней или формы направляющих. Интерес представляет случай, когда для некоторых (изолированных) критических значений параметров конфигурационное пространство является многообразием с особенностями. Движение через геометрические особые точки не описывается классической динамикой. Для других значений параметров конфигурационное пространство является гладким многообразием. В этом случае можно составить уравнения движения в форме Лагранжа [9, гл. 5]. При приближении параметров системы к критическим значениям свойства динамики могут меняться.

В литературе тематика движения механизмов с особенностями рассматривается в небольшом числе работ. Так, в статье [10] изучается движение механической системы с вырождением неголономных связей коранга 1. Исследуются реакции связей при движении траектории к особой поверхности. Построения рассмотрены на примере балки с двумя коньками. В статье [11] рассматривается перестройка механической системы, которая зависит от параметров. Анализируются положения равновесия и силы реакции в околочритических положениях механизма. В статье [12] рассматриваются бифуркации положений равновесия околочритических механизмов.

Пример механической системы с особенностью конфигурационного пространства (сингулярный маятник) рассматривается автором в статьях [13, 14]. Для этого механизма изучено поведение сил реакции для критических параметров механизма. Конфигурационное пространство сингулярного маятника может иметь как трансверсальную особенность, так и особенность типа касания произвольного порядка. Дифференциально-геометрические свойства векторных полей для некоторых конфигурационных пространств с особенностями анализируются автором в [15].

В данной работе впервые исследуется поведение сил реакций для околочритических параметров механических систем при действии силы трения. Также впервые изучена динамика множителей Лагранжа для околочритических механизмов с особенностью типа касания первого порядка. Доказаны некоторые свойства движения механических систем вблизи особых точек, аналогичные «парадоксам» Пенлеве.

Основной целью исследования является анализ поведения множителей Лагранжа и сил реакции связей для модельных конфигурационных пространств, параметры которых близки к критическим значениям. Изучается влияние силы трения на разрешимость сил реакции в модели Амонтона — Кулона. Для упрощения формулировок рассматриваются два варианта конфигурационных пространств с особенностями: две пересекающиеся и две касающиеся кривые на плоскости.

Для особенности типа пересечения доказано, что для возмущенных конфигурационных пространств множители Лагранжа становятся неограниченными вблизи особой точки. С учетом силы трения при движении в одном направлении около особой точки есть два решения для множителей Лагранжа. При движении в другом направлении нет решений. Для особенности типа касания возможно несколько вариантов. С учетом силы трения для одного типа возмущений конфигурационного пространства множители Лагранжа являются ограниченными. Для другого типа возмущений полученные множители Лагранжа являются неограниченными. При движении механической системы по ветви в конфигурационном пространстве в одном направлении вблизи особой точки есть два решения для множителей Лагранжа. При движении в другом направлении нет решений.

2. Силы реакции и силы трения. Рассматривается механическая система, которая состоит из N материальных точек. На систему наложено $N - 1$ голономных связей f_1, f_2, \dots, f_{N-1} , заданных в декартовых координатах. В общем случае конфигурационное пространство такой механической системы является одномерным. Предполагается, что в некоторых изолированных точках \mathbf{r}_* градиенты голономных связей становятся линейно зависимыми. Строение конфигурационного пространства в окрестности точек \mathbf{r}_* может отличаться от одномерного многообразия. Уравнения голономных связей также могут зависеть от параметров. Тогда при малом возмущении связей конфигурационное пространство механической си-

стемы вблизи особенностей может распадаться на несколько одномерных многообразий.

Далее в статье преимущественно рассматриваются шарнирные механизмы. В теории шарнирных механизмов обычно предполагается, что стержни являются недеформируемыми, а некоторые вершины механизма двигаются по заданным направляющим. Силы реакции связей для стержней направлены вдоль стержней. Сила трения Амонтона — Кулона — противоположно движению вершины механизма по направляющей.

Переход от декартовых координат к обобщенным координатам позволяет понизить размерность задачи и упростить анализ механической системы. Уравнения связей также записываются в обобщенных координатах. Но множители Лагранжа в обобщенных координатах могут не соответствовать множителям Лагранжа в декартовых координатах. Поэтому для анализа сил реакции связей и сил трения скольжения необходимо, чтобы переход к обобщенным координатам был «согласован» с силами реакции в декартовых координатах.

2.1. Декартовы координаты. Сначала рассмотрим движение плоской механической системы, состоящей из N материальных точек. Конфигурационным пространством плоской свободной системы является многообразие \mathbb{R}^{2N} . Пусть в механической системе одна точка $\mathbf{r}_k = (x_k, y_k)$ движется по направляющей, заданной уравнением $f_k(\mathbf{r}_k) = 0$. Предполагается, что при движении точки \mathbf{r}_k по направляющей на нее действует сила трения скольжения по закону Амонтона — Кулона. Рассматривается случай движения системы с ненулевой скоростью в окрестности некоторой точки конфигурационного пространства, поэтому уравнения для силы трения покоя не формулируются.

Сила трения скольжения \mathbf{F}_k для движущейся с ненулевой скоростью точки \mathbf{r}_k направлена противоположно вектору скорости \mathbf{v}_k этой точки. Модуль силы трения скольжения пропорционален силе реакции опоры \mathbf{N} с коэффициентом пропорциональности μ . Сила нормальной реакции опоры определяется выражением $\mathbf{N} = \lambda_k \nabla f_k$, где ∇f — градиент функции f . Тогда

$$\mathbf{F}_k = -\mu \frac{\mathbf{v}_k}{|\mathbf{v}_k|} |\mathbf{N}| = -\mu \mathbf{e}_k |\lambda_k| |\nabla f_k|. \quad (1)$$

Вектор $\mathbf{e}_k = \mathbf{v}_k / |\mathbf{v}_k|$ в формуле (1) соответствует направлению движения точки с номером k . Вектор силы трения \mathbf{F} в пространстве \mathbb{R}^{2N} имеет следующий вид:

$$\mathbf{F} = |\lambda_k| (0, 0, \dots, -\mu \mathbf{e}_k |\nabla f_k|, \dots, 0)^T.$$

Верхний индекс T соответствует транспонированию вектора или матрицы. По умолчанию далее векторы рассматриваются как векторы-столбцы.

Уравнения движения системы материальных точек с голономными связями $f_1(\mathbf{r}) = 0, \dots, f_{N-1}(\mathbf{r}) = 0$ можно записать как уравнения Лагранжа первого рода в декартовых координатах \mathbb{R}^{2N} :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{G} + \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i \nabla f_i + |\lambda_k| \mathbf{F}, \quad (2)$$

где \mathbf{M} — матрица масс; $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)^T = (x_1, y_1, x_2, \dots, y_N)^T$ — вектор изображающей точки; \mathbf{G} соответствует приложенным внешним силам, отличным от силы

трения. Для получения замкнутой системы уравнений к системе (2) необходимо добавить уравнения связей.

