К 300-ЛЕТИЮ СПбГУ

УДК 519.71, 531.36:534.1, 517.9
MSC 93C55, 37N40, 37G35

Обзор исследований по качественной теории дифференциальных уравнений в Санкт-Петербургском университете. III. Системы с гистерезисными нелинейностями. Проблема Айзермана для систем с дискретным временем*

Н. А. Бегун, Е. В. Васильева, Т. Е. Звягинцева, Ю. А. Ильин

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Бегун Н. А., Васильева Е. В., Звягинцева Т. Е., Ильин Ю. А.* Обзор исследований по качественной теории дифференциальных уравнений в Санкт-Петербургском университете. III. Системы с гистерезисными нелинейностями. Проблема Айзермана для систем с дискретным временем // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2025. Т. 12 (70). Вып. 1. С. 3–17.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2025.101

Данная статья является третьей в цикле работ, посвященных обзору результатов научных исследований сотрудников кафедры дифференциальных уравнений Санкт-Петербургского университета за последние 30 лет. Статья посвящена результатам изучения систем с гистерезисными и секторными нелинейностями, как с непрерывным, так и с дискретным временем. В первой части работы представлены результаты, полученные для систем автоматического управления второго порядка с непрерывным временем. Изучается вопрос глобальной устойчивости и вопрос существования предельных циклов в системе с одной гистерезисной нелинейностью. Во второй части рассматривается система с дискретным временем, которая состоит из линейного скалярного уравнения и одномерного стоп-оператора. Также эту систему можно записать в виде двумерного кусочно-линейного отображения. Представлен анализ глобальной динамики и бифуркаций в системе в зависимости от двух параметров. Изучены одномерные отоб-

*Вторую часть статьи см.: *Бегун Н. А., Васильева Е. В., Звягинцева Т. Е., Ильин Ю. А.* Обзор исследований по качественной теории дифференциальных уравнений в Санкт-Петербургском университете. II. Локальный качественный анализ существенно нелинейных систем // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 3. С. 401–418. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.301

ражения, возникающие при рассмотрении отображения Пуанкаре. В частности, полностью разобрана динамика так называемого skew tent map. В третьей части работы рассматриваются дискретные системы второго порядка с нелинейностями, подчиненными обобщенным условиям Рауса — Гурвица (проблема Айзермана). Показано, что может быть построена 2-периодическая нелинейность указанного типа таким образом, что в системе возникают 4-периодические циклы. Кроме того, может быть построена 3-периодическая нелинейность так, что в системе появляются 3- или 6-периодические решения.

Ключевые слова: нелинейность гистерезисного типа, абсолютная устойчивость, предельный цикл, проблема Айзермана, бифуркации, динамические системы, обобщенные условия Рауса — Гурвица, аттрактор.

1. Введение. Данная статья продолжает обзор результатов научных исследований сотрудников кафедры дифференциальных уравнений Санкт-Петербургского государственного университета по качественной теории нелинейных систем. Статья является третьей в цикле работ, посвященных исследованиям, которые проводились на кафедре за последние 30 лет.

В первой статье этого цикла [1] приведены результаты исследования устойчивых периодических точек диффеоморфизмов с гомоклиническими точками и систем со слабо гиперболическими инвариантными множествами. Вторая статья [2] посвящена локальной качественной теории существенно нелинейных систем.

В данной работе рассматриваются системы с гистерезисными и секторными нелинейностями, как с непрерывным, так и с дискретным временем. Заметим, что под гистерезисом мы понимаем явление, при котором поведение системы зависит не только от значений независимых переменных, но и от предыстории развития системы.

Системы дифференциальных уравнений с гистерезисными нелинейностями широко используются для описания динамики в различных физических процессах, а также в системах управления техническими устройствами. Изучению свойств решений таких систем посвящено большое количество работ начиная с сороковых годов прошлого столетия и до настоящего времени (например, [3–13]). Существенный вклад в развитие этой теории внесли ученые Санкт-Петербургского (Ленинградского) университета В. А. Плисс, В. А. Якубович, А. Х. Гелиг, Г. А. Леонов и их ученики [6–13].

В последние десятилетия внимание исследователей к системам с гистерезисом существенно возросло в связи с их применением для описания динамики в прикладных задачах теории автоматического регулирования, в современной энергетике и микроэлектронике. Наибольший интерес при исследовании прикладных проблем представляет решение задачи о глобальной устойчивости и задачи об абсолютной устойчивости систем с гистерезисной нелинейностью из некоторого класса. Новые результаты и обширную библиографию по данной тематике можно найти, например, в монографии Г. А. Леонова, М. М. Шумафова, В. А. Тешева [13].

Эта работа состоит из введения и трех разделов. В первых двух разделах рассматриваются двумерные системы с гистерезисными нелинейностями, в первом — системы с непрерывным временем, во втором — с дискретным временем. Третий раздел посвящен дискретным системам, нелинейности которых подчинены обобщенным условиям Рауса — Гурвица (или лежат в гурвицевом угле). Задача об абсолютной устойчивости таких систем широко известна как проблема Айзермана.

Первый раздел содержит обзор цикла статей В. А. Плисса и Т. Е. Звягинцевой [14–20], в которых изучается двумерная система, содержащая один нелинейный гистерезисный элемент. В работах [14–17] гистерезисная нелинейность является кусочно-линейной либо аппроксимируется кусочно-линейными функциями, в работах [18–20] рассматривается гистерезисная нелинейность общего вида. Для изучения устойчивости стационарного множества таких систем и для доказательства наличия в системе предельных циклов применяются методы качественной теории дифференциальных уравнений, теория функций Ляпунова и метод систем сравнения.

Второй раздел посвящен обзору публикаций [21–23] Н. А. Бегуна, совместно с группой соавторов, в которых гистерезисный стоп-оператор использован для моделирования уровня инфляции. В статье [21] рассматривается система с дискретным временем, которая состоит из линейного скалярного уравнения и одномерного стоп-оператора. Также эту систему можно записать в виде двумерного кусочно-линейного отображения. В статье представлен анализ глобальной динамики и бифуркаций в зависимости от двух параметров.

В статье [22] авторы сконцентрировались на изучении одномерных отображений, возникающих в [21] при рассмотрении отображения Пуанкаре. В частности, в статье впервые была полностью разобрана динамика так называемого skew tent map.

В статье [23] рассматривалась динамика системы с разрывным гистерезисным оператором, более точно описывающим изменение уровня инфляции. Параллельно были изучены метрические и топологические свойства отображений сдвига отрезков.

Третий раздел данной статьи посвящен задаче абсолютной устойчивости для двумерных систем с дискретным временем, нелинейность которых подчинена обобщенным условиям Рауса — Гурвица (или лежит в гурвицевом угле).

