

Фундаментальные частоты длинных призматических оболочек*

Г. Т. Дзедзисашвили, А. Л. Смирнов, С. Б. Филиппов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: Дзедзисашвили Г. Т., Смирнов А. Л., Филиппов С. Б. Фундаментальные частоты длинных призматических оболочек // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 4. С. 772–781.
<https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.412>

В статье исследуется зависимость фундаментальных (низших собственных) частот колебаний призматических тонких оболочек от длины оболочки. Рассматриваются цилиндрические тонкие оболочки, поперечное сечение которых представляет собой правильный многоугольник. При условии сохранения периметра поперечного сечения исследуется влияние на собственные частоты длины оболочки и числа граней. Для оболочек с малым и большим числом граней, в частности для оболочек с квадратным сечением и с круговым сечением, результаты численного расчета в COMSOL дают хорошее совпадение с аналитическими результатами.

Ключевые слова: призматические тонкие оболочки, колебания тонких оболочек, метод конечных элементов.

1. Введение. Рассматриваются колебания призматической тонкой оболочки с сечением в виде правильного многоугольника. Статья продолжает публикацию результатов исследования, начатую в статье [1], обсуждением влияния длины призматической тонкой оболочки на спектр частот собственных колебаний. Как было показано в статье [1], для оболочек средней длины нижняя часть спектра состоит из частот «пластиночных» или «оболочечных» колебаний. В первом случае прямоугольные грани оболочки совершают собственные колебания с частотами и формами, близкими к колебаниям шарнирно опертых пластин. Во втором случае формы колебаний напоминают формы колебаний круговой цилиндрической оболочки с образованием m волн в окружном и одной волны в осевом направлениях.

Однако при увеличении длины оболочки в нижней части спектра начинают появляться балочные частоты, при которых поперечное сечение оболочки не деформируется, и оболочка ведет себя как длинная балка.

В работе [2], в которой для изучения колебаний оболочек многоугольного сечения использовались решения на основе обобщенной теории балок, преимущественное внимание было уделено изучению форм колебаний и их взаимодействия. Для длинной оболочки с сечением в виде шестиугольника в [3] было получено приближенное решение, основанное на уравнениях полубезмоментной теории.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (№ 23-21-00111), <https://rscf.ru/project/23-21-00111/>.

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2024

В данном исследовании мы проанализируем поведение фундаментальных (низших собственных) частот малых изгибных колебаний призматических тонких оболочек при изменении числа граней и увеличении длины посредством аналитического решения и метода конечных элементов.

2. Постановка задачи. Рассматриваются собственные поперечные колебания призматической изотропной тонкой оболочки длиной l и толщиной h с поперечным сечением в виде правильного n -угольника с длиной стороны a . Материал оболочки имеет модуль Юнга E , коэффициент Пуассона ν и плотность ρ . Такие оболочки могут быть использованы как модели при исследовании колебаний конструктивных элементов в виде призматических тонкостенных труб (рис. 1).



a

б

Рис. 1. Длинные призматические тонкостенные трубы с сечением в виде квадрата (*a*) и правильного шестиугольника (*б*).

Грани призматической оболочки состоят из тонких пластин. В плоскости i -й пластины введем локальные прямоугольные координаты (x, y) (рис. 2).

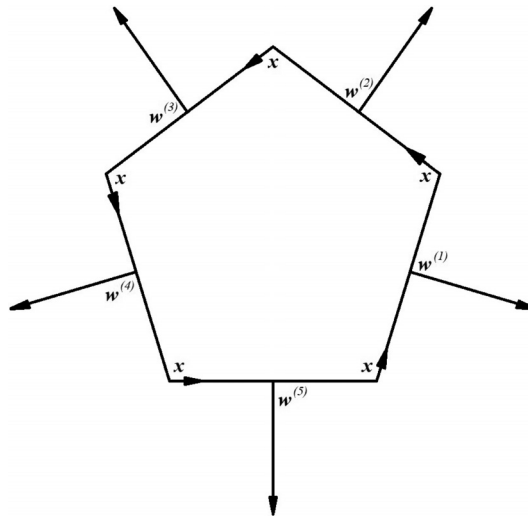


Рис. 2. Локальные координаты в сечении оболочки.

