

МАТЕМАТИКА

УДК 51-72+531.64+539.311+539.87

MSC 74G65, 74N99, 74P99

Множество всех состояний равновесия двухфазной термоупругой среды. Ч. 2. Зависимость множества всех состояний равновесия двухфазной термоупругой среды от температуры**Е. А. Ефимов*

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
Институт проблем машиноведения РАН,
Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, Большой пр. В. О., 61

Для цитирования: *Ефимов Е. А.* Множество всех состояний равновесия двухфазной термоупругой среды. Ч. 2. Зависимость множества всех состояний равновесия двухфазной термоупругой среды от температуры // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2025. Т. 12 (70). Вып. 1. С. 18–36.
<https://doi.org/10.21638/spbu01.2025.102>

Настоящая статья является второй частью работы, посвященной исследованию множества всех состояний равновесия двухфазной термоупругой среды. Под состоянием равновесия двухфазной упругой среды понимается упорядоченная пара: поле перемещений и пространственное распределение фаз, доставляющие глобальный минимум функционалу свободной энергии. Для термоупругих сред плотности свободной энергии получаются добавлением к плотностям энергии деформаций слагаемых, связанных с температурными напряжениями каждой из фаз, и слагаемых, связанных с энергиями каждой из фаз в ненапряженном состоянии при нулевых тензорах коэффициентов температурных напряжений. При нулевых граничных условиях Дирихле на поле перемещений, при некоторых ограничениях на тензоры модулей упругости,

* Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации для ИПМаш РАН (тема № 124041500009-8).

Первую часть статьи см.: *Ефимов Е. А.* Множество всех состояний равновесия двухфазной термоупругой среды. Ч. 1. Существование состояний равновесия двухфазной термоупругой среды // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 4. С. 706–717. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.407>

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2025

тензоры деформаций, обеспечивающие ненапряженное состояние каждой из фаз при начальной температуре, тензоры коэффициентов температурных напряжений и слагаемые в определении плотностей свободной энергии, связанные с энергиями каждой из фаз в ненапряженном состоянии при нулевых тензорах коэффициентов температурных напряжений, найдена и исследована зависимость множества всех состояний равновесия двухфазной термоупругой среды от температуры.

Ключевые слова: двухфазная термоупругая среда, функционал свободной энергии, плотность свободной энергии, пространственное распределение фаз, состояние равновесия.

1. Введение. Многофазная упругая среда — это упругая среда, обладающая способностью менять свой фазовый состав под воздействием напряжений и температуры. Далее в статье рассматриваются среды, допускающие однофазные и двухфазные состояния.

Пусть двухфазная упругая среда занимает непустую ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^m$; $\mathcal{F}^\pm: \mathbb{R}^{m \times m} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — такие функции, что для любого допустимого поля перемещений $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ и любого значения температуры $\theta \in \mathbb{R}$ функции $\mathcal{F}^\pm(\nabla u, \theta)$ являются плотностями свободной энергии каждой из фаз; тогда функционал свободной энергии двухфазной упругой среды определяется равенством

$$I[u, \chi, \theta] = \int_{\Omega} \{ \chi \mathcal{F}^+(\nabla u, \theta) + (1 - \chi) \mathcal{F}^-(\nabla u, \theta) \} dx, \quad u \in \mathbb{X}, \quad \chi \in \mathbb{Z}', \quad \theta \in \mathbb{R}; \quad (1)$$

где $\mathbb{X}$ — множество допустимых полей перемещений¹,

$$\mathbb{Z}' = \{ \chi \in L_\infty(\Omega) : \text{при почти всех } x \in \Omega \quad \chi^2(x) = \chi(x) \}$$

— множество допустимых пространственных распределений фаз. Подразумевается, что для пространственного распределения фаз $\chi \in \mathbb{Z}'$ в тех точках $x \in \Omega$, для которых $\chi(x) = 1$, расположена фаза «+», а в тех точках $x \in \Omega$, для которых $\chi(x) = 0$, расположена фаза «-».