2.2. Обобщенные координаты. Пусть задана параметризация $\mathbf{r} = X(\mathbf{q})$ конфигурационного пространства механической системы. Переход от уравнений Лагранжа первого рода в декартовых координатах $\mathbf{r} = (x_1, y_1, x_2, \dots, y_N)^T$ для изображающей точки к уравнениям Лагранжа с неопределенными множителями в обобщенных координатах $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_m)^T$ формально осуществляется умножением системы уравнений (2) на векторы частных производных $\partial\mathbf{r}/\partial q_i$ [9, гл. 5]. При этом градиенты связей в декартовых координатах перейдут в градиенты связей в обобщенных координатах:

$$\nabla f \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial f}{\partial q_i}.$$

Скорость в декартовых координатах выражается через скорость в обобщенных координатах с помощью дифференциала DX отображения X :

$$\dot{\mathbf{r}} = (DX)(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}; \quad DX = \{\partial r_i / \partial q_k\}_{i=1,2N}^{k=1,m}.$$

Компоненты Q_i обобщенной силы трения:

$$Q_i = \mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}$$

можно объединить в один общий вектор:

$$\mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_m)^T = (DX)^T \mathbf{F} := |\lambda_k| \mathbf{W}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \quad (3)$$

Далее для анализа силы трения достаточно рассмотреть представление $\mathbf{Q} = |\lambda_k| \mathbf{W}$ в формуле (3). Так как функция \mathbf{F} линейно зависит от вектора скорости $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$, то функция \mathbf{W} линейно зависит от $\dot{\mathbf{q}}$. При смене направления движения с $\dot{\mathbf{q}}$ на $-\dot{\mathbf{q}}$ функция \mathbf{W} перейдет в $-\mathbf{W}$. Это свойство будет применяться далее при анализе множителей Лагранжа вблизи особых точек конфигурационного пространства.

Предполагается, что градиенты связей ∇f_k в декартовых координатах не обращаются в ноль на конфигурационном пространстве механической системы. Тогда функции $|\nabla f_k|$ являются гладкими. Следовательно, функция $\mathbf{W} = (W_1, \dots, W_m)^T$ в уравнении (3) является гладкой.

2.3. Двумерная система. Пусть существуют две обобщенные координаты $\mathbf{q} = (q_1, q_2)^T$, которые параметризуют конфигурационное пространство механической системы. Также предположим, что в координатах \mathbf{q} остается только одно уравнение голономной связи $f_1(\mathbf{q}) = 0$, а голономные связи $f_2(\mathbf{q}) = 0, \dots, f_{N-1}(\mathbf{q}) = 0$ выполняются в силу введенных координат \mathbf{q} . Предполагается, что связи $f_2(\mathbf{q}), \dots, f_{N-1}(\mathbf{q})$ являются независимыми. Данный тип координат позволяет свести исследование сил реакции нескольких связей к исследованию силы реакции одной связи. Можно получить явные выражения для множителей Лагранжа, которые соответствуют связи $f_1(\mathbf{q}) = 0$. Пусть особой точке \mathbf{r}_* в декартовых координатах соответствует точка \mathbf{q}_* (прообраз \mathbf{r}_*) в обобщенных координатах.

Предложение 1. Пусть векторы $\nabla f_2(\mathbf{r}_*), \dots, \nabla f_{N-1}(\mathbf{r}_*)$ — линейно независимые, а все векторы $\nabla f_1(\mathbf{r}_*), \dots, \nabla f_{N-1}(\mathbf{r}_*)$ являются линейно зависимыми. Тогда

градиент связи $f_1(\mathbf{q})$ равен нулю в точке \mathbf{q}_* , которая соответствует особой точке \mathbf{r}_* в декартовых координатах \mathbb{R}^{2N} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим градиенты связей в точке \mathbf{r}_* :

$$\nabla f_1(\mathbf{r}_*), \nabla f_2(\mathbf{r}_*), \dots, \nabla f_{N-1}(\mathbf{r}_*).$$

По условию векторы $\nabla f_2(\mathbf{r}_*), \dots, \nabla f_{N-1}(\mathbf{r}_*)$ являются линейно независимыми, поэтому вектор $\nabla f_1(\mathbf{r}_*)$ выражается как линейная комбинация этих векторов. Значит, существуют такие числа $c_i \in \mathbb{R}$, что

$$\nabla f_1(\mathbf{r}_*) = \sum_{i=2}^{N-1} c_i \nabla f_i(\mathbf{r}_*).$$

Тогда для обобщенных координат q_i , где $i = 1, 2$, выполняется условие

$$\frac{\partial f_1}{\partial q_i}(\mathbf{q}_*) = \nabla f_1(\mathbf{r}_*) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}(\mathbf{q}_*) = \left(\sum_{i=2}^{N-1} c_i \nabla f_i(\mathbf{r}_*) \right) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}(\mathbf{q}_*) = \sum_{i=2}^{N-1} c_i \left(\nabla f_i(\mathbf{r}_*) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}(\mathbf{q}_*) \right) = 0,$$

так как градиенты $\nabla f_2, \dots, \nabla f_{N-1}$ ортогональны виртуальным перемещениям (касательным векторам) $\partial \mathbf{r} / \partial q_i$. \square

Движение механической системы в обобщенных координатах $\mathbf{q} = (q_1, q_2)^T$ с одной голономной связью $f_1(\mathbf{q}) = 0$ можно записать в матричном виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \lambda \nabla f_1(\mathbf{q}) + |\lambda| \mathbf{W}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}); \\ \nabla f_1^T \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T f_1'' \dot{\mathbf{q}} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

В формуле (4) обозначение f_1'' соответствует матрице вторых производных (гессиану) функции f_1 . Матрица \mathbf{A} есть матрица кинетической энергии механической системы в обобщенных координатах. Вектор \mathbf{B} зависит от обобщенных координат и скоростей. Предполагается, что матрица \mathbf{A} всюду является невырожденной и положительно определенной. Второе уравнение системы (4) получается при дифференцировании уравнения связи $f_1(\mathbf{q}) = 0$ дважды по времени. Предполагается, что точка \mathbf{q}_* является особой, поэтому $\nabla f_1(\mathbf{q}_*) = 0$.

После выражения $\ddot{\mathbf{q}}$ из первого уравнения (4) и подстановки во второе уравнение получаем

$$-\nabla f_1^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} + |\lambda| (\nabla f_1^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{W}) + \lambda (\nabla f_1^T \mathbf{A}^{-1} \nabla f_1) + \dot{\mathbf{q}}^T f_1'' \dot{\mathbf{q}} = 0. \quad (5)$$

Если не учитывается сила трения, то в (5) одно слагаемое равно нулю, поэтому формула для множителей Лагранжа упрощается:

$$-\nabla f_1^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} + \lambda (\nabla f_1^T \mathbf{A}^{-1} \nabla f_1) + \dot{\mathbf{q}}^T f_1'' \dot{\mathbf{q}} = 0. \quad (6)$$

В общем случае выражение (5) дает два значения для множителя λ , которые зависят от знака λ . Раскрытие модуля в (5) при значениях λ больше или меньше нуля будем обозначать как λ_+ и λ_- соответственно:

$$\lambda_{\pm} = \frac{\nabla f_1^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} - \dot{\mathbf{q}}^T f_1'' \dot{\mathbf{q}}}{\nabla f_1^T \mathbf{A}^{-1} \nabla f_1 + \nabla f_1^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{W}}, \quad \text{если } \lambda \geq 0;$$

$$\lambda_- = \frac{\nabla f_1^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} - \dot{\mathbf{q}}^T f_1'' \dot{\mathbf{q}}}{\nabla f_1^T \mathbf{A}^{-1} \nabla f_1 - \nabla f_1^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{W}}, \quad \text{если } \lambda < 0. \quad (7)$$

В дальнейшем анализе силы трения рассматриваются выражения вида (7).