Используем линейные уравнения Лагранжа — Жермен для описания малого поперечного прогиба $w^{(i)}(x, y)$ i -й пластины

$$D\Delta\Delta w^{(i)} - \rho h w^{(i)} \omega^2 = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость; ω — угловая частота собственных колебаний пластины.

Для постановки задачи необходимо задать граничные условия на нижнем и верхнем краях, а также на линиях сопряжения между пластинами. Мы предполагаем, что нижний и верхний края оболочки шарнирно оперты. Для определения условий на линиях сопряжения между пластинами мы полагаем, если не указано иное, что деформации в плоскости каждой пластины пренебрежимо малы, перемещения и изгибающие моменты в местах сопряжения пластин равны, а углы между смежными пластинами остаются равными $\pi \frac{(n-2)}{n}$ при деформации.

Далее используются безразмерные параметры собственной частоты $\lambda = \omega^2 R^2 \frac{\rho}{E}$ и длины $L = \frac{l}{R}$, где R — характерный размер оболочки. Поскольку мы будем рассматривать оболочки с правильным многоугольным сечением равного периметра, то в качестве характерного размера выберем радиус оболочки с круговым сечением ($n = \infty$). Тогда периметр сечения оболочки равен $2\pi R$, а длина стороны правильного n -угольника — $a = 2\pi R/n$.

Для численного определения частот и форм колебаний используется метод конечных элементов (COMSOL). В тех случаях, когда это возможно, проводится сравнение с частотами колебаний, полученными аналитическими методами. При аналитическом исследовании собственных колебаний оболочек ограничимся рассмотрением случая, когда оболочка имеет четное число граней. Как было показано в [1], при малом (четном) числе сторон форма колебаний, соответствующая фундаментальной частоте, состоит из первых форм колебаний пластин, образующих оболочку. При этом выполняется предположение о неизменности углов между гранями оболочки в процессе деформации.

3. Оболочка квадратного сечения. Вначале рассмотрим тонкую цилиндрическую оболочку с квадратным поперечным сечением.

В статье [1] показано, что для оболочек средней длины нижняя часть спектра состоит из пластинчатых частот, т. е. таких, для которых прямоугольные грани оболочки совершают собственные колебания с частотами и формами, близкими к колебаниям шарнирно опертых пластин. Безразмерный параметр λ для таких собственных частот находится по формуле

$$\lambda = \pi^4 \left(\frac{m_1^2}{A^2} + \frac{m_2^2}{L^2} \right)^2 \frac{H^2}{12(1-\nu^2)}, \quad (2)$$

где m_1 и m_2 — волновые числа в направлениях x и y соответственно; $H = h/R$ — безразмерная толщина пластин, а $A = a/R = \pi/2$ — безразмерная ширина пластин. В частности, для фундаментальной частоты ($m_1 = m_2 = 1$)

$$\lambda_0^p = \pi^4 \left(\frac{1}{A^2} + \frac{1}{L^2} \right)^2 \frac{H^2}{12(1-\nu^2)}. \quad (3)$$

В то же время оболочка имеет и собственные частоты балочного типа, т. е. такие, при которых поперечное сечение оболочки не деформируется, и оболочка ведет себя