Под состоянием равновесия двухфазной упругой среды при температуре $\theta \in \mathbb{R}$ понимается решение вариационной задачи

$$I[u_\theta, \chi_\theta, \theta] = \inf_{\substack{u \in \mathbb{X} \\ \chi \in \mathbb{Z}'}} I[u, \chi, \theta], \quad u_\theta \in \mathbb{X}, \quad \chi_\theta \in \mathbb{Z}'. \quad (2)$$

В отличие от композитных сред, в (1), (2) пространственное распределение фаз $\chi \in \mathbb{Z}'$ не фиксировано: равновесное пространственное распределение фаз $\chi_\theta \in \mathbb{Z}'$ (как и равновесное поле перемещений $u_\theta \in \mathbb{X}$) получается минимизацией функционала (1) при температуре $\theta \in \mathbb{R}$.

Сформулированный подход к определению состояний равновесия двухфазной упругой среды содержится, например, в [1]. Общий вид плотности свободной энергии термоупругой среды дан в [2].

Целью настоящей работы является изучение зависимости множества всех состояний равновесия двухфазной изотропной термоупругой среды от температуры.

¹Конкретизация будет дана далее.

2. Постановка задачи и формулировка результатов. Прежде чем сформулировать постановку задачи, введем необходимые обозначения. В пространстве $\mathbb{R}^{m \times m}$ со скалярным произведением и нормой

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \text{tr}(\alpha \beta^*), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^{m \times m}; \quad |M| = \langle M, M \rangle^{\frac{1}{2}}, \quad M \in \mathbb{R}^{m \times m},$$

введем подпространство

$$\mathbb{R}_s^{m \times m} = \{M \in \mathbb{R}^{m \times m} : M^* = M\}$$

и фиксируем два линейных отображения $A^\pm : \mathbb{R}_s^{m \times m} \longrightarrow \mathbb{R}_s^{m \times m}$ со свойствами

$$\text{для любых } \xi, \eta \in \mathbb{R}_s^{m \times m} \quad \langle A^\pm \xi, \eta \rangle = \langle \xi, A^\pm \eta \rangle; \quad (3)$$

$$\text{существует } \nu \in (0; 1) \text{ такое, что для любого } \xi \in \mathbb{R}_s^{m \times m} \quad \nu |\xi|^2 \leq \langle A^\pm \xi, \xi \rangle \leq \nu^{-1} |\xi|^2. \quad (4)$$

Положим

$$F^\pm(M) = \langle A^\pm(M^s - \zeta^\pm), M^s - \zeta^\pm \rangle, \quad M \in \mathbb{R}^{m \times m}; \quad (5)$$

где $M^s = \frac{1}{2}(M + M^*), \quad M \in \mathbb{R}^{m \times m}; \quad \zeta^\pm \in \mathbb{R}_s^{m \times m}.$

Для поля перемещений $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ функция $\nabla u^s : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_s^{m \times m}$ задает соответствующий ему тензор малых деформаций, а функции $F^\pm(\nabla u) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ (в квадратичном приближении) задают плотности энергии деформации каждой из фаз. В (5) величины $\zeta^\pm$ играют роль тензоров деформаций, обеспечивающих ненапряженное состояние каждой из фаз при начальной температуре, а величины $2A^\pm$ определяют тензоры модулей упругости каждой из фаз.

Для термоупругих сред плотности свободной энергии $\mathcal{F}^\pm(\nabla u, \theta)$ получаются добавлением к плотностям энергии деформации $F^\pm(\nabla u)$ слагаемых, связанных с температурными напряжениями каждой из фаз, и слагаемых, связанных с энергиями каждой из фаз в ненапряженном состоянии при нулевых тензорах коэффициентов температурных напряжений:

$$\mathcal{F}^\pm(M, \theta) = F^\pm(M) - 2 \langle M^s, \beta^\pm \rangle \theta + \gamma^\pm(\theta), \quad M \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad \theta \in \mathbb{R}; \quad (6)$$

где $\beta^\pm \in \mathbb{R}_s^{m \times m}, \quad \gamma^\pm : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$

В качестве множества допустимых полей перемещений возьмем

$$\mathbb{X} = \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega; \mathbb{R}^m). \quad (7)$$

Принадлежность поля перемещений u множеству $\mathbb{X}$ означает, что оно удовлетворяет граничному условию $u|_{\partial\Omega} = 0$ и непрерывно при переходе через границу раздела фаз.