Задача абсолютной устойчивости систем дифференциальных уравнений с секторной нелинейностью поставлена А. И. Лурье и В. Н. Постниковым [4] около 80 лет назад и остается одной из основных задач теории автоматического управления. В 1949 г. М. А. Айзерманом [24] была сформулирована известная гипотеза о том, что система абсолютно устойчива в классе нелинейных характеристик, лежащих в гурвицевом угле. Спустя десятилетие В. А. Плисс [25] опроверг эту гипотезу, построив контрпример для системы трех дифференциальных уравнений, и предложил метод, позволяющий находить периодические колебания в таких системах. В работах Г. А. Леонова и его учеников [26, 27] дан обзор большинства известных результатов по исследованию систем с непрерывным временем, нелинейность которых удовлетворяет обобщенным условиям Рауса — Гурвица [26].

В последние годы интенсивно строится и развивается теория абсолютной устойчивости для систем с дискретным временем. В работах У. Хита, Дж. Карраско, М. де ла Сена [28, 29], опубликованных в 2015 г., построены два примера дискретных систем с секторной нелинейностью, лежащей в гурвицевом угле, которые показывают, что гипотеза Айзермана в дискретном случае неверна даже для систем второго порядка. В построенных авторами примерах одна из таких систем имеет 3-периодический цикл, а другая — 4-периодический.

В работах Т. Е. Звягинцевой [30–32] изучается (при всех допустимых значениях параметров) дискретная система автоматического управления с 2- и 3-периодической нелинейностью, удовлетворяющей обобщенным условиям Рауса — Гурвица. Выписаны коэффициентные условия на параметры, при выполнении которых нелинейность системы может быть построена так, что в системе возникает семейство неизолированных циклов, дан способ построения указанных нелинейностей.

2. Системы с гистерезисными нелинейностями. Рассмотрим двумерную систему автоматического управления

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\alpha y - \beta x - \varphi\left(\sigma\right), \end{cases} \tag{1}$$

где $\sigma = ay + bx$, $a \neq 0$, $b > 0$, $\varphi\left(\sigma\right)$ — гистерезисная нелинейность с характеристикой, представленной на рис. 1.

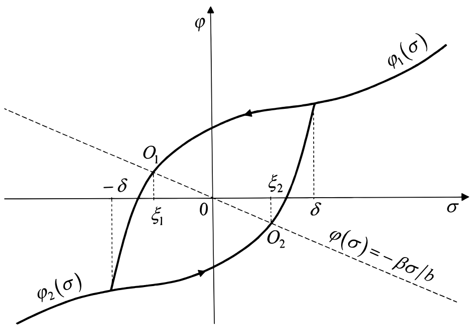

Рис. 1. Гистерезисная нелинейность $\varphi\left(\sigma\right)$.

Нелинейность $\varphi\left(\sigma\right)$ состоит из двух ветвей однозначных функций:

$$\varphi\left(\sigma\right) = \begin{cases} \varphi_1\left(\sigma\right), & \textit{если } \sigma \geq -\delta, \\ \varphi_2\left(\sigma\right), & \textit{если } \sigma \leq \delta, \end{cases} \tag{2}$$

$\delta > 0$, $\varphi_1\left(\sigma\right)$ и $\varphi_2\left(\sigma\right)$ — кусочно-дифференцируемые функции, $\varphi_1\left(\sigma\right) = -\varphi_2\left(-\sigma\right)$ для всех $\sigma \geq -\delta$, $\varphi_1\left(\pm\delta\right) = \varphi_2\left(\pm\delta\right)$. Направление обхода петли гистерезиса на рис. 1 указано стрелками: точка $\left(\sigma, \varphi\left(\sigma\right)\right)$ движется по кривой $\left\{\left(\sigma, \varphi_1\left(\sigma\right)\right),\ \sigma \in \left[-\delta,\ \delta\right]\right\}$, если $\sigma\left(t\right)$ убывает с ростом t, и по кривой $\left\{\left(\sigma, \varphi_2\left(\sigma\right)\right),\ \sigma \in \left[-\delta,\ \delta\right]\right\}$, если $\sigma\left(t\right)$ возрастает с ростом t. Переход точки с ветви $\varphi_1\left(\sigma\right)$ на ветвь $\varphi_2\left(\sigma\right)$, и наоборот, с ветви $\varphi_2\left(\sigma\right)$ на ветвь $\varphi_1\left(\sigma\right)$ возможен только при $\sigma\left(t\right) = \pm\delta$.

Не умаляя общности рассуждений, полагаем $a > 0$. Считаем также, что $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $b^2 - \alpha ab + a^2\beta \neq 0$, т. е. при $\varphi\left(\sigma\right) \equiv 0$ система (1) асимптотически устойчива, и передаточная функция системы является невырожденной.

В работах [18–20] построено фазовое пространство такой системы, определено понятие решения, дано строгое определение глобальной устойчивости, сформулированы коэффициентные условия глобальной устойчивости системы и условия существования в системе предельных циклов.

Фазовая поверхность P системы (1) представляет собой многообразие с краем, состоящее из двух листов: $P = P_1 \cup P_2$.

На листе $P_1 = \left\{(x, y) : \sigma \geq -\delta,\ \dot{\sigma}\,\big|_{\sigma\in[-\delta,\delta]} \leq 0\right\}$ система имеет нелинейность $\varphi_1\left(\sigma\right)$, здесь $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_1 = a\left(-\alpha y - \beta x - \varphi_1\left(\sigma\right)\right) + by$.

На листе $P_2 = \left\{(x, y) : \sigma \leq \delta,\ \dot{\sigma}\,\big|_{\sigma\in[-\delta,\delta]} \geq 0\right\}$ нелинейность равна $\varphi_2\left(\sigma\right)$, и $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_2 = a\left(-\alpha y - \beta x - \varphi_2\left(\sigma\right)\right) + by$.

Фазовая точка с листа P_1 на P_2 переходит по лучу $L_1 = \left\{(x, y) : \sigma = -\delta,\ \dot{\sigma} = \dot{\sigma}_1 \leq 0\right\}$, с листа P_2 на P_1 — по лучу $L_2 = \left\{(x, y) : \sigma = \delta,\ \dot{\sigma} = \dot{\sigma}_2 \geq 0\right\}$.

Положим $\Gamma_j = \{(x, y): \ \sigma \in [-\delta, \delta], \ \dot{\sigma}_j = 0\}$, $j = 1, 2$. $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ — край многообразия P, его наличие обусловлено направлением движения фазовой точки по петле гистерезиса. Обозначим через O_1 и O_2 положения равновесия системы на листах P_1 и P_2 соответственно.

Будем считать, что решения (1) с начальными данными $t = \tau_0$, $(x_0, y_0) \in P$, достигающие края Γ многообразия P при некотором конечном $t = \tilde{\tau} \geq \tau_0$ в точке $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in (\Gamma_1 \backslash L_1) \cup (\Gamma_2 \backslash L_2)$, продолжаются на бесконечный промежуток времени: $x(t) \equiv \tilde{x}$, $y(t) \equiv \tilde{y}$ для всех $t \in [\tilde{\tau}, +\infty)$. Множество таких точек $(\tilde{x}, \tilde{y})$, объединенное со множеством $O_1 \cup O_2$, обозначим через Γ^+. Очевидно, что множество Γ^+ является инвариантным множеством.