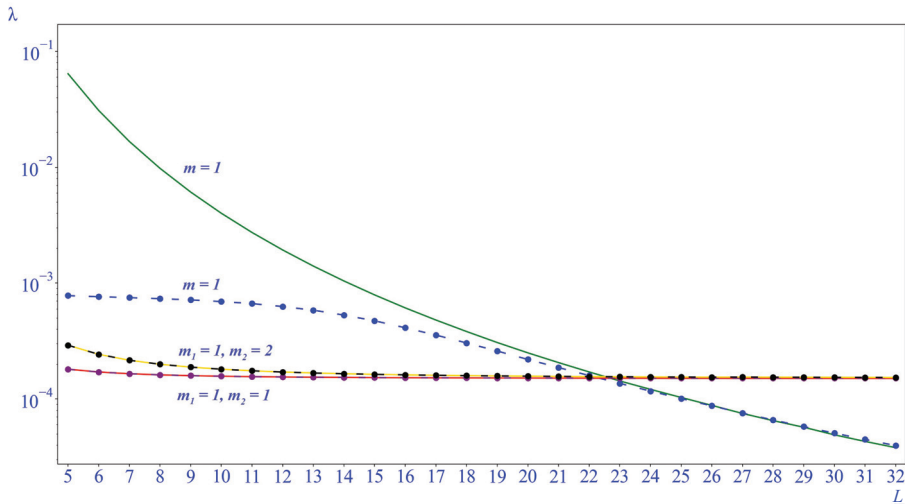


Рис. 3. Зависимость нижних пластиночной и балочной частот от длины оболочки квадратного сечения. Сплошные линии — аналитические результаты, пунктирные линии — численные результаты. Сплошная зеленая линия — значения балочной частоты по формуле (4); синие точки со штриховой линией — численные значения балочной частоты (COMSOL); сплошная красная линия — значения первой пластиночной частоты по формуле (2); фиолетовые точки со штриховой линией — численные значения первой пластиночной частоты (COMSOL); сплошная желтая линия — значения второй пластиночной частоты по формуле (2); черные точки со штриховой линией — численные значения второй пластиночной частоты (COMSOL).

как длинная балка. В частности, шарнирно опертая на обоих концах балка имеет собственные частоты [4]

$$\omega^2 = \pi^4 m^4 \frac{EJ}{S\rho l^4}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где J — момент инерции сечения оболочки относительно оси, проходящей в его плоскости через центр. Для оболочки квадратного поперечного сечения соответствующий момент инерции

$$J = \frac{2}{3} ah(a^2 + h^2),$$

а площадь поперечного сечения — $S = 4ah$. Тогда для безразмерного параметра низшей «балочной» собственной частоты

$$\lambda_0^b = \pi^4 \frac{((\pi/2)^2 + H^2)}{6L^4}. \quad (5)$$

На рис. 3 показана зависимость параметра собственной частоты первых «пластиночной» и «балочной» форм в зависимости от длины оболочки для $H = 0.01$ и $\nu = 0.33$. Сплошные линии соответствуют аналитическим результатам, полученным по формулам (2) и (4), точки соответствуют численным результатам, полученным в конечно-элементном пакете COMSOL.

При увеличении длины оболочки низшие пластиночные частоты убывают до постоянного значения $\lambda_\infty^p = \frac{\pi^4}{12(1-\nu^2)} H^2$, в то время как балочная частота быстро

стремится к 0. Значение L_0 , при котором балочная частота становится фундаментальной, находится из условия

$$\lambda_0^p = \lambda_0^b,$$

откуда при $H = 0.01$ и $\nu = 0.33$ находим $L_0 = 22.7$.

4. Оболочка кругового сечения. Формы колебаний и частоты цилиндрической оболочки с большим числом граней близки к формам и частотам цилиндрической оболочки кругового сечения. Для шарнирно опертой круговой цилиндрической тонкой оболочки безразмерные частоты нижней части спектра определяются по формулам из [5]

$$\lambda^s(m) = \frac{\pi^4}{m^2(m^2 + 1)L^4} + \frac{m^2(m^2 - 1)^2}{(m^2 + 1)} \frac{H^2}{12(1 - \nu^2)}, \quad (6)$$

где m — число волн в круговом направлении.

При $m = 1$ форма оболочечных колебаний совпадает с формой собственных колебаний балки. Соответствующие частоты могут быть получены как по асимптотической формуле (6)