Будем рассматривать двухфазную термоупругую среду при следующих условиях:

$$A^\pm = a^\pm \text{id} + b^\pm i \langle \cdot, i \rangle; \quad (8)$$

$$a^\pm + b^\pm m > 0; \quad (9)$$

$$a^\pm > 0, \quad \text{при } m > 1;$$

$$[A\zeta] = c i, \quad c \in \mathbb{R}; \quad (10)$$

$$a^+ = a^-; \quad (11)$$

$$[\beta] = \varkappa i, \quad \varkappa \in \mathbb{R}; \quad (12)$$

$$[\gamma(\theta)] = \gamma_0 + 2\gamma_1\theta + \gamma_2\theta^2, \quad \theta \in \mathbb{R}; \quad \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}, \quad (13)$$

где id — единичный оператор в пространстве $\mathbb{R}_s^{m \times m}$; i — единичная $m \times m$ -матрица; $[\alpha] = \alpha^+ - \alpha^-$. Очевидно, что операторы (8) удовлетворяют условию (3); также очевидно, что операторы (8) удовлетворяют и условию (4) тогда и только тогда, когда параметры $a^\pm, b^\pm$ удовлетворяют условию (9). Параметры $a^\pm, b^\pm$, задающие операторы $A^\pm$ формулами (8), связаны с параметрами Ламе $\mu^\pm, \lambda^\pm$ равенствами:

$$\mu^\pm = a^\pm, \quad \lambda^\pm = 2b^\pm.$$

При условии (11) будем использовать обозначение $a = a^\pm$.

Введем следующие обозначения:

$$\alpha(Q, c) = \frac{c}{(a+b^-)Q + (a+b^+)(1-Q)}, \quad Q \in [0; 1], \quad c \in \mathbb{R};$$

$$\bar{c}(\theta) = c + \varkappa\theta, \quad \theta \in \mathbb{R};$$

$$\theta_0^\pm = -\frac{(a+b^\pm)\gamma_1 \mp c\varkappa}{(a+b^\pm)\gamma_2 \mp \varkappa^2}, \quad d^\pm = \frac{\{(a+b^\pm)\gamma_1 \mp c\varkappa\}^2}{\{(a+b^\pm)\gamma_2 \mp \varkappa^2\}^2} - \frac{(a+b^\pm)([\langle A\zeta, \zeta \rangle] + \gamma_0) \mp c^2}{(a+b^\pm)\gamma_2 \mp \varkappa^2},$$

при $\gamma_2 \neq \pm \frac{\varkappa^2}{a+b^\pm}$;

$$\theta_\pm^\pm = \theta_0^\pm - \sqrt{d^\pm}, \quad \theta_\mp^\pm = \theta_0^\pm + \sqrt{d^\pm}, \quad \text{при } \gamma_2 \neq \pm \frac{\varkappa^2}{a+b^\pm}, \quad d^\pm \geq 0;$$

$$\theta_*^\pm = -\frac{1}{2} \frac{(a+b^\pm)([\langle A\zeta, \zeta \rangle] + \gamma_0) \mp c^2}{(a+b^\pm)\gamma_1 \mp c\varkappa}, \quad \text{при } \gamma_2 = \pm \frac{\varkappa^2}{a+b^\pm}, \quad \gamma_1 \neq \pm \frac{c\varkappa}{a+b^\pm}.$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. При условиях (7), (8)–(13) для любого $\theta \in \mathbb{R}$ задача (2) для функционала (1) с плотностями свободной энергии, задающимися формулами (6), разрешима, и множество всех ее решений совпадает с множеством всех решений задачи

$$\text{div } u_\theta = \alpha(Q_\theta, \bar{c}(\theta))(\chi_\theta - Q_\theta), \quad \nabla u_\theta^a = 0, \quad \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \chi_\theta dx = Q_\theta; \quad u_\theta \in \mathbb{X}, \quad \chi_\theta \in \mathbb{Z}'; \quad (14)$$

где

$$M^a = \frac{1}{2}(M - M^*), \quad M \in \mathbb{R}^{m \times m};$$

а число $Q_\theta \in [0; 1]$ — равновесная объемная доля фазы «+», в зависимости от параметров $a, b^\pm, c, \varkappa, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ задающаяся следующим образом:

(1) пусть $\varkappa \neq 0$

(1.1) пусть $\gamma_2 < -\frac{\varkappa^2}{a+b^-}$

(1.1.1) пусть $d^- < 0$, тогда $Q_\theta = 1$;