Замечание 1. Уравнение (5) для определения λ может быть записано как

$$a\lambda + b|\lambda| = c, \quad (8)$$

где $a = \nabla f_1^T \mathbf{A}^{-1} \nabla f_1$; $b = \nabla f_1^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{W}$ и $c = \nabla f_1^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} - \dot{\mathbf{q}}^T f_1'' \dot{\mathbf{q}}$. Функция $y = a\lambda + b|\lambda|$ имеет угловой коэффициент $a + b$ при значениях $\lambda \geq 0$ и угловой коэффициент $a - b$ при значениях $\lambda < 0$. Из свойств модуля следует, что при $(a - b)(a + b) > 0$ функция $y = a\lambda + b|\lambda|$ монотонно возрастает или монотонно убывает, поэтому для любого параметра c существует единственное решение (8). Если $(a - b)(a + b) < 0$, то график $y = a\lambda + b|\lambda|$ является «углом». Решений (8) при $c \neq 0$ в этом случае или нет, или два. Если коэффициенты a и b равны нулю, то значение λ в уравнении (8) может быть произвольным. В особой точке $\nabla f_1 = 0$ по предложению 1, поэтому $a = b = 0$ и значение множителя Лагранжа в особой точке не определено.

Замечание 2. В силу положительной определенности матрицы кинетической энергии \mathbf{A} обратная матрица \mathbf{A}^{-1} также положительно определена. Следовательно, квадратичная форма $\nabla f^T \mathbf{A}^{-1} \nabla f$ ограничена максимальным λ_{\max} и минимальным λ_{\min} собственным числом матрицы \mathbf{A}^{-1} на единичной сфере:

$$\lambda_{\min} |\nabla f|^2 \leq \nabla f^T \mathbf{A}^{-1} \nabla f \leq \lambda_{\max} |\nabla f|^2.$$

Величина $\nabla f^T \mathbf{A}^{-1} \nabla f$ имеет порядок $O(|\nabla f|^2)$ при $\nabla f \rightarrow 0$.

Далее индекс «1» у связи f_1 опускается. Рассматривается только одна связь, которая зависит от параметра.

2.4. Малое возмущение связи. Рассмотрим двумерную механическую систему с обобщенными координатами $\mathbf{q} = (q_1, q_2)^T$ и одной голономной связью $f(\mathbf{q}) = 0$. Пусть λ обозначает множитель Лагранжа, который соответствует реакции связи $f(\mathbf{r}) = 0$ в декартовых координатах. Предполагается, что множитель Лагранжа для связи $f(\mathbf{r}) = 0$ равен множителю Лагранжа для связи $f(\mathbf{q}) = 0$. Также пусть уравнение связи $f(\mathbf{q}) = 0$ имеет особенность в точке \mathbf{s} , в которой градиент связи обращается в ноль. Движение механических систем с особенностями конфигурационного пространства не описывается классической механикой.

В данной работе исследуется случай систем, параметры которых близки к критическим значениям. Это позволяет формально применить методы классической механики. Рассматривается множество динамических систем, в которых связь $f(\mathbf{q}) = 0$ заменяется на возмущенную связь вида $f(\mathbf{q}) = \varepsilon$. Возмущенная связь при заданном $\varepsilon > 0$ определяет одномерное конфигурационное пространство без геометрических особенностей. Особенность возникает только при $\varepsilon = 0$.

Для динамической системы с возмущенной связью $f(\mathbf{q}) = \varepsilon$ конфигурационное пространство является объединением конечного числа p одномерных многообразий $M_{\varepsilon, i}$, $i = 1, \dots, p$. Для одного многообразия $M_{\varepsilon, i}$ рассматривается некоторая точка $\mathbf{s}_{\varepsilon, i} \in M_{\varepsilon, i}$, такая, что $\mathbf{s}_{\varepsilon, i} \rightarrow \mathbf{s}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. При этом остальные точки на многообразии $M_{\varepsilon, i}$ не переходят в особую точку \mathbf{s} при $\varepsilon \rightarrow 0$. В этом случае интерес представляет поведение сил реакций и множителей Лагранжа в точках $(\mathbf{s}_{\varepsilon, i}, \dot{\mathbf{s}}_{\varepsilon, i})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Для остальных точек в пределе получается движение по одномерным многообразиям, поэтому для них применима классическая динамика. В частности, предельные значения для сил реакции будут ограниченными. Далее будет рассматриваться выделенное одномерное многообразие $M_{\varepsilon,i}$, поэтому индекс i опускается.

В точке \mathbf{s}_ε задается вектор скорости $\dot{\mathbf{s}}_\varepsilon$ некоторой заданной величины $|\dot{\mathbf{s}}_\varepsilon|$. Если на механическую систему действуют только консервативные и диссипативные силы, то модуль $|\dot{\mathbf{s}}_\varepsilon|$ в окрестности точки \mathbf{s} ограничен начальным значением механической энергии системы. Направление вектора $\dot{\mathbf{s}}_\varepsilon$ определено с точностью до знака в силу одномерности конфигурационного пространства, заданного уравнением $f(q_1, q_2) = \varepsilon$. Рассматривается динамика множителей Лагранжа $\lambda(\mathbf{s}_\varepsilon, \dot{\mathbf{s}}_\varepsilon)$ для множества динамических систем с параметром $\varepsilon \rightarrow 0$.

Основной интерес представляет следующий вопрос: являются ли множители Лагранжа $\lambda(\mathbf{s}_\varepsilon, \dot{\mathbf{s}}_\varepsilon)$ ограниченными при $\varepsilon \rightarrow 0$? Если множители Лагранжа являются неограниченными, то силы реакции становятся неограниченными и в декартовых координатах, так как предполагается соответствие множителей Лагранжа для декартовых и обобщенных координат. В этом случае возникает вопрос о применимости теоретической модели для описания динамики. Если учитывается сила трения, то в точках $(\mathbf{s}_\varepsilon, \dot{\mathbf{s}}_\varepsilon)$ может возникать «удар трением» при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Замечание 3. Рассматриваемое возмущение связи $f(\mathbf{q}) = \varepsilon$ является заданным и определяется только связью $f(\mathbf{q})$. Явный вид возмущения позволяет получить качественное поведение сил реакции и множителей Лагранжа. Вопрос о поведении множителей Лагранжа $\lambda(\mathbf{s}_\varepsilon, \dot{\mathbf{s}}_\varepsilon)$ для возмущения общего вида представляет интерес для дальнейших исследований.

В следующих разделах рассматривается поведение сил реакции и сил трения скольжения для двумерных систем с одной голономной связью. В разделе 3 анализируется особенность конфигурационного пространства типа пересечения двух прямых на плоскости. В разделе 4 рассматривается особенность типа касания 1-го порядка двух кривых на плоскости.

3. Особенность типа пересечения. В этом разделе рассматривается модельный случай, когда уравнение связи задает объединение двух прямых на плоскости с одной общей точкой. Конфигурационное пространство и возмущения одной из ветвей движения в конфигурационном пространстве показаны на рисунке, *a*. Основные свойства сил реакции и сил трения для системы (4) приведены в следующей теореме.