Множество Γ^+ называется *глобально притягивающим множеством* для системы (1), если для любого решения системы $x = x(t)$, $y = y(t)$ с начальными данными $t = \tau_0$, $(x_0, y_0) \in P$, расстояние от точки $(x(t), y(t))$ до множества Γ^+ стремится к нулю при $t \to +\infty$.

Будем говорить, что система (1) является *глобально устойчивой*, если множество Γ^+ является глобально притягивающим множеством.

В работах [14, 15] рассматривается частный случай системы (1), здесь характеристика $\varphi(\sigma)$ является кусочно-линейной. Такая постановка задачи обусловлена тем, что во многих работах прикладного характера нелинейные элементы аппроксимируются или оцениваются кусочно-линейными функциями, что приводит к новым аналитическим критериям устойчивости.

Здесь

$$\begin{array}{l} \varphi_1(\sigma) = \begin{cases} M, \text{ если } \sigma \geq -k\delta, \\ \frac{M}{1-k}\left(\frac{2\sigma}{\delta} + (1+k)\right), \text{ если } -\delta \leq \sigma \leq -k\delta, \end{cases} \\ \varphi_2(\sigma) = \begin{cases} \frac{M}{1-k}\left(\frac{2\sigma}{\delta} - (1+k)\right), \text{ если } k\delta \leq \sigma \leq \delta, \\ -M, \text{ если } \sigma \leq k\delta, \end{cases} \end{array} \qquad (3)$$

$M > 0$, $\delta > 0$, $0 < k < 1$.

В этом случае каждый из листов P_1, P_2 фазовой поверхности P удобно разделить на две части: $P_j = P_{j1} \cup P_{j2}$ $(j = 1, 2)$, где $\varphi(\sigma) = M$ на листе P_{11}, $\varphi(\sigma) = \frac{M}{1-k}\left(\frac{2\sigma}{\delta} + (1+k)\right)$ на P_{12}, $\varphi(\sigma) = -M$ и $\varphi(\sigma) = \frac{M}{1-k}\left(\frac{2\sigma}{\delta} - (1+k)\right)$ на листах P_{21} и P_{22} соответственно.

Обозначим через L_{11}, L_{12}, L_{21} и L_{22} лучи перехода фазовой точки с листов P_{11}, P_{12}, P_{21} и P_{22} на листы P_{12}, P_{21}, P_{22} и P_{11} соответственно, пусть K_{ij} — начало луча L_{ij} $(i, j = 1, 2)$.

В работе [14] дан критерий существования предельного цикла в системе (1) с кусочно-линейной характеристикой (3). В явном виде выписаны достаточно просто проверяемые условия на параметры системы, при выполнении которых в системе существует устойчивый предельный цикл. Доказано, что цикл при этом единственный. В работе [15] даны коэффициентные условия глобальной устойчивости системы (1) с нелинейностью вида (3). Глобально притягивающим множеством Γ^+ здесь является множество $(K_{12}, K_{11}] \cup [K_{11}, O_1] \cup [O_2, K_{21}] \cup [K_{21}, K_{22})$, если $Mb \leq k\delta\beta$, и множество $(K_{12}, O_1] \cup [O_2, K_{22})$, если $Mb > k\delta\beta$.

В работах [16, 17] рассматривается система (1) с нелинейностью (2), которая аппроксимируется на листах P_1 и P_2 фазового пространства кусочно-линейными характеристиками $\varphi_+(\sigma)$ и $\varphi_-(\sigma)$ вида (3):

$$\varphi_{1-}(\sigma) \leq \varphi_1(\sigma) \leq \varphi_{1+}(\sigma), \text{ и, } \varphi_{2-}(\sigma) \leq \varphi_2(\sigma) \leq \varphi_{2+}(\sigma), \qquad (4)$$

$$\varphi_{1-}(\sigma) = \begin{cases} M_1, \text{ если } \sigma \geq -k\delta, \\ \frac{1}{(1-k)\delta}\left((M_1+M_2)\sigma + \delta(M_1+kM_2)\right), \text{ если } -\delta \leq \sigma \leq -k\delta, \end{cases}$$

$$\varphi_{1+}(\sigma) = \begin{cases} M_2, \text{ если } \sigma \geq -k\delta, \\ \frac{1}{(1-k)\delta}\left((M_1+M_2)\sigma + \delta(kM_1+M_2)\right), \text{ если } -\delta \leq \sigma \leq -k\delta, \end{cases}$$

$$\varphi_{2-}(\sigma) = -\varphi_{1+}(-\sigma), \ \varphi_{2+}(\sigma) = -\varphi_{1-}(-\sigma), \ M_2 > M_1 > 0, \ 0 < k < 1.$$

Будем говорить, что нелинейность $\varphi(\sigma)$ принадлежит классу $H[M_1, M_2]$, если выполнены условия (4).

Систему (1) с нелинейностью (2) мы называем *абсолютно устойчивой* в классе нелинейностей $H[M_1, M_2]$, если система (1) глобально устойчива для любой нелинейности (2) из этого класса.

В работе [16] получены коэффициентные условия абсолютной устойчивости системы (1) в классе нелинейностей $H[M_1, M_2]$. Показано, что абсолютная устойчивость может иметь место, если величина $(M_2 - M_1)$ достаточно мала. Это требование существенно, при его нарушении в системе с такой нелинейностью могут появиться два предельных цикла. Соответствующие примеры построены для некоторых частных случаев.

Работа [17] является непосредственным продолжением работы [16]. Здесь сформулированы коэффициентные условия, при выполнении которых система (1) с нелинейностью класса $H[M_1, M_2]$ имеет предельный цикл. Доказательство результатов проводится с использованием метода систем сравнения и метода функций Ляпунова.

В работах [18–20] исследуются вопросы глобальной устойчивости системы (1) с гистерезисной функцией $\varphi(\sigma)$ достаточно общего вида. Для этого система (1) известным преобразованием (например, [18]) приводится к системе

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = u - f(\sigma), \\ \dot{u} = -g(\sigma), \end{cases} \tag{5}$$

где $f(\sigma)$, $g(\sigma)$ — гистерезисные функции:

$$f(\sigma) = \begin{cases} f_1(\sigma), \text{ если } \sigma \geq -\delta, \\ f_2(\sigma), \text{ если } \sigma \leq \delta, \end{cases} \quad g(\sigma) = \begin{cases} g_1(\sigma), \text{ если } \sigma \geq -\delta, \\ g_2(\sigma), \text{ если } \sigma \leq \delta, \end{cases}$$

$$f_j = a(\alpha\sigma + a\varphi_j(\sigma)), \ g_j = a^2(\beta\sigma + b\varphi_j(\sigma)), \ j = 1, \ 2.$$

Фазовая поверхность P системы (5) по-прежнему является многообразием с краем, которое состоит из двух листов P_1, P_2 и аналитически задается аналогично тому, как это было сделано для системы (1).