(1.1.2) пусть $d^- = 0$

(1.1.2.1) пусть $\theta_0^- \neq \theta_0^+$, тогда $Q_\theta = 1$;

(1.1.2.2) пусть $\theta_0^- = \theta_0^+$, тогда $\theta_0^\pm = -\frac{c}{\varkappa}$ ($=: \theta_0$)

– $Q_\theta = 1 \iff \theta \in (-\infty; \theta_0) \cup (\theta_0; +\infty)$;

– Q_θ – любой элемент отрезка $[0; 1] \iff \theta = \theta_0$;

(1.1.3) пусть $d^- > 0$

(1.1.3.1) пусть $d^+ < 0$, тогда

– $Q_\theta = 1 \iff \theta \in (-\infty; \theta_-^-] \cup [\theta_+^-; +\infty)$;

– Q_θ определяется равенством (15) $\iff \theta \in [\theta_-^-; \theta_+^-]$;

при этом $\theta \in [\theta_-^-; \theta_+^-] \implies Q_\theta \in (0; 1]$;

(1.1.3.2) пусть $d^+ = 0$, тогда $\theta_0^- \neq \theta_0^+$, $\theta_0^\pm \in (\theta_-^-; \theta_+^-)$

– $Q_\theta = 1 \iff \theta \in (-\infty; \theta_-^-] \cup [\theta_+^-; +\infty)$;

– Q_θ определяется равенством (15) $\iff \theta \in [\theta_-^-; \theta_+^-]$;

при этом $Q_\theta = 0 \iff \theta = \theta_0^\pm$;

(1.1.3.3) пусть $d^+ > 0$, тогда $\theta_-^- \leq \theta_-^+ < \theta_+^+ \leq \theta_+^-$

(1.1.3.3.1) пусть $\theta_-^- \neq \theta_-^+$, $\theta_+^- \neq \theta_+^+$, тогда

– $Q_\theta = 1 \iff \theta \in (-\infty; \theta_-^-] \cup [\theta_+^-; +\infty)$;

– Q_θ определяется равенством (15) $\iff \theta \in [\theta_-^-; \theta_-^+] \cup [\theta_+^+; \theta_+^-]$;

– $Q_\theta = 0 \iff \theta \in [\theta_-^+; \theta_+^+]$;

(1.1.3.3.2) пусть $\theta_-^- = \theta_-^+$, тогда $\theta_-^\pm = -\frac{c}{\varkappa}$ ($=: \theta_-$), $\theta_+^- \neq \theta_+^+$, $\theta_+^\pm = \theta_0^\pm + \{\theta_0^\pm - \theta_-\}$;

– $Q_\theta = 1 \iff \theta \in (-\infty; \theta_-) \cup [\theta_+^-; +\infty)$;

– Q_θ – любой элемент отрезка $[0; 1] \iff \theta = \theta_-$;

– $Q_\theta = 0 \iff \theta \in (\theta_-; \theta_+^+]$;

– Q_θ определяется равенством (15) $\iff \theta \in [\theta_+^+; \theta_+^-]$;

(1.1.3.3.3) пусть $\theta_+^- = \theta_+^+$, тогда $\theta_+^\pm = -\frac{c}{\varkappa}$ ($=: \theta_+$), $\theta_-^- \neq \theta_-^+$, $\theta_-^\pm = \theta_0^\pm + \{\theta_0^\pm - \theta_+\}$;

– $Q_\theta = 1 \iff \theta \in (-\infty; \theta_-^-] \cup (\theta_+; +\infty)$;

– Q_θ определяется равенством (15) $\iff \theta \in [\theta_-^-; \theta_-^+]$;

– $Q_\theta = 0 \iff \theta \in [\theta_-^+; \theta_+)$;

– Q_θ – любой элемент отрезка $[0; 1] \iff \theta = \theta_+$;