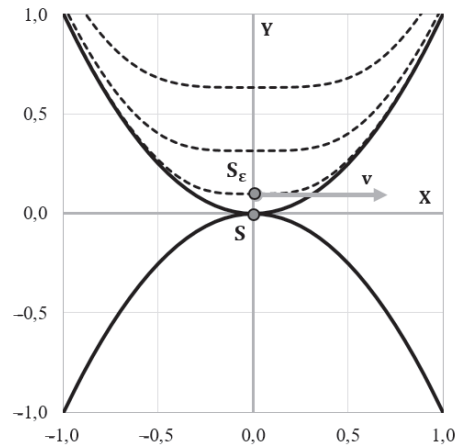
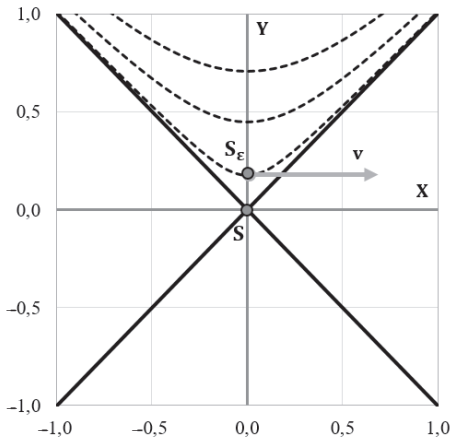
Теорема 1. *Рассматривается механическая система с обобщенными координатами $\mathbf{q}^T = (x, y)$ и голономной связью $f(\mathbf{q}) = 0$. Особой точке $\mathbf{q}_* = \mathbf{s}$ конфигурационного пространства $f(x, y) = 0$ соответствуют координаты $(0, 0)^T$. Пусть динамика системы описывается уравнениями (4) для следующей связи $f_1 = f$:*

$$f = (y - x)(y + x) = y^2 - x^2 = 0. \quad (9)$$

Для возмущенной связи $f(x, y) = \varepsilon$ при $\varepsilon \neq 0$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ рассматривается движение по одной из гладких ветвей. Выполняются следующие свойства:

1. *Без учета силы трения множитель Лагранжа $\lambda(\mathbf{s}_\varepsilon, \dot{\mathbf{s}}_\varepsilon)$ становится неограниченным вблизи точки $(0, 0)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.*

2. *С учетом силы трения возможно несколько вариантов. Если $\varepsilon > 0$ и вектор $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{W}(\mathbf{s})$ имеет ненулевую y -координату, то выражение (7) для множителя Лагранжа $\lambda(\mathbf{s}_\varepsilon, \dot{\mathbf{s}}_\varepsilon)$ (без проверки знаков) становится неограниченным при $\varepsilon \rightarrow 0+$.*



Последовательность ветвей движения для особенности типа пересечения (а) и касания 1-го порядка (б) двух кривых на плоскости.

Если $\varepsilon < 0$ и вектор $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{W}(\mathbf{s})$ имеет ненулевую x -координату, то множитель Лагранжа $\lambda(\mathbf{s}_\varepsilon, \dot{\mathbf{s}}_\varepsilon)$ становится неограниченным при $\varepsilon \rightarrow 0^-$.

3. Если выполняются условия пункта 2 теоремы 1, то при движении системы в одном направлении от точки \mathbf{s}_ε есть два решения для множителей Лагранжа. При движении в другом направлении от точки \mathbf{s}_ε решений нет. Если решение системы (7) существует, то множители Лагранжа возрастают со скоростью, обратно пропорциональной расстоянию от \mathbf{s}_ε до \mathbf{s} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение связи $f(x, y) = 0$ в (9) задает множество, которое является объединением двух прямых: $y = x$ и $y = -x$ (особенность типа пересечения). Особая точка \mathbf{s} имеет координаты $(0, 0)$ и геометрически является точкой пересечения этих прямых. Уравнение возмущенной связи $f(x, y) = \varepsilon$ задает гиперболу, ветви которой по-разному расположены при $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon < 0$. \square

При $\varepsilon > 0$ есть две ветви гиперболы (см. рисунок, а):

$$y = \pm\sqrt{x^2 + \varepsilon}.$$

Без ограничения общности выберем ветвь с положительным знаком перед корнем. На минимальном расстоянии от точки $\mathbf{s}(0, 0)$ находится точка ветви гиперболы $\mathbf{s}_\varepsilon = (0, \sqrt{\varepsilon})^T$. Заметим, что $\mathbf{s}_\varepsilon \rightarrow \mathbf{s}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а другие точки ветви не переходят в точку \mathbf{s} при $\varepsilon \rightarrow 0$. Градиент и матрица вторых производных функции f в точке \mathbf{s}_ε находятся прямым вычислением:

$$\nabla f(\mathbf{s}_\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{\varepsilon} \end{pmatrix}; \quad f''(\mathbf{s}_\varepsilon) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

В точке \mathbf{s}_ε вектор скорости кривой на рассматриваемой ветви гиперболы параллелен оси Ox и имеет вид $\dot{\mathbf{s}}_\varepsilon = (v, 0)^T$, где $v \in \mathbb{R}$. Для этого вектора скорости величина

$$\dot{\mathbf{s}}_\varepsilon^T f'' \dot{\mathbf{s}}_\varepsilon = -2v^2$$

является ненулевой при $\dot{\mathbf{s}}_\varepsilon \neq 0$ и не зависит от параметра возмущения ε . Предполагается, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ величина $|\dot{\mathbf{s}}_\varepsilon|$ является константой.

Сначала рассмотрим случай без трения. Предположим, что существует константа C , такая что $|\lambda| < C$ в некоторой замкнутой окрестности точки $(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}})$, но равенство (5) выполняется. Тогда в уравнении (5) слагаемые

$$-\nabla f^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}; \quad |\lambda|(\nabla f^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{W}); \quad \lambda(\nabla f^T \mathbf{A}^{-1} \nabla f)$$

стремятся к нулю при подходе к особенности, так как $\nabla f \rightarrow 0$ при $\mathbf{s}_\varepsilon \rightarrow \mathbf{s}$. Поэтому значение выражения (5) в точке $(\mathbf{s}_\varepsilon, \dot{\mathbf{s}}_\varepsilon)$ равно не 0, а $-2v^2$. Получили противоречие. Значит, при $\dot{\mathbf{s}}_\varepsilon(0) \neq 0$ множитель Лагранжа $\lambda(\mathbf{s}_\varepsilon, \dot{\mathbf{s}}_\varepsilon)$ должен быть неограниченной функцией параметра ε .