Переход фазовой точки с одного листа на другой осуществляется по лучам перехода L_1, L_2. $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ — край многообразия P.

Система (5) имеет по одному положению равновесия на каждом из листов: положение равновесия O_j на листе P_j имеет координаты (ξ_j, η_j), где $\xi_j \in (-\delta, \delta)$, $g_j(\xi_j) = 0$, $\eta_j = f(\xi_j)$.

В работе [18] с помощью метода функций Ляпунова получены условия глобальной устойчивости системы (5) в предположении, что $f_1'(\sigma) \geq 0$. Доказано, что при выполнении условия

$$2\int_{-\delta}^{\delta} g_1(\sigma)\,d\sigma \leq \left(f_1(\xi_1) + f_1(\delta)\right)^2, \tag{6}$$

система (5) является глобально устойчивой с глобально притягивающим множеством $\Gamma^+ = \Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^+$, где $\Gamma_1^+ = \Gamma_1 \cap \{(\sigma, u) : -\delta < \sigma \le \xi_1\}$, $\Gamma_2^+ = \Gamma_2 \cap \{(\sigma, u) : \xi_2 \le \sigma < \delta\}$.

Заметим, что площадь петли гистерезиса равна $2a^{-2}b^{-1}\int_{-\delta}^{\delta} g_1(\sigma)\, d\sigma$, и оценка (6) показывает, что при достаточно малой площади этой петли система (5) обладает глобальной устойчивостью.

Кроме того, в [18] показано, что при условии (6) и выполнении неравенства $f_1'(\sigma) > \frac{g_1(-\sigma)}{g_1(\sigma)+f_1(-\sigma)}$ в точках множества $\Gamma_1^+ \setminus \{O_1\}$ в системе (5) возникает скользящий режим. Для каждого $\sigma \in (-\delta,\ \xi_1)$ фазовая точка $(\sigma,\ u) \in \Gamma_1^+$ непрерывно переходит с траектории системы (5) на листе P_1 на траекторию этой системы на листе P_2 и обратно, как бы скользя вдоль линии переключения Γ_1^+, и стремится к состоянию равновесия O_1 при $t \to +\infty$. Поведение решений системы (5), попадающих за конечное время на дугу $\Gamma_2^+ \setminus \{O_2\}$, аналогично: при $t \to +\infty$ фазовая точка скользит вдоль линии Γ_2^+ и стремится к состоянию равновесия O_2.

Случаи, когда производная функции $f_1(\sigma)$ меняет знак, рассмотрены в [19, 20]. В работе [19] приведены условия, при выполнении которых в системе существует предельный цикл. В работе [20] показано, что в системе может существовать два предельных цикла.

3. Об исследовании дискретных систем с гистерезисным стоп-оператором. Рассмотрим $s_0 \in [-1, 1]$ и вещественнозначную последовательность $\{x_n\}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Стоп-оператор S отображает пару s_0, $\{x_n\}$ в последовательность, определенную формулой

$$s_{n+1} = \Phi(s_n + x_{n+1} - x_n), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

где функция Φ определена формулой

$$\Phi(\tau) = \begin{cases} -1, & \tau < -1, \\ \tau, & |\tau| \le 1, \\ 1, & \tau > 1, \end{cases} \tag{7}$$

s_0 мы называем начальным состоянием, $\{x_n\}$ — входом, а $\{s_n\}$ — выходом стоп-оператора (рис. 2).

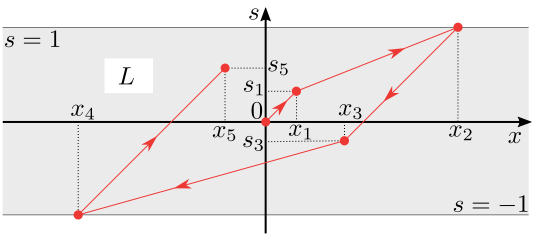

Рис. 2. Иллюстрация стоп-оператора.

Связывая выход стоп-оператора с входной последовательностью посредством линейного преобразования с вещественными коэффициентами λ и a, мы рассматриваем динамическую систему

$$\begin{cases} x_{n+1} = \lambda x_n + a s_n, \\ s_{n+1} = \Phi(s_n + x_{n+1} - x_n), \end{cases} \tag{8}$$

где Φ задана формулой (7) в полосе

$$\{(x, s) : x \in \mathbb{R}, s \in [-1, 1]\}. \tag{9}$$

Далее мы предполагаем, что $|\lambda| < 1$. Из этого следует, что траектории системы (8) в полосе (9) ограничены.

Легко видеть, что неподвижные точки системы (8) образуют отрезок

$$EF = \left\{(x, s) :\ x = \frac{as}{1-\lambda},\ -1 \le s \le 1\right\} \tag{10}$$

с концами

$$E = (x^*, 1) = \left(\frac{a}{1-\lambda}, 1\right), \quad F = (-x^*, -1) = \left(-\frac{a}{1-\lambda}, -1\right). \tag{11}$$

Мы используем стандартные понятия устойчивости и неустойчивости для неподвижных точек и периодических орбит.

Мы также говорим, что неподвижная точка (x_e, s_e) системы (8) является полуустойчивой, если существуют открытые множества $U_1, U_2 \subset \{(x, s) : |s| < 1\}$ такие, что (x_e, s_e) принадлежит границам этих множеств:

• и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что любая траектория, стартующая из δ-окрестности неподвижной точки (x_e, s_e) в множестве U_1, принадлежит ε-окрестности (x_e, s_e) для любого положительного n;

• существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что любая траектория, стартующая из U_2, покидает ε_0-окрестность неподвижной точки (x_e, s_e) после конечного числа итераций.

Основной результат представляет собой классификацию поведения орбит системы (8) в зависимости от значений параметров λ и $\beta = \lambda + a$ (рис. 3).

Теорема. *Положим $\beta = \lambda + a$ и $|\lambda| < 1$.*

(a) *Если $\lambda \ge 0$, $\beta \ge 1$, то неподвижные точки E и F, заданные формулой (11), являются полуустойчивыми, а все остальные неподвижные точки неустойчивы. Все остальные (не неподвижные) траектории притягиваются либо к E, либо к F.*

(b) *Если $|\beta| < 1$, то все неподвижные точки устойчивы и любая траектория системы (8) притягивается к одной из неподвижных точек.*

(c) *Если $\lambda \ge 0$, $\beta < -1$, то точки E и F являются полуустойчивыми, все остальные неподвижные точки неустойчивы, и существует устойчивая траектория периода 2:*

$$\pm Q = \left(\mp\frac{a}{1+\lambda}, \pm 1\right). \tag{12}$$

Все не неподвижные траектории притягиваются либо к E, либо к F, либо к орбите (12).