$$\lambda_0^b = \frac{\pi^4}{2L^4}, \quad (7)$$

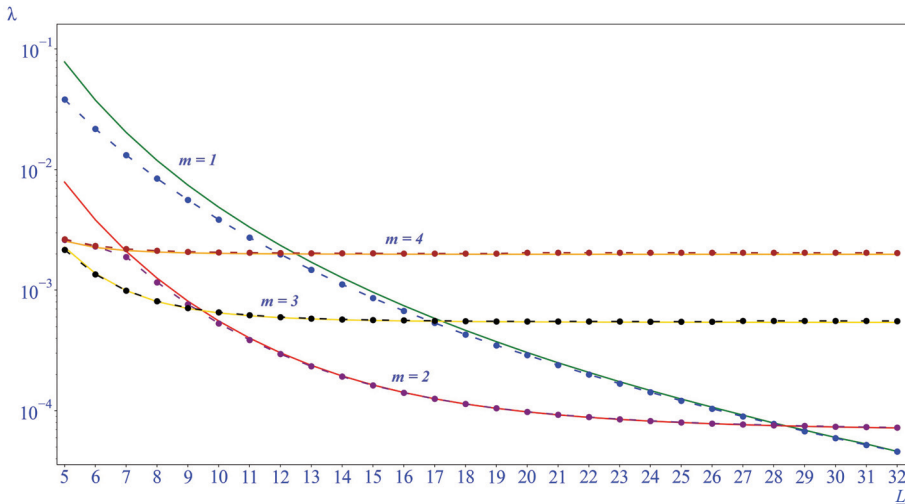


Рис. 4. Зависимость низших оболочечных и балочных частот от длины круговой оболочки. Сплошные линии — аналитические результаты, пунктирные линии — численные результаты. Зеленая линия — значения балочной частоты по формуле (4); синие точки со штриховой линией — численные значения балочной частоты (COMSOL); сплошная линия красного цвета — значения частот с $m = 2$ по асимптотической формуле (6); фиолетовые точки со штриховой линией — значения частот с $m = 2$ (COMSOL); сплошная линия желтого цвета — значения частот с $m = 3$ по асимптотической формуле (6); черные точки со штриховой линией — значения частот с $m = 3$ (COMSOL); сплошная линия оранжевого цвета — значения частот с $m = 4$ по асимптотической формуле (6); коричневые точки со штриховой линией — значения частот с $m = 4$ (COMSOL).

так и непосредственно из формулы (4) с учетом того, что для круговой цилиндрической оболочки

$$J = \frac{\pi}{4} \left(\left(R + \frac{h}{2} \right)^4 - \left(R - \frac{h}{2} \right)^4 \right) = \frac{\pi}{4} Rh(h^2 + 4R^2), \quad S = 2\pi hR,$$

откуда

$$\lambda_0^b = \frac{\pi^4(4 + H^2)}{8L^4}. \quad (8)$$

При $H \rightarrow 0$ формулы (7) и (8) совпадают.

На рис. 4 показана зависимость низших оболочечных и балочных собственных частот от длины оболочки.

С ростом L низшая оболочечная частота достигается при все меньших значениях m . Значение L_0 , при котором балочная частота становится фундаментальной, находится из условия

$$\lambda^s(2) = \lambda_0^b,$$

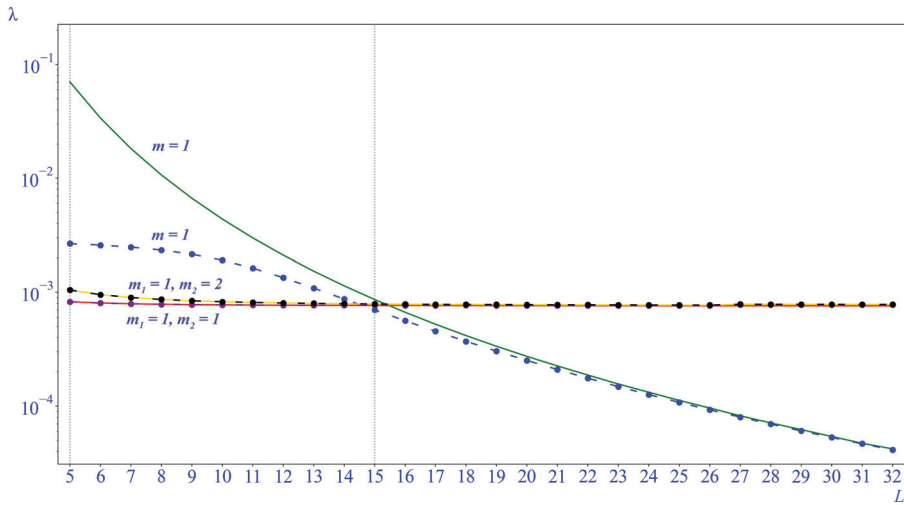
откуда при $H = 0.01$ и $\nu = 0.33$ находим $L_0 = 28.4$.