Перейдем к случаю с трением. Заметим, что величина $\sqrt{\varepsilon}$ равна расстоянию от точки \mathbf{s}_ε до точки \mathbf{s} . Матрица \mathbf{A}^{-1} и векторы \mathbf{B} и \mathbf{W} являются гладкими функциями переменных (x, y) , поэтому они также являются гладкими функциями переменной $\sqrt{\varepsilon} = y, y \geq 0$. Введем обозначения для следующих функций, которые заданы в точках $\mathbf{s}_\varepsilon = (0, \sqrt{\varepsilon})$ на оси Oy :

$$\begin{aligned} g_1(\sqrt{\varepsilon}) &:= (\mathbf{A}^{-1})_{(2,2)}(\mathbf{s}_\varepsilon); & g_2(\sqrt{\varepsilon}) &:= (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})_{[y]}(\mathbf{s}_\varepsilon); \\ g_3(\sqrt{\varepsilon}) &:= (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{W})_{[y]}(\mathbf{s}_\varepsilon); & g_4(\sqrt{\varepsilon}) &:= \dot{\mathbf{s}}_\varepsilon^T f'' \dot{\mathbf{s}}_\varepsilon. \end{aligned} \quad (11)$$

Нижний индекс $[y]$ соответствует y -координате вектора. Функцию g_4 можно считать постоянной, если вблизи особой точки \mathbf{s} рассматривается вектор скорости постоянной величины $|\dot{\mathbf{s}}_\varepsilon|$. Функции g_1, g_2, g_3, g_4 являются гладкими функциями $\sqrt{\varepsilon}$. Для особенности типа пересечения прямых из (10) следует, что для точек \mathbf{s}_ε выполняется условие

$$\nabla f^T \mathbf{A}^{-1} \nabla f = 4\varepsilon g_1; \quad \nabla f^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} = 2\sqrt{\varepsilon} g_2; \quad \nabla f^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{W} = 2\sqrt{\varepsilon} g_3. \quad (12)$$

Пусть вектор $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{W}(\mathbf{s})$ имеет ненулевую y -координату. Тогда по определениям (11) будет $g_3(0) \neq 0$.

Сначала рассмотрим выражения (7) для множителей Лагранжа λ_\pm как некоторые формальные функции от $\sqrt{\varepsilon}$, без проверки согласованности знаков:

$$\lambda_\pm(\mathbf{s}_\varepsilon, \dot{\mathbf{s}}_\varepsilon) = \frac{2\sqrt{\varepsilon} g_2 - g_4}{4\varepsilon g_1 \pm 2\sqrt{\varepsilon} g_3} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \frac{-g_4 + 2\sqrt{\varepsilon} g_2}{\pm 2g_3 - 4\sqrt{\varepsilon} g_1} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (13)$$

Формально множитель Лагранжа $\lambda(\mathbf{s}_\varepsilon, \dot{\mathbf{s}}_\varepsilon)$ возрастает со скоростью, обратно пропорциональной расстоянию $\sqrt{\varepsilon}$ от точки \mathbf{s}_ε до точки \mathbf{s} .

Для разрешимости уравнения (7) необходимо, чтобы выражение для λ_\pm имело, соответственно, положительный или отрицательный знак. Заметим, что при $\varepsilon \rightarrow 0+$ выражение (13) для $\lambda_\pm(\mathbf{s}_\varepsilon, \dot{\mathbf{s}}_\varepsilon)$ имеет следующий знак:

$$\text{sign} \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \frac{-g_4 + 2\sqrt{\varepsilon} g_2}{\pm 2g_3 - 4\sqrt{\varepsilon} g_1} \right) = \mp \text{sign} \left(\frac{g_4(0)}{g_3(0)} \right), \quad \varepsilon \rightarrow 0+.$$

Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0+$ знак для $\lambda_\pm(\mathbf{s}_\varepsilon, \dot{\mathbf{s}}_\varepsilon)$ в формуле (13) должен совпадать со знаком выражения $\mp g_4(0)/g_3(0)$. Так как функция $g_4 = -2v^2$ отрицательна (при ненулевой скорости вблизи особенности), то знак $\lambda_\pm(\mathbf{s}_\varepsilon, \dot{\mathbf{s}}_\varepsilon)$ должен совпадать со знаком $\pm g_3(0)$. Если $g_3(0) > 0$, то знаки согласованы. Поэтому есть два возможных множителя

Лагранжа. Если $g_3(0) < 0$, то знаки $\lambda_{\pm}(\mathbf{s}_{\varepsilon}, \dot{\mathbf{s}}_{\varepsilon})$ и $\pm g_3(0)$ не согласуются, у системы (7) нет решений.

Из построения вектора \mathbf{W} следует, что знак $g_3(0)$ зависит от направления движения: при смене направления движения вектор \mathbf{W} меняется на вектор $-\mathbf{W}$.

Случай $\varepsilon < 0$, $\varepsilon \rightarrow 0-$ получается аналогично для ветви: $x = \pm\sqrt{y^2 - \varepsilon}$. \square

Следствие 1. Если решение (7) существует в окрестности особой точки, то при малом возмущении особенности типа пересечения двух прямых силы реакции и силы трения для связи $f(\mathbf{q}) = \varepsilon$ неограниченно возрастают в обобщенных и декартовых координатах. Если градиенты связей в декартовых координатах являются ненулевыми в особых точках, то в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ возникают бесконечные силы реакции и «удар трением».

4. Особенность типа касания первого порядка. В этом разделе рассматривается модельный случай, когда уравнение связи задает две касающиеся кривые с одной общей точкой. Кривые представляются как две параболы, которые расположены симметрично относительно оси Ox . Одна парабола и ее возмущение показаны на рисунке, б. Основные свойства сил реакции и сил трения для системы (4) приведены в теореме 2. Поведение множителей Лагранжа для особенности типа касания зависит от знака ε , в то время как случай пересекающихся кривых является «симметричным».

Теорема 2. Рассматривается механическая система с обобщенными координатами $\mathbf{q}^T = (x, y)$ и голономной связью $f(\mathbf{q}) = 0$. Особой точке $\mathbf{q}_* = \mathbf{s}$ конфигурационного пространства $f(x, y) = 0$ соответствуют координаты $(0, 0)^T$. Пусть динамика системы описывается уравнениями (4) для следующей связи $f_1 = f$:

$$f = (y - x^2)(y + x^2) = y^2 - x^4 = 0. \quad (14)$$

Для возмущенной связи $f(x, y) = \varepsilon$ при $\varepsilon \neq 0$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ рассматривается движение по одной из гладких ветвей в конфигурационном пространстве. Тогда при $|\dot{\mathbf{s}}_{\varepsilon}| \geq \text{const} > 0$ выполняются свойства:

1. Пусть $\varepsilon > 0$. Без учета силы трения при $(\mathbf{A}^{-1})_{(2,2)}(\mathbf{s}) \neq 0$ и $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{W}(\mathbf{s}))_{[y]} \neq 0$ множители Лагранжа являются неограниченными и возрастают со скоростью, обратно пропорциональной расстоянию от \mathbf{s}_{ε} до \mathbf{s} .

2. Пусть $\varepsilon > 0$. Если вектор $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{W}(\mathbf{s}))$ имеет ненулевую y -координату и решение (7) существует, то множители Лагранжа $\lambda(\mathbf{s}_{\varepsilon}, \dot{\mathbf{s}}_{\varepsilon})$ являются ограниченными при $\varepsilon \rightarrow 0+$.