(d) *Если $\lambda < 0$, $\beta < -1$, то все неподвижные точки неустойчивы. Все не неподвижные траектории притягиваются к орбите (12).*

(e) *Если $\lambda < 0$, $\beta > 1$, то все неподвижные точки неустойчивы. Система (8) имеет периодические орбиты сколь угодно больших периодов. Возможно существование (не более одной) устойчивой периодической орбиты.*

(f) *Если $\lambda < 0$, $\beta = 1$, то все неподвижные точки неустойчивы. Каждая траектория притягивается к отрезку EF, заданному формулой (10).*

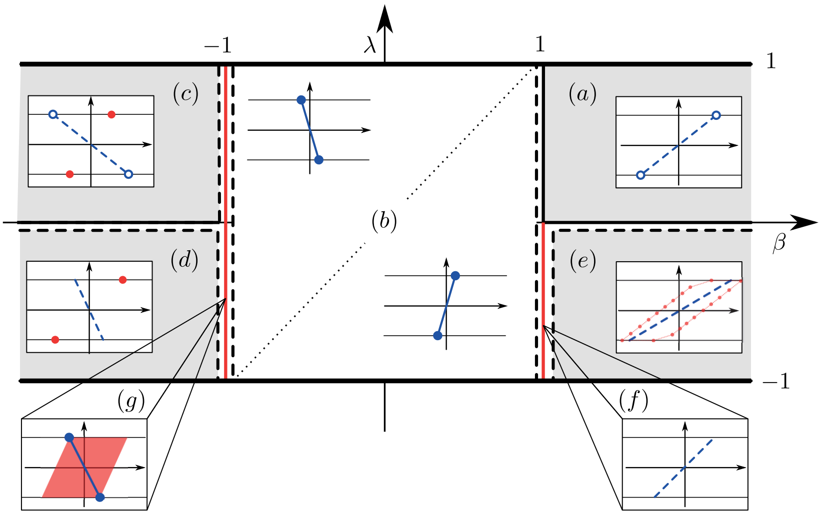

Рис. 3. Бифуркационная диаграмма. Отрезок неподвижных точек EF изображен голубой линией. Устойчивым неподвижным точкам соответствует сплошная линия, неустойчивым — пунктирная. Устойчивые концы EF изображены закрашенными голубыми окружностями; полуустойчивые концы — незакрашенными голубыми окружностями; в неустойчивом случае окружности не изображаются. Пунктирная линия в случае (b) соответствует бесконечному наклону отрезка EF. Периодические орбиты изображены красным. Закрашенные красные окружности в случаях (c) и (d) соответствуют устойчивой орбите $\pm Q$ периода 2; красный параллелограмм Σ в случае (g) состоит из устойчивых орбит периода 2. Случай (e) соответствует сложной динамике, при которой система имеет периодические орбиты сколь угодно большого периода. Одна из таких орбит изображена на диаграмме. В критическом случае (f) отрезок EF притягивает все траектории.

(g) *Если $\beta = -1$, то все неподвижные точки являются устойчивыми. Параллелограмм*

$$\Sigma = \left\{(x, s): \; 2\frac{(1-\lambda)x - a}{1-\lambda+a} + 1 \le s \le 2\frac{(1-\lambda)(x-1)}{1-\lambda+a} + 1, \; |s| \le 1\right\} \tag{13}$$

с вершинами E, F, $Q = (1,1)$ и $-Q = (-1,-1)$ состоит из устойчивых орбит периода 2 и диагонали неподвижных точек EF. Все не неподвижные траектории притягиваются либо к E, либо к F, либо к одной из устойчивых периодических орбит параллелограмма Σ.

Особый интерес представляет случай (e). Более подробно он был рассмотрен в статье [22], где было доказано, что при данных значениях параметров система обладает хаотической динамикой.

В данное время Н. А. Бегуном ведется исследование разрывной гистерезисной динамики у систем подобного вида. Исследования далеки от завершения, но первые результаты уже опубликованы в статье [23]. Кроме того, в ней изучены метрические и топологические свойства отображений сдвига отрезков.

4. Проблема Айзермана для систем с дискретным временем. Рассмотрим двумерную дискретную систему

$$\begin{cases} x_{j+1} = y_j, \\ y_{j+1} = -\alpha y_j - \beta x_j - \phi(\sigma_j), \end{cases} \tag{14}$$

где $\sigma_j = ay_j + bx_j$, $j \in \mathbb{N}$. Предполагаем, что при $\phi(\sigma_j) \equiv 0$ система (14) асимптотически устойчива, т. е. $(\alpha, \beta) \in \Delta$, где $\Delta = \{(\alpha, \beta): \ |\alpha| - 1 < \beta < 1\}$. Для определенности считаем, что $a > 0$.

В статьях [30, 31] предполагается, что нелинейность $\phi(\sigma)$ удовлетворяет обобщенному условию Рауса — Гурвица и является 2- или 3-периодической, в работе [32] такая система исследуется в случае, когда на нелинейность накладывается еще одно дополнительное секторное условие. В работах в явном виде выписываются условия на параметры системы, при выполнении которых нелинейность может быть построена таким образом, что в системе возникает целое семейство неизолированных циклов. Предложен способ построения указанной нелинейности.

Обозначим через Ω множество таких $S = \text{const}$, для которых система (14) с линейной функцией $\phi(\sigma_j) = S\sigma_j$ асимптотически устойчива, т. е. верно неравенство $|\alpha + aS| - 1 < \beta + bS < 1$.

Нетрудно показать, что множество Ω есть интервал $(S_{\min},\ S_{\max})$ для каждого фиксированного набора параметров a, b, α, β. Значения $S_{\min}$ и $S_{\max}$ в явном виде выписаны в работе [30].

Положим в системе (14)

$$\phi(\sigma_j) = S_j\sigma_j = S_j(ay_j + bx_j), \tag{15}$$

где $S_j \in \Omega$, $j \in \mathbb{N}$. Заметим, что определенная таким образом нелинейность удовлетворяет обобщенным условиям Рауса — Гурвица.

В работе [30] доказано, что при выполнении условий

$$S = -\frac{\alpha}{a} \in \Omega, \ \ b^2 - ab\alpha + a^2\beta > 0 \tag{16}$$

существует 2-периодическая последовательность $\{S_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \Omega$, такая, что система (14) с нелинейностью вида (15) имеет 4-периодическое решение. Указанная последовательность выписана в явном виде, при этом S_1 и S_2 удовлетворяют равенству

$$(\alpha + aS_1)(\alpha + aS_2) + (1 - \beta - bS_1)(1 - \beta - bS_2) = 0, \tag{17}$$

и любое решение системы с начальными условиями $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, где $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq 0$, $y_1 = \frac{1-(\beta+bS_1)}{\alpha+aS_1}x_1$, 4-периодическое.