5. Оболочка с сечением в виде правильного n -угольника. Получить аналитические формулы для описания частот собственных колебаний призматической оболочки с сечением в виде правильного n -угольника вряд ли можно. При $n > 4$ предположение о том, что для форм с низшими частотами угол между гранями сохраняется при деформациях, оказывается неверным. Для оболочек с небольшим числом граней формула (3) дает оценку для частот сверху, которая быстро теряет точность с ростом n . Формы, соответствующие низшим частотам для оболочек с большим числом граней, можно назвать квазиоболочечными, поскольку с ростом n они все больше напоминают низшие собственные формы собственных колебаний круговой оболочки с m волнами в окружном направлении.

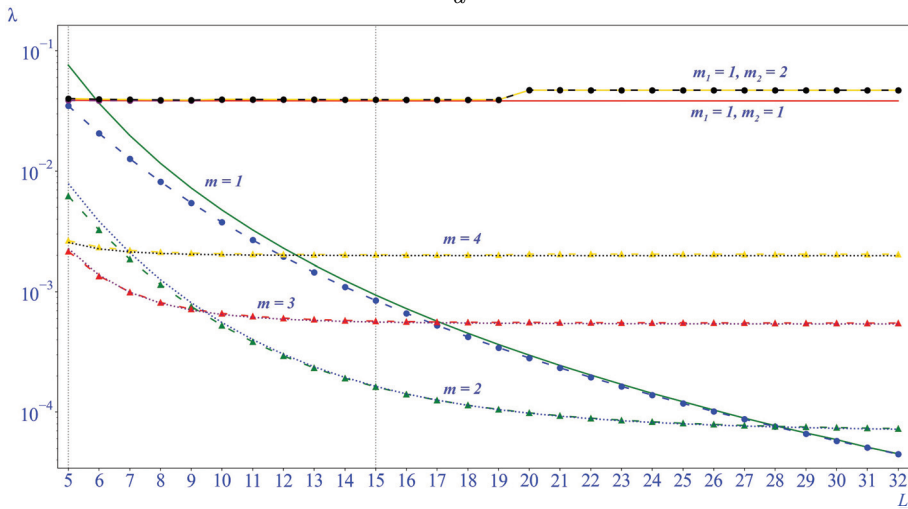
В то же время для оценки частот балочных колебаний по-прежнему можно использовать формулу (4). Проблемой является только определение момента инерции сечения такой оболочки относительно оси, проходящей через центр многоугольника.

Вычисление момента инерции для правильного многоугольника немного облегчается тем, что для однородного тела пересечение плоскостей симметрии является главной осью инерции. Следовательно, для плоской фигуры главной осью инерции будет ось симметрии. Главные оси инерции являются осями эллипсоида инерции (в плоском случае — эллипса инерции). Правильный многоугольник имеет оси симметрии, которые образуют угол, отличный от прямого угла. Это означает, что эллипс инерции является окружностью. Поэтому любая прямая, проходящая через его центр, является главной осью инерции, и моменты инерции относительно этих осей равны.

Направления главных осей инерции совпадают с направлениями собственных функций матрицы J , поэтому с алгебраической точки зрения ситуацию можно трактовать так: симметричная матрица J второго порядка для правильного многоугольника имеет две собственные функции, которые не являются ортогональными. Это может быть только в том случае, когда ее собственное число является кратным, поэтому моменты инерции правильного многоугольника относительно любых осей, проходящих через его центр, равны.



а



б

Рис. 5. Зависимость собственных частот от длины оболочки при $n = 6$ (а) и $n = 16$ (б). Обозначения аналогичны рис. 3. Пунктирная линия синего цвета — значения частот с $m = 2$ по асимптотической формуле (6); зеленые треугольники со штриховой линией — значения частот с $m = 2$ (COMSOL); пунктирная линия фиолетового цвета — значения частот с $m = 3$ по асимптотической формуле (6); красные треугольники со штриховой линией — значения частот с $m = 3$ (COMSOL); пунктирная линия черного цвета — значения частот с $m = 4$ по асимптотической формуле (6); желтые треугольники со штриховой линией — значения частот с $m = 4$ (COMSOL).