3. Пусть $\varepsilon < 0$. Без учета силы трения множители Лагранжа $\lambda(\mathbf{s}_{\varepsilon}, \dot{\mathbf{s}}_{\varepsilon})$ являются неограниченными при $\varepsilon \rightarrow 0-$. Если учитывается сила трения и решение (7) существует, то множители Лагранжа $\lambda(\mathbf{s}_{\varepsilon}, \dot{\mathbf{s}}_{\varepsilon})$ являются неограниченными при $\varepsilon \rightarrow 0-$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Особой точкой конфигурационного пространства, которое задается уравнением связи $f(x, y) = 0$, является точка $\mathbf{s} = (0, 0)^T$. Рассмотрим возмущенную связь:

$$f = y^2 - x^4 = \varepsilon.$$

При $\varepsilon > 0$ получаем две ветви:

$$y = \pm\sqrt{x^4 + \varepsilon}. \quad (15)$$

Рассмотрим ветвь с положительным знаком перед корнем. Наиболее близкой к особой точке \mathbf{s} является точка $\mathbf{s}_\varepsilon = (0, \sqrt{\varepsilon})^T$ на этой ветви. Заметим, что $\mathbf{s}_\varepsilon \rightarrow \mathbf{s}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а другие точки ветви не переходят в особую точку \mathbf{s} при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Значения градиента и матрицы вторых производных в точке \mathbf{s}_ε для связи (14) получаются прямым вычислением:

$$\nabla f(\mathbf{s}_\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{\varepsilon} \end{pmatrix}; \quad f''(\mathbf{s}_\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Вектор скорости кривой на положительной ветви (15) в точке \mathbf{s}_ε параллелен оси Ox и имеет направление $\dot{\mathbf{s}}_\varepsilon = (v, 0)$, где $v \in \mathbb{R}$. Поэтому величина $\dot{\mathbf{q}}^T f'' \dot{\mathbf{q}} = 0$. Применим обозначения (11) из предыдущего раздела. Из явных выражений (16) для градиента и гессиана связи f получаем

$$\begin{aligned} (\nabla f^T \mathbf{A}^{-1} \nabla f)(\mathbf{s}_\varepsilon) &:= 4\varepsilon \cdot g_1(\sqrt{\varepsilon}); & (\nabla f^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})(\mathbf{s}_\varepsilon) &:= 2\sqrt{\varepsilon} \cdot g_2(\sqrt{\varepsilon}); \\ (\nabla f^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{W})(\mathbf{s}_\varepsilon) &:= 2\sqrt{\varepsilon} \cdot g_3(\sqrt{\varepsilon}); & (\dot{\mathbf{q}}^T f'' \dot{\mathbf{q}})(\mathbf{s}_\varepsilon, \dot{\mathbf{s}}_\varepsilon) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Сначала рассмотрим случай без учета силы трения. Тогда при $g_1(0) \neq 0$ и $g_2(0) \neq 0$:

$$\lambda(\mathbf{s}_\varepsilon, \dot{\mathbf{s}}_\varepsilon) = \frac{2\sqrt{\varepsilon}g_2}{4\varepsilon g_1} = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \frac{g_2(0)}{g_1(0)} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right); \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Проверку на знаки множителей Лагранжа без силы трения делать не нужно. Если $g_2(0) = 0$, то множители Лагранжа $\lambda(\mathbf{s}_\varepsilon, \dot{\mathbf{s}}_\varepsilon)$ являются ограниченными.

Теперь рассмотрим случай с учетом силы трения. По предположению (2) теоремы $g_3(0) \neq 0$ и выражение (7) для множителя Лагранжа в общем случае можно записать в следующем виде с обозначениями (17):

$$\lambda_{\pm}(\mathbf{s}_\varepsilon, \dot{\mathbf{s}}_\varepsilon) = \frac{2\sqrt{\varepsilon}g_2}{4\varepsilon g_1 \pm 2\sqrt{\varepsilon}g_3} \approx \pm \frac{g_2(0)}{g_3(0)}, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Следовательно, при $g_3(0) = (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{W}(\mathbf{s}))_{[y]} \neq 0$ множитель Лагранжа λ_{\pm} является ограниченным. Для существования решения (7) необходимо, чтобы знак $\pm g_2(0)/g_3(0)$ совпадал со знаком λ_{\pm} . Знаки функций g_2 и g_3 зависят от направления движения механической системы. При смене направления движения на противоположное вектор \mathbf{W} переходит в $-\mathbf{W}$, поэтому меняется знак $g_3(0)$. Функция \mathbf{B} может более сложным образом зависеть от скорости $\dot{\mathbf{q}}$.

При $\varepsilon < 0$ получаются другие две ветви:

$$x = \pm \sqrt[4]{y^2 - \varepsilon}. \quad (18)$$

Без ограничения общности рассмотрим ветвь с положительным знаком перед корнем в (18). Наиболее близкой к особой точке \mathbf{s} является точка $\mathbf{s}_\varepsilon = (\sqrt[4]{-\varepsilon}, 0)^T$ на этой ветви. Значение $\sqrt[4]{-\varepsilon}$ корректно определено при $\varepsilon < 0$.

Градиент и матрица вторых производных в точке \mathbf{s}_ε для связи (14) получаются прямым вычислением:

$$\nabla f(\mathbf{s}_\varepsilon) = \begin{pmatrix} -4(-\varepsilon)^{3/4} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad f''(\mathbf{s}_\varepsilon) = \begin{pmatrix} -12(-\varepsilon)^{1/2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Вектор скорости кривой на положительной ветви (18) в точке \mathbf{s}_ε параллелен оси Oy и имеет направление $\dot{\mathbf{s}}_\varepsilon = (0, v)$, где $v \in \mathbb{R}$. Поэтому величина $\dot{\mathbf{q}}^T f'' \dot{\mathbf{q}} = 2v^2$. Применим обозначения g_1, \dots, g_4 , аналогичные обозначениям (11) из предыдущего раздела. Из явных выражений (19) для градиента и гессиана связи f получаем

$$\begin{aligned} (\nabla f^T \mathbf{A}^{-1} \nabla f)(\mathbf{s}_\varepsilon) &:= 16(-\varepsilon)^{3/2} \cdot g_1(\sqrt{\varepsilon}); \\ (\nabla f^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})(\mathbf{s}_\varepsilon) &:= -4(-\varepsilon)^{3/4} \cdot g_2(\sqrt{\varepsilon}); \\ (\nabla f^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{W})(\mathbf{s}_\varepsilon) &:= -4(-\varepsilon)^{3/4} \cdot g_3(\sqrt{\varepsilon}); \quad (\dot{\mathbf{q}}^T f'' \dot{\mathbf{q}})(\mathbf{s}_\varepsilon, \dot{\mathbf{s}}_\varepsilon) = 2v^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Тогда для обозначений (20) получаем следующие формальные выражения для множителей Лагранжа с учетом силы трения (без проверки согласованности знаков):

$$\lambda_\pm(\mathbf{s}_\varepsilon, \dot{\mathbf{s}}_\varepsilon) = \frac{-4(-\varepsilon)^{3/4} \cdot g_2 + 2v^2}{16(-\varepsilon)^{3/2} \cdot g_1(\sqrt{\varepsilon}) \mp 4(-\varepsilon)^{3/4} \cdot g_3(\sqrt{\varepsilon})} \approx \frac{2v^2}{0}, \quad \varepsilon \rightarrow 0 -.$$

Следовательно, при $\varepsilon < 0$ множитель Лагранжа λ_\pm неограниченно возрастает. Без учета силы трения получается аналогично. \square

5. Замена координат. Для применения теорем 1 и 2 необходимо сделать замену координат, которая должна привести конфигурационное пространство двумерной механической системы с одной голономной связью к «нормальной» форме (9) или (14). Далее описывается вид системы (4) в новой системе координат.