В работе [31] рассматривается система (14) с 3-периодической нелинейностью вида (15), лежащей в гурвицевом угле. Здесь в явном виде приведены условия на параметры системы, при выполнении которых 3-периодическая последовательность $\{S_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \Omega$ может быть построена так, что в системе (14) с указанной нелинейностью существует семейство 3-периодических решений (или циклов). Показано, что в этом случае S_1, S_2 и S_3 удовлетворяют равенству

$$\begin{aligned} &(\alpha + aS_1)(\beta + bS_3) + (\alpha + aS_2)(\beta + bS_1) + (\alpha + aS_3)(\beta + bS_2) = \\ &\quad = 1 + (\alpha + aS_1)(\alpha + aS_2)(\alpha + aS_3) + (\beta + bS_1)(\beta + bS_2)(\beta + bS_3), \end{aligned} \tag{18}$$

и любое решение системы с начальными условиями $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, где $x_1 \neq 0$, $y_1 = \frac{1-(\alpha+aS_2)(\beta+bS_1)}{(\alpha+aS_1)(\alpha+aS_2)-(\beta+bS_2)}x_1$, 3-периодическое.

Кроме того, в [31] приведены коэффициентные условия, при выполнении которых существует такая 3-периодическая последовательность $\{S_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \Omega$, что система (14) с нелинейностью вида (15) имеет семейство 6-периодических решений (или циклов). Здесь S_1, S_2 и S_3 удовлетворяют равенству

$$\begin{aligned} &(\alpha + aS_1)(\beta + bS_3) + (\alpha + aS_2)(\beta + bS_1) + (\alpha + aS_3)(\beta + bS_2) = \\ &\quad = -1 + (\alpha + aS_1)(\alpha + aS_2)(\alpha + aS_3) - (\beta + bS_1)(\beta + bS_2)(\beta + bS_3), \end{aligned} \tag{19}$$

и любое решение системы с начальными условиями $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, где $x_1 \neq 0$, $y_1 = -\frac{1+(\alpha+aS_2)(\beta+bS_1)}{(\alpha+aS_1)(\alpha+aS_2)-(\beta+bS_2)}x_1$, 6-периодическое.

В работе [32] рассматривается система (14) с нелинейностью (15), которая не только лежит в гурвицевом угле, но и удовлетворяет дополнительному секторному условию $0 \leq \phi(\sigma_j)\,\sigma_j < S_{\max}\sigma_j^2$ для всех $\sigma_j \in \mathbb{R}$. Такая постановка задачи встречается во многих прикладных работах, посвященных данной тематике.

В этом случае S_j в формуле (15) принадлежит множеству $\Theta = \Omega \cap \{S \geq 0\} = [0,\ S_{\max})$. Доказано, что при выполнении условий $\alpha < 0$, $\frac{a\left(\alpha(1+\beta)+(1-\beta)^2\right)}{\alpha^2+(2-\alpha)(1-\beta)} < b < -\frac{a(1-\beta)}{\alpha}$ существует такая 2-периодическая последовательность $\{S_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \Theta$, удовлетворяющая условиям (17), что система (14) с нелинейностью вида (15) имеет 4-периодические решения.

И если $\alpha < 1$, $\beta \neq 2\alpha - 1$, то существуют значения параметров a и b, для которых 3-периодическая последовательность $\{S_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \Theta$ может быть построена таким образом, что система (14) с нелинейностью (15) будет иметь 3-периодические решения.

В случае $\alpha < 0$, $(1+\alpha)\left((1-\beta)^2 + \alpha^2\right) > 2(1-\beta)$ или $\beta < -2\alpha - 1$ существуют значения параметров a и b, для которых 3-периодическая последовательность $\{S_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \Theta$ может быть построена так, что система (14) с указанной с нелинейностью будет иметь 6-периодические решения. Условия на параметры a, b, α, β, при выполнении которых система может иметь 3- или 6-периодическое решение, достаточно громоздки, они указаны в явном виде в работе [32]. В процессе построения последовательности показано, что ее члены S_1, S_2 и S_3 должны удовлетворять равенству (18) или равенству (19). Метод построения указанных последовательностей изложен в работах [30–32].

Литература

1. Бегун Н. А., Васильева Е. В., Звягинцева Т. Е., Ильин Ю. А. Обзор исследований по качественной теории дифференциальных уравнений в Санкт-Петербургском университете. I. Устойчивые периодические точки диффеоморфизмов с гомоклиническими точками и системы со слабо гиперболическими инвариантными множествами. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **11** (69), вып. 2, 211–227 (2024). https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.201

2. Бегун Н. А., Васильева Е. В., Звягинцева Т. Е., Ильин Ю. А. Обзор исследований по качественной теории дифференциальных уравнений в Санкт-Петербургском университете. II. Локальная качественная теория существенно нелинейных систем. *Вестник Санкт-Петербург-*

ского университета. Математика. Механика. Астрономия **11** (69), вып. 3, 401–418 (2024). https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.301

3. Андронов А. А., Баутин Н. Н. Об одном вырожденном случае общей задачи прямого регулирования. *Доклады АН СССР* **46** (7), 304–306 (1945).

4. Лурье А. И., Постников В. Н. К теории устойчивости регулируемых систем. *Прикладная математика и механика* **8** (3), 246–248 (1944).

5. Фельдбаум А. А. Простейшие релейные системы автоматического регулирования. *Автоматика и телемеханика* **10**, 249–260 (1949).

6. Плисс В. А. *Некоторые проблемы теории устойчивости движения в целом.* Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1958).

7. Якубович В. А. Частотные условия абсолютной устойчивости регулируемых систем с гистерезисными нелинейностями. *Доклады АН СССР* **149** (2), 288–291 (1963).

8. Якубович В. А. Частотные условия абсолютной устойчивости систем управления с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками. *Автоматика и телемеханика* **6**, 5–30 (1967).

9. Нелепин Р. А. *Методы исследования нелинейных систем автоматического управления.* Москва, Наука (1975).

10. Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А. *Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия.* Москва, Наука (1978).

11. Барабанов Н. Е., Якубович В. А. Абсолютная устойчивость систем регулирования с одной гистерезисной нелинейностью. *Автоматика и телемеханика* **12**, 5–11 (1979).

12. Шумафов М. М. Устойчивость систем дифференциальных уравнений с гистерезисными нелинейностями. *Вестник Адыгейского университета. Сер. 4.* **3** (106), 1–12 (2012).

13. Леонов Г. А., Шумафов М. М., Тешев В. А. *Устойчивость систем с гистерезисом.* Майкоп, Изд-во Адыг. ун-та (2012).

14. Звягинцева Т. Е. Критерии существования предельного цикла в двумерной системе с гистерезисом. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **1**, 18–26 (2012).

15. Звягинцева Т. Е. Глобальная устойчивость систем автоматического управления с гистерезисной нелинейностью. *Дифференциальные уравнения и процессы управления* **4**, 84–92 (2013).

16. Звягинцева Т. Е. Абсолютная устойчивость систем автоматического управления с гистерезисной нелинейностью. *Дифференциальные уравнения и процессы управления* **2**, 1–12 (2014).