Для произвольного n момент инерции многоугольного сечения при малых значениях h может быть представлен в виде

$$J = \pi h c(n) R^3 (1 + O((h/R)^2)).$$

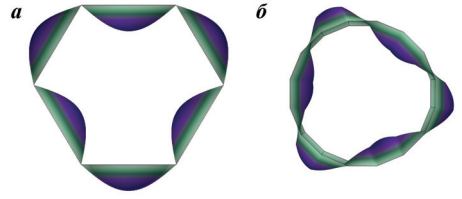


Рис. 6. Сравнение форм колебаний оболочки длиной $L = 5$: фундаментальная форма при $n = 6$ (а) и $n = 16$ (б), первая балочная форма при $n = 6$ (в) и $n = 16$ (г).

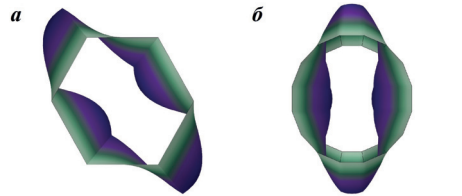
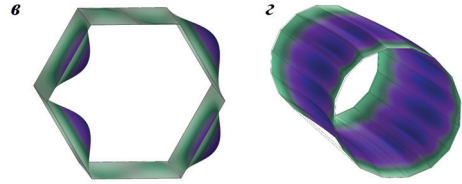
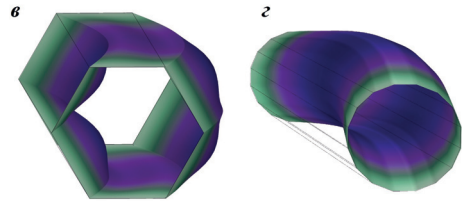


Рис. 7. Сравнение форм колебаний оболочки длиной $L = 15$: фундаментальная форма при $n = 6$ (а) и $n = 16$ (б), первая балочная форма при $n = 6$ (в) и $n = 16$ (г).



Значения коэффициентов $c(n)$ для правильных многоугольников с периметром 2π быстро растут с увеличением n от $c(4) = \pi^2/12 \approx 0.82$ для оболочки с квадратным сечением до $c(\infty) = 1$ для круговой оболочки, причем уже при $c(6) = 0.91$.

На рис. 5, а показаны зависимости параметра собственной частоты для пластиночных и первой балочной форм при $n = 6$ и $n = 16$.

На рис. 5, б дополнительно отмечены оболочечные частоты с m волнами в окружном направлении.

При фиксированном числе сторон с увеличением длины пластиночные частоты убывают, однако при численном решении они могут претерпевать кратковременный небольшой скачкообразный рост. Это может быть связано как с особенностями МКЭ-решателя, так и с возможным внутренним резонансом из-за сгущения частот.

При малых n и малой длине оболочки фундаментальной частоте соответствует пластиночная форма колебаний (рис. 6, а). С увеличением n при фиксированной длине фундаментальная форма колебаний представляет собой комбинацию оболочечной и пластиночной форм (рис. 6, б), тяготеющую с увеличением числа сторон к оболочечной форме колебаний с m волнами в окружном направлении.

Первая балочная форма колебаний при малых n реализуется не в чистом виде, а в виде комбинации балочной и пластиночных форм (рис. 6, в), соответствующая

ей частота находится далеко от низшей части спектра. С увеличением числа граней оболочки балочная форма колебаний, при которой возникает одна волна в осевом направлении, а поперечное сечение не деформируется, становится все более выраженной (рис. 6, *з*).

С увеличением длины оболочки поведение форм колебаний меняется. Фундаментальная форма колебаний в этом случае тяготеет к оболочечной форме с соответствующим числом волн в окружном направлении m , причем тем сильнее, чем больше число сторон сечения (рис. 7, *а, б*). В частности, $m = 2$ при $L = 15$ (см. рис. 5).

Первая балочная форма колебаний при малых n реализуется не в чистом виде, а в виде комбинации балочной и пластиночных форм (рис. 7, *в*), соответствующая ей частота находится далеко от низшей части спектра (см. рис. 5). Для оболочек с равным числом граней с увеличением длины оболочки балочная форма колебаний становится все более выраженной (рис. 6, *з* и рис. 7, *з*).

6. Заключение. При небольшом числе сторон и небольшой длине нижняя часть спектра собственных частот тонкой призматической оболочки состоит из пластиночных частот. С увеличением длины оболочки, начиная с некоторого значения L_0 , фундаментальной становится балочная частота.