Теорема 3. Пусть есть диффеоморфизм $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, который соответствует замене координат $\mathbf{q} = X(\mathbf{p})$. Тогда система уравнений (4)

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \lambda \nabla_q f(\mathbf{q}) + |\lambda| \mathbf{W}$$

переходит в аналогичную систему

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{p})\ddot{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) = \lambda \nabla_p f(\mathbf{p}) + |\lambda| \tilde{\mathbf{W}}, \quad (21)$$

где соответствующие функции в новой системе координат

$$\tilde{\mathbf{A}} = (DX)^T \mathbf{A}(DX); \quad \tilde{\mathbf{B}} = (DX)^T (\mathbf{B} + \mathbf{A}(DX\dot{\mathbf{p}})'_p \dot{\mathbf{p}}); \quad \tilde{\mathbf{W}} = (DX)^T \mathbf{W}$$

вычислены в точках $\mathbf{q} = X(\mathbf{p})$, $\dot{\mathbf{q}} = DX(\mathbf{p})\dot{\mathbf{p}}$.

Доказательство. При замене координат получаются следующие соотношения:

$$\mathbf{q} = X(\mathbf{p}); \quad \dot{\mathbf{q}} = DX(\mathbf{p})\dot{\mathbf{p}}; \quad \ddot{\mathbf{q}} = DX(\mathbf{p})\ddot{\mathbf{p}} + (DX(\mathbf{p})\dot{\mathbf{p}})'_p \dot{\mathbf{p}}.$$

Последнее равенство является дифференцированием сложной функции $DX(\mathbf{p})\dot{\mathbf{p}}$ от аргументов $(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}})$. Сначала берется производная по $\dot{\mathbf{p}}$, потом по \mathbf{p} . Выпишем формулы для преобразования скоростей $\dot{\mathbf{q}}$ и градиента некоторой функции $f(\mathbf{q})$ для замены $q_1 = X_1(p_1, p_2)$, $q_2 = X_2(p_1, p_2)$:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial p_1} & \frac{\partial X_1}{\partial p_2} \\ \frac{\partial X_2}{\partial p_1} & \frac{\partial X_2}{\partial p_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial p_1} \\ \frac{\partial f}{\partial p_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial p_1} & \frac{\partial X_2}{\partial p_1} \\ \frac{\partial X_1}{\partial p_2} & \frac{\partial X_2}{\partial p_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial q_1} \\ \frac{\partial f}{\partial q_2} \end{pmatrix}$$

В сокращенной записи:

$$\dot{\mathbf{q}} = (DX(\mathbf{p}))\dot{\mathbf{p}}; \quad \nabla_{\mathbf{p}}f(\mathbf{p}) = ((DX)^T(\mathbf{p}))(\nabla_{\mathbf{q}}f(\mathbf{q})).$$

Так как замена переменных $\mathbf{q} = X(\mathbf{p})$ является обратимой, то дифференциал DX невырожден. Поэтому возможно выразить градиент:

$$\nabla_{\mathbf{q}}f(\mathbf{q}) = ((DX)^T(\mathbf{p}))^{-1} \nabla_{\mathbf{p}}f(\mathbf{p}).$$

После замены координат получаем систему

$$\mathbf{A}(DX)\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{B} + \mathbf{A}((DX)\dot{\mathbf{p}})'_p\dot{\mathbf{p}} = \lambda((DX)^T)^{-1}\nabla_{\mathbf{p}}f + |\lambda|\mathbf{W}.$$

Последнее уравнение можно домножить на $(DX)^T$ слева:

$$\underbrace{(DX)^T \mathbf{A}(DX)}_{\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{p})} \ddot{\mathbf{p}} + \underbrace{(DX)^T [\mathbf{B} + \mathbf{A}((DX)\dot{\mathbf{p}})'_p\dot{\mathbf{p}}]}_{\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}})} = \lambda \nabla_{\mathbf{p}}f + |\lambda| \underbrace{(DX)^T \mathbf{W}}_{\tilde{\mathbf{W}}(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}})}.$$

Получили форму уравнений (21). Аналогичное утверждение выполняется и при диффеоморфизме $X : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$. \square

Следствие 2. *Некоторые условия в теоремах 1 и 2 для «нормальной» формы уравнения связи формулируются в терминах координат вектора*

$$(\tilde{\mathbf{A}}^{-1}\tilde{\mathbf{W}})(X(\mathbf{p}_*)).$$

При замене переменных получаем вектор:

$$(\tilde{\mathbf{A}}^{-1}\tilde{\mathbf{W}})(X(\mathbf{p}_*)) = [(DX)^T \mathbf{A}(DX)]^{-1}[(DX)^T \mathbf{W}](\mathbf{q}_*) = [(DX)^{-1} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{W}](\mathbf{q}_*).$$

Матрица масс \mathbf{A} и вектор силы трения \mathbf{W} известны по условию задачи. Если также известен дифференциал DX замены координат, то можно проверить условия теорем 1 и 2 в обобщенных координатах.

6. Заключение. Если голономные связи механической системы являются независимыми, то множители Лагранжа и силы реакции являются ограниченными функциями, в том числе при малом возмущении уравнений связей. Если в конфигурационном пространстве есть особые точки, то при малом возмущении параметров связей множители Лагранжа могут неограниченно возрастать. При этом силы реакции в декартовых координатах также неограниченно возрастают. В статье показано, что для возмущений уравнения связи для особенности типа пересечения двух прямых на плоскости силы реакции системы неограниченно возрастают в окрестности особой точки при стремлении параметра связи к критическому значению. При этом существует два решения для множителей Лагранжа при движении в одном направлении около особой точки, при движении в противоположном направлении нет решений. Для особенности типа касания двух кривых на плоскости возможно несколько вариантов. Для одного типа возмущений конфигурационного пространства при добавлении силы трения множители Лагранжа становятся ограниченными. Для другого типа возмущений множители Лагранжа являются неограниченными. Для анализа исследовались уравнения движения и замены обобщенных координат. Возможно, при неограниченных силах реакции необходимо учитывать дополнительные степени свободы.