17. Звягинцева Т. Е. Условия существования предельного цикла в одном классе систем с гистерезисной нелинейностью. *Дифференциальные уравнения и процессы управления* **3**, 1–10 (2014).

18. Звягинцева Т. Е., Плисс В. А. Условия глобальной устойчивости одной системы с гистерезисной нелинейностью. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **2**, 227–234 (2017). https://doi.org/10.21638/spbu.2017.206

19. Звягинцева Т. Е. Условия наличия предельного цикла в одной системе с гистерезисом. *Дифференциальные уравнения и процессы управления* **1**, 78–92 (2017).

20. Звягинцева Т. Е., Плисс В. А. Условия существования двух предельных циклов в системе с гистерезисной нелинейностью. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **3**, 402–410 (2018). https://doi.org/10.21638/11701/spbu.2018.304

21. Arnold M., Begun N., Gurevich P., Kwame E., Lamba H., Rachinskii D. Dynamics of discrete time systems with a hysteresis stop operator. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* **16**, 91–119 (2017).

22. Begun N., Kravetc P., Rachinskii D. Chaos in the saw map. *International Journal of Bifurcation and Chaos* **29** (2), 1930005 (2019). https://doi.org/10.1142/S0218127419300052

23. Kryzhevich S., Avrutin V., Begun N., Rachinskii D., Tajbakhsh K. Dynamics of Systems with a Discontinuous Hysteresis Operator and Interval Translation Maps. *Axioms* **10**, 80 (2021).

24. Айзерман М. А. Об одной проблеме, касающейся устойчивости «в большом» динамических систем. *Успехи математических наук* **4** (4), 187–188 (1949).

25. Плисс В. А. О проблеме Айзермана для случая системы трех дифференциальных уравнений. *Доклады АН СССР* **121** (3), 422–425 (1958).

26. Леонов Г. А. О проблеме Айзермана. *Автоматика и телемеханика* **7**, 37–49 (2009).

27. Леонов Г. А., Кузнецов Н. В., Брагин В. О. О проблемах Айзермана и Калмана. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **3**, 31–47 (2010).

28. Heath W. P., Carrasco J., de la Sen M. Second-order counterexample to the discrete-time Kalman conjecture. *Proceedings of the European Control Conference* 981–985, Linz (2015).

29. Heath W. P., Carrasco J., de la Sen M. Second-order counterexamples to the discrete-time Kalman conjecture. *Automatica* **60**, 140–144 (2015). https://doi.org/10.1109/ECC.2015.7330669

30. Звягинцева Т. Е. О проблеме Айзермана: коэффициентные условия существования цикла периода четыре в двумерной дискретной системе. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **7** (65), вып. 1, 50–59 (2020). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.105

31. Звягинцева Т. Е. О проблеме Айзермана: коэффициентные условия существования циклов периодов три и шесть в двумерной дискретной системе. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **7** (65), вып. 2, 309–318 (2020). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.213

32. Звягинцева Т. Е. Об условиях существования циклов в двумерной дискретной системе с секторной нелинейностью. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **8** (66), вып. 1, 63–72 (2021). https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.106

Статья поступила в редакцию 23 мая 2024 г.;
доработана 30 июня 2024 г.;
рекомендована к печати 29 августа 2024 г.

Контактная информация:

Бегун Никита Андреевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; https://orcid.org/0000-0001-5148-9676, n.begun@spbu.ru
Васильева Екатерина Викторовна — д-р физ.-мат. наук, проф.;
https://orcid.org/0000-0001-8068-0488, e.v.vasilieva@spbu.ru
Звягинцева Татьяна Евгеньевна — канд. физ.-мат. наук, доц.;
https://orcid.org/0000-0002-2735-9254, t.zvyagintceva@spbu.ru
Ильин Юрий Анатольевич — канд. физ.-мат. наук, доц.;
https://orcid.org/0000-0002-0400-3570, y.a.iliin@spbu.ru

Review of the research on the qualitative theory of differential equations at St. Petersburg University. III. Systems with hysteresis nonlinearities. Aizerman's problem for discrete-time systems*

N. A. Begun, E. V. Vasil'eva, T. E. Zvyagintseva, Yu. A. Iljin

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Begun N. A., Vasil'eva E. V., Zvyagintseva T. E., Iljin Yu. A. Review of the research on the qualitative theory of differential equations at St. Petersburg University. III. Systems with hysteresis nonlinearities. Aizerman's problem for discrete-time systems. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2025, vol. 12 (70), issue 1, pp. 3–17. https://doi.org/10.21638/spbu01.2025.101 (In Russian)

This paper is the third one in a series of publications devoted to an overview of the scientific research results achieved by the employees of the Department of Differential Equations at St. Petersburg University over the past three decades. The paper is focused on the results achieved by studying systems with hysteretic and sector nonlinearities, with both continuous and discrete time. The first part of this research presents the results obtained for second-order automatic control systems with continuous time. The global stability and existence of limit cycles in a system with one hysteretic nonlinearity are investigated in this part. The second part considers a discrete-time system that consists of a linear scalar

*See the second part: Begun N. A., Vasil'eva E. V., Zvyagintseva T. E., Iljin Yu. A. Review of the research on the qualitative theory of differential equations at St. Petersburg University. II. Locally qualitative analysis of essentially nonlinear systems. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2025, vol. 11 (69), issue 3, pp. 401–418. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.301 (In Russian)

equation and a one-dimensional stop operator. This system can also be presented as a two-dimensional piecewise linear mapping. An analysis of global dynamics and bifurcations in the system depending on two parameters is presented. One-dimensional mappings arising when considering the Poincare map are studied. In particular, the dynamics of the so-called "skew tent map" are fully analysed. In the third part of the paper, discrete second-order systems with nonlinearities under to the generalized Routh — Hurwitz conditions are considered (Aizerman problem). It is shown that a 2-periodic nonlinearity of the indicated type can be constructed in such a way that cycles of period four arise in the system. And a 3-periodic nonlinearity can be constructed in such a way that cycles of period three or cycles of period six appear in the system.

Keywords: nonlinearity of hysteresis type, absolute stability, limit cycle, Aizerman problem, bifurcations, dynamical systems, generalized Routh — Hurwitz conditions, attractor.

References

1. Begun N., Vasil'eva E., Zvyagintseva T., Iljin Y. Review of the research on the qualitative theory of differential equations at St. Petersburg University. I. Stable periodic points of diffeormorphisms with homoclinic points, systems with weakly hyperbolic invariant sets. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **11** (69), iss. 2, 211–227 (2024). https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.201 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **57** (2), 141–151 (2024). https://doi.org/10.1134/S106345412470002X].

2. Begun N., Vasil'eva E., Zvyagintseva T., Iljin Y. Review of the research on the qualitative theory of differential equations at St. Petersburg University. II. Local qualitative theory of essentially nonlinear systems. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, **11** (69), iss. 3, 401–418 (2024). https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.301 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **57** (3), 271–282 (2024). https://doi.org/10.1134/S1063454124700134].