С увеличением числа сторон форма колебаний приближается к форме колебаний оболочки кругового сечения. Формы колебаний имеют смешанный тип пластиночных, оболочечных и балочных колебаний и предположение о сохранении углов между гранями для форм колебаний выполняется все хуже. С увеличением длины балочные частоты оболочки быстро убывают, приближаясь к собственным частотам балки той же длины.

Литература

1. Дзедзисашвили Г. Т., Смирнов А. Л., Филиппов С. Б. Частоты собственных колебаний призматических тонких оболочек. *Известия Саратовского университета. Сер.: Математика. Механика. Информатика* **24** (1), 49–56 (2024).
2. Gonçalves R., Camotim D. The vibration behaviour of thin-walled regular polygonal tubes. *Thin-Walled Structures* **84**, 177–188 (2014). <https://doi.org/10.1016/j.tws.2014.06.011>
3. Krajinovic D. Vibrations of prismatic shells with hexagonal cross section. *Nuclear Engineering and Design* **22**, iss. 1, 51–62 (1972).
4. Болотин В. В. (ред.) *Вибрации в технике. Т. 1. Колебания линейных систем*. Москва, Машиностроение (1978).
5. Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. *Свободные колебания тонких упругих оболочек*. Москва, Наука (1979).

Статья поступила в редакцию 25 января 2024 г.;
доработана 21 мая 2024 г.;
рекомендована к печати 23 мая 2024 г.

Контактная информация:

Дзедзисашвили Георгий Тамазович — аспирант; <https://orcid.org/0000-0001-8342-3065>,
d-g-t@bk.ru

Смирнов Андрей Леонидович — канд. физ.-мат. наук, доц.;
<https://orcid.org/0000-0002-1526-2869>, a.l.smirnov@spbu.ru

Филиппов Сергей Борисович — д-р физ.-мат. наук, проф.;
<https://orcid.org/0000-0002-1312-5705>, s.filipov@spbu.ru

Fundamental frequencies of long prismatic shells*

G. T. Dzebisashvili, A. L. Smirnov, S. B. Filippov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Dzebisashvili G. T., Smirnov A. L., Filippov S. B. Fundamental frequencies of long prismatic shells. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 4, pp. 772–781. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.412> (In Russian)

The impact of the length of a shell on the fundamental frequencies of natural vibrations of a prismatic thin shell is studied in the paper. A thin cylindrical shell, the cross-section of which is a regular polygon, is analyzed. Provided that the perimeter of the cross-section is preserved, the influence of the length of the structure and the number of faces on the natural frequencies is examined. For limiting cases of the number of faces (shells with the square cross-section and circular cross-section), the results of numerical analysis in COMSOL and the analytical results are in close agreement with each other.

Keywords: prismatic thin shell, vibrations of thin shells, FEM analysis.

References

1. Dzebisashvili G. T., Smirnov A. L., Filippov S. B. Free vibration frequencies of prismatic thin shells. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics* **24** (1), 49–56 (2024). (In Russian)
2. Gonçalves R., Camotim D. The vibration behaviour of thin-walled regular polygonal tubes. *Thin-Walled Structures* **84**, 177–188 (2014). <https://doi.org/10.1016/j.tws.2014.06.011>
3. Krajinovic D. Vibrations of prismatic shells with hexagonal cross section. *Nuclear Engineering and Design* **22**, iss. 1, 51–62 (1972).
4. Bolotin V. V. (ed.) *Vibrations in Engineering: A Handbook. Vol. 1. Oscillations of Linear Systems*. Moscow, Mashinostroenie Publ. (1978). (In Russian)
5. Goldenveizer A. L., Lidsky V. B., Tovstik P. E. *Free Vibrations of Thin Elastic Shells*. Moscow, Nauka Publ. (1979). (In Russian)

Received: January 25, 2024

Revised: May 21, 2024

Accepted: May 23, 2024

Authors' information:

Georgii T. Dzebisashvili — <https://orcid.org/0000-0001-8342-3065>, d-g-t@bk.ru

Andrei L. Smirnov — <https://orcid.org/0000-0002-1526-2869>, a.l.smirnov@spbu.ru

Sergei B. Filippov — <https://orcid.org/0000-0002-1312-5705>, s.filippov@spbu.ru

*The research is supported by the Russian Science Foundation (project no.23-21-00111), <https://rscf.ru/project/23-21-00111/>.