Литература

1. Пенлеве П. *Лекции о трении*, пер. с франц. Москва, Гостехиздат (1954).
2. Dupont P. E., Yama-jako S. P. Jamming and wedging in constrained rigid-body dynamics. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and automation*, 2349–2354 (1994). <https://doi.org/10.1109/ROBOT.1994.350935>
3. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. *Математические аспекты классической и небесной механики*. Москва, ВИНТИ (1985).
4. Rubin H., Ungar P. Motion under a strong constraining force. *Communications on pure and applied mathematics* **10**, 65–87 (1957). <https://doi.org/10.1002/CPA.3160100103>
5. Козлов В. В., Нейштадт А. И. О реализации голономных связей в динамике. *Прикладная математика и механика* **54** (5), 858–861 (1990).
6. Takens F. Motion under influence of a strong constraining force. *Global theory of Dynamics Systems*. Heidelberg, Springer-Verlag, 425–445 (1980). <https://doi.org/10.1007/BFb0087006>
7. Mukharlyamov R. G., Deressa C. T. Dynamic equations of controlled Mechanical system with redundant holonomic constraints. *Bulletin of the Technological University* **17** (11), 236–242 (2014).
8. Wojtyra M., Fraczek J. Solvability of reactions in rigid multibody systems with redundant nonholonomic constraints. *Multibody Syst Dyn* **30**, 153–171 (2013). <https://doi.org/10.1007/s11044-013-9352-0>
9. Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П., Товстик П. Е., Солтаханов Ш. Х., Филиппов С. Б., Петрова В. И. *Теоретическая и прикладная механика*. Т. 1. Санкт-Петербург, Изд-во С.-Петербур. ун-та (2022).
10. Закалюкин И. В. Особенности вырождения неголономных связей и управляемость. *Электронный журнал «Труды МАИ»* **39**, 1–18 (2010).
11. Самсонов В. А., Михалев А. А. Перестройка пространства положений механической системы. *Проблемы машиностроения и надежности машин* **4**, 13–16 (2005).
12. Михалев А. А. Особенности бифуркации положений равновесия околочритических механизмов. *Проблемы машиностроения и надежности машин* **6**, 10–14 (2008).
13. Burian S. N., Kalnitsky V. S. On the Motion of One-Dimensional Double Pendulum. *AIP Conference Proceedings* **1959**, Art. no. 030004 (2018). <https://doi.org/10.1063/1.5034584>
14. Бурьян С. Н. Силы реакции сингулярного маятника. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **9** (67), вып. 2, 278–293 (2022). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.209>
15. Бурьян С. Н. Конические особые точки и векторные поля. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **7** (65), вып. 4, 649–661 (2020). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.407>

Статья поступила в редакцию 14 января 2024 г.;
доработана 28 апреля 2024 г.;
рекомендована к печати 23 мая 2024 г.

Контактная информация:

Бурьян Сергей Николаевич — канд. физ.-мат. наук, науч. сотр.;
<https://orcid.org/0000-0002-7795-6735>, burianserg@yandex.ru

Reaction forces and friction forces in the dynamics of systems with geometric singularities

S. N. Burian

State Research Institute of Applied Problems,
29, nab. Obvodnogo kanala, St. Petersburg, 191167, Russian Federation

For citation: Burian S. N. Reaction forces and friction forces in the dynamics of systems with geometric singularities. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 4, pp. 755–771. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.411> (In Russian)

The properties of the holonomic mechanical systems motion with parameters are discussed. For some (critical) parameter values, the configuration space of a mechanical system is

a manifold with singularities. For other parameter values, the configuration space is a smooth manifold. It is assumed that the sliding friction force according to the Amontón—Coulomb model can act upon one of the material points of the mechanical system. When the parameters of a mechanical system differ from critical values, then the classical Lagrange equations could be applied to describe its dynamics. The point of interest is the motion on smooth manifolds near points which transform into singular points as the parameters of the mechanical system tend to critical values. The behavior of reaction forces and Lagrange multipliers for such “pre-singular” points is considered. Two types of configuration spaces with singularities are studied: the union of two intersecting curves in the plane and the union of two tangent curves in the plane. For the first time, various variants of the Lagrange multipliers behavior are shown using the example of a given type of perturbation of configuration spaces with singularities. In general, it is proven that for a singularity of the intersection type, the Lagrange multipliers become unlimited near the singular point (on a manifold with singularities), regardless of the influence of the friction force. For a tangency singularity type, there are different variants with taking into account the friction force. For one type of perturbation of the configuration space, the resulting Lagrange multipliers are limited. For other type of perturbation of the configuration space, the resulting Lagrange multipliers are unlimited. The general property of friction force for the considered mechanical systems is derived. If the friction force is taken into account, then there are two solutions for reaction forces when moving near a singular point in one direction, but there are no solutions when moving in the other direction.

Keywords: constraint reaction, friction force, hinge mechanism, singular point, holonomic constraint, Lagrange multipliers, manifolds with singularities.

References

1. Painlevé P. *Cours de la faculté des sciences de Paris, cours complémentaire de mécanique rationnelle*. (1895) [Rus. red.: *Lectures on friction*. Moscow, Gostekhizdat Publ. (1954)].
2. Dupont P. E., Yamajako S. P. Jamming and wedging in constrained rigid-body dynamics. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and automation*, 2349–2354 (1994). <https://doi.org/10.1109/ROBOT.1994.350935>
3. Arnold V. I., Kozlov V. V., Neyshtadt A. I. *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics*. Moscow, VINITI Publ. (1985). (In Russian) [Eng. transl.: *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*. Heidelberg, Springer Berlin (2010)].
4. Rubin H., Ungar P. Motion under a strong constraining force. *Communications on pure and applied mathematics* **10**, 65–87 (1957). <https://doi.org/10.1002/CPA.3160100103>
5. Kozlov V. V., Neistadt A. I. On the implementation of holonomic connections in dynamics. *Applied Mathematics and Mechanics* **54** (5), 858–861 (1990). (In Russian)
6. Takens F. Motion under influence of a strong constraining force. *Global theory of Dynamics Systems*. Springer-Verlag, 425–445 (1980). <https://doi.org/10.1007/BFb0087006>
7. Mukharlyamov R. G., Deressa C. T. Dynamic equations of controlled mechanical system with redundant holonomic constraints. *Bulletin of the Technological University* **17** (11), 236–242 (2014).
8. Wojtyra M., Fraczek J. Solvability of reactions in rigid multibody systems with redundant nonholonomic constraints. *Multibody Syst Dyn* **30**, 153–171 (2013). <https://doi.org/10.1007/s11044-013-9352-0>
9. Polyakhov N. N., Zegzhda S. A., Yushkov M. P., Tovstik P. E., Soltakhanov Sh. Kh., Filippov S. B., Petrova V. I. *Theoretical and applied mechanics*. Vol. 1. St. Petersburg, St. Petersburg University Press (2022). (In Russian) [Eng. transl.: *Rational and Applied Mechanics*. Vol. 1. Cham, Springer International Publishing AG (2021)].
10. Zakalyukin I. V. Peculiarities of the degeneracy of nonholonomic constraints and controllability. *Electronic journal “Proceedings of MAI”* **39**, 1–18 (2010). (In Russian)
11. Samsonov V. A., Mikhalev A. A. Restructuring of the configuration space of a mechanical system. *Problems of mechanical engineering and reliability of machines* **4**, 13–16 (2005). (In Russian)
12. Mikhalev A. A. Peculiarities of bifurcation of equilibrium positions of near-critical mechanisms. *Problems of mechanical engineering and reliability of machines* **6**, 10–14 (2008). (In Russian)

13. Burian S.N., Kalnitsky V.S. On the Motion of One-Dimensional Double Pendulum. *AIP Conference Proceedings* **1959**, Art. no. 030004 (2018). <https://doi.org/10.1063/1.5034584>
14. Burian S.N. Reaction forces of a singular pendulum. *Vestnik of St. Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **9** (67), iss.2, 278–293 (2022). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.209> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics* **55**, iss. 2, 192–202 (2022). <https://doi.org/10.1134/S1063454122020054>].
15. Burian S.N. Conical singular points and vector fields. *Vestnik of St. Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **7** (65), iss.4, 649–661 (2020). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.407> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **54**, iss. 4, 311–320 (2021). <https://doi.org/10.1134/S106345412104004X>].

Received: January 14, 2024

Revised: April 28, 2024

Accepted: May 23, 2024

Author's information:

Sergey N. Burian — <https://orcid.org/0000-0002-7795-6735>, burianserg@yandex.ru