3. Andronov A. A., Bautin N. N. On a Degenerate Case of the General Problem of Direct Control. *Doklady Akademii nauk SSSR* **46** (7), 304–306 (1945). (In Russian)

4. Lurie A. I., Postnikov V. N. On the theory of stability of controlled systems. *Applied mathematics and mechanics* **8** (3), 246–248 (1944). (In Russian)

5. Feldbaum A. A. The simplest relay systems of automatic control. *Automatica and telemechanica* **10**, 249–260 (1949). (In Russian)

6. Pliss V. A. *Certain problems in the theory of stability of motion in the whole.* Leningrad, Leningrad University Press (1958). (In Russian) [Eng. transl.: Pliss V. A. *Certain problems in the theory of stability of motion in the whole.* Washington, National Aeronautics and Space Administration (1965)].

7. Yakubovich V. A. Frequency conditions for the absolute stability of controlled systems with hysteresis nonlinearities. *Doklady Akademii nauk SSSR* **149** (2), 288–291 (1963). (In Russian)

8. Yakubovich V. A. Frequency conditions for the absolute stability of control systems with multiple non-linear or linear non-stationary units. *Automatica and telemechanica* **6**, 5–30 (1967). (In Russian)

9. Nelepin R. A. *Methods for the study of nonlinear systems of automatic control.* Moscow, Nauka Publ. (1975). (In Russian)

10. Gelig A. H., Leonov G. A., Yakubovich V. A. *Stability of nonlinear systems with a nonunique equilibrium state.* Moscow, Nauka Publ. (1978). (In Russian)

11. Barabanov N. E., Yakubovich V. A. Absolute stability of control systems with one hysteresis nonlinearity. *Automatica and telemechanica* **12**, 5–11 (1979). (In Russian)

12. Shumafov M. M. Stability of systems of differential equations with hysteresis nonlinearities. *Vestnik of Adyghe University, ser. 4.* **3** (106), 1–12 (2012). (In Russian)

13. Leonov G. A., Shumafov M. M., Teshev V. A. *Stability of systems with a hysteresis.* Maikop, Adyghe University Publ. (2012). (In Russian)

14. Zvyagintseva T. E. Criteria for the existence of a limit cycle in a two-dimensional system with hysteresis. *Vestnik St Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **1**, 18–26 (2012). (In Russian)

15. Zvyagintseva T. E. Global stability of automatic control systems with hysteresis nonlinearity. *Differentsial'nye uravneniia i protsessy upravleniia* **4**, 84–92 (2013). (In Russian)

16. Zvyagintseva T. E. Absolute stability of control systems with hysteresis nonlinearity. *Differentsial'nye uravneniia i protsessy upravleniia* **2**, 1–12 (2014). (In Russian)

17. Zvyagintseva T. E. Conditions for the existence of a limit cycle in a class of systems with hysteresis nonlinearity. *Differentsial'nye uravneniia i protsessy upravleniia* **3**, 1–10 (2014). (In Russian)

18. Zvyagintseva T. E., Pliss V. A. Global stability conditions of a system with hysteresis nonlinearity. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **2**, iss. 2, 227–235 (2017). https://doi.org/10.21638/spbu.2017.206 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **50**, iss. 2, 138–144 (2017). https://doi.org/10.3103/S1063454117020157].

19. Zvyagintseva T. E. Conditions for the Limit Cycle Existence in a System with Hysteresis. *Differentsial'nye uravneniia i protsessy upravleniia* **1**, 78–92 (2017). (In Russian)

20. Zvyagintseva T. E., Pliss V. A. Conditions for the existence of two limit cycles in a system with hysteresis nonlinearity. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **3**, iss. 3, 402–410 (2018). https://doi.org/10.21638/11701/spbu.2018.304 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **51**, iss. 3, 237–243 (2018). https://doi.org/10.3103/S1063454118030135].

21. Arnold M., Begun N., Gurevich P., Kwame E., Lamba H., Rachinskii D. Dynamics of discrete time systems with a hysteresis stop operator. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* **16**, 91—119 (2017). https://doi.org/10.1137/16M1073522

22. Begun N., Kravetc P., Rachinskii D. Chaos in the saw map. *International Journal of Bifurcation and Chaos* **29** (2), 1930005 (2019). https://doi.org/10.1142/S0218127419300052

23. Kryzhevich S., Avrutin V., Begun N., Rachinskii D., Tajbakhsh K. Dynamics of Systems with a Discontinuous Hysteresis Operator and Interval Translation Maps. *Axioms* **10**, 80 (2021).

24. Aizerman M. A. About one problem concerning the stability "in large" of dynamic systems. *Uspekhi matematicheskikh nauk* **4** (4), 187–188 (1949). (In Russian)

25. Pliss B. A. About Aizerman's problem for case of system with three differential equations. *Doklady Akademii nauk SSSR* **21** (3), 422–425 (1958). (In Russian)

26. Leonov G. A. About Aizerman conjecture. *Automatica and telemechanica* **7**, 37–49 (2009). (In Russian)

27. Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Bragin V. O. On problems of Aizerman and Kalman. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **3**, 31–47 (2010). (In Russian)

28. Heath W. P., Carrasco J., de la Sen M. Second-order counterexample to the discrete-time Kalman conjecture. *Proceedings of the European Control Conference* 981–985, Linz (2015).

29. Heath W. P., Carrasco J., de la Sen M. Second-order counterexamples to the discrete-time Kalman conjecture. *Automatica* **60**, 140–144 (2015). https://doi.org/10.1109/ECC.2015.7330669

30. Zvyagintseva T. E. On the Aizerman problem: coefficient conditions for the existence of a four-period cycle in a second-order discrete-time system. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **7** (65), iss. 1, 50–59 (2020). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.105 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **53**, iss. 1, 37–44 (2020). https://doi.org/10.1134/S1063454120010161].

31. Zvyagintseva T. E. On the Aizerman problem: coefficient conditions for the existence of three- and six-period cycles in a second-order discrete-time system. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **7** (65), iss. 2, 309–318 (2020). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.213 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **53**, iss. 2, 205–213 (2020). https://doi.org/10.1134/S106345412002017X].

32. Zvyagintseva T. E. On the conditions for the existence of cycles in a second-order discrete-time system with a sector nonlinearity. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **8** (66), iss. 1, 63–72 (2021). https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.106 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **54**, iss. 1, 50–57 (2021). https://doi.org/10.1134/S1063454121010131].

Received: May 23, 2024
Revised: June 30, 2024
Accepted: August 29, 2024

Authors' information:

Nikita A. Begun — https://orcid.org/0000-0001-5148-9676, n.begun@spbu.ru
Ekaterina V. Vasil'eva — https://orcid.org/0000-0001-8068-0488, e.v.vasilieva@spbu.ru
Tatiana E. Zvyagintseva — https://orcid.org/0000-0002-2735-9254, t.zvyagintceva@spbu.ru
Yuri A. Iljin — https://orcid.org/0000-0002-0400-3570, y.a.iliin@spbu.ru