(1.2) пусть $\gamma_2 = -\frac{\varkappa^2}{a+b^-}$

(1.2.1) пусть $d^+ < 0$

(1.2.1.1) пусть $\gamma_1 < -\frac{c\varkappa}{a+b^-}$, тогда

- Q_θ определяется равенством (15) $\iff \theta \in (-\infty; \theta_*^-]$;
при этом $\theta \in (-\infty; \theta_*^-] \implies Q_\theta \in (0; 1]$;
- $Q_\theta = 1 \iff \theta \in [\theta_*^-; +\infty)$;
- (1.2.1.2) пусть $\gamma_1 = -\frac{c\kappa}{a+b^-}$, тогда $Q_\theta = 1$;
- (1.2.1.3) пусть $\gamma_1 > -\frac{c\kappa}{a+b^-}$, тогда
 - $Q_\theta = 1 \iff \theta \in (-\infty; \theta_*^-]$;
 - Q_θ определяется равенством (15) $\iff \theta \in [\theta_*^-; +\infty)$;
при этом $\theta \in [\theta_*^-; +\infty) \implies Q_\theta \in (0; 1]$;
- (1.2.2) пусть $d^+ = 0$
 - (1.2.2.1) пусть $\gamma_1 < -\frac{c\kappa}{a+b^-}$, тогда $\theta_0^+ < \theta_*^-$
 - Q_θ определяется равенством (15) $\iff \theta \in (-\infty; \theta_*^-]$;
при этом $Q_\theta = 0 \iff \theta = \theta_0^+$;
 - $Q_\theta = 1 \iff \theta \in [\theta_*^-; +\infty)$;
 - (1.2.2.2) пусть $\gamma_1 = -\frac{c\kappa}{a+b^-}$, тогда $\theta_0^+ = -\frac{c}{\kappa}$
 - $Q_\theta = 1 \iff \theta \in \left(-\infty; -\frac{c}{\kappa}\right) \cup \left(-\frac{c}{\kappa}; +\infty\right)$;
 - Q_θ – любой элемент отрезка $[0; 1] \iff \theta = -\frac{c}{\kappa}$;
 - (1.2.2.3) пусть $\gamma_1 > -\frac{c\kappa}{a+b^-}$, тогда $\theta_*^- < \theta_0^+$
 - $Q_\theta = 1 \iff \theta \in (-\infty; \theta_*^-]$;
 - Q_θ определяется равенством (15) $\iff \theta \in [\theta_*^-; +\infty)$;
при этом $Q_\theta = 0 \iff \theta = \theta_0^+$;
- (1.2.3) пусть $d^+ > 0$
 - (1.2.3.1) пусть $\gamma_1 < -\frac{c\kappa}{a+b^-}$, тогда $\theta_+^+ \leq \theta_*^-$
 - (1.2.3.1.1) пусть $\theta_+^+ < \theta_*^-$, тогда
 - Q_θ определяется равенством (15) $\iff \theta \in (-\infty; \theta_+^+] \cup [\theta_+^+; \theta_*^-]$;
 - $Q_\theta = 0 \iff \theta \in [\theta_+^+; \theta_+^+]$;
 - $Q_\theta = 1 \iff \theta \in [\theta_*^-; +\infty)$;
 - (1.2.3.1.2) пусть $\theta_+^+ = \theta_*^-$, тогда $\theta_+^+, \theta_*^- = -\frac{c}{\kappa}$
 - Q_θ определяется равенством (15) $\iff \theta \in (-\infty; \theta_+^+]$;
 - $Q_\theta = 0 \iff \theta \in \left[\theta_+^+; -\frac{c}{\kappa}\right)$;
 - Q_θ – любой элемент отрезка $[0; 1] \iff \theta = -\frac{c}{\kappa}$;
 - $Q_\theta = 1 \iff \theta \in \left(-\frac{c}{\kappa}; +\infty\right)$;
 - (1.2.3.2) пусть $\gamma_1 = -\frac{c\kappa}{a+b^-}$, тогда
 - Q_θ определяется равенством (15) $\iff \theta \in (-\infty; \theta_+^+] \cup [\theta_+^+; +\infty)$;
при этом $\theta \in (-\infty; \theta_+^+] \cup [\theta_+^+; +\infty) \implies Q_\theta \in [0; 1]$;

- $Q_\theta = 0 \iff t \in [\theta_-^+; \theta_+^+];$
- (1.2.3.3) пусть $\gamma_1 > -\frac{c\kappa}{a+b^-}$, тогда $\theta_*^- \leq \theta_-^+.$
- (1.2.3.3.1) пусть $\theta_*^- < \theta_-^+$, тогда
- $Q_\theta = 1 \iff \theta \in (-\infty; \theta_*^-];$
- Q_θ определяется равенством (15) $\iff \theta \in [\theta_*^-; \theta_-^+] \cup [\theta_+^+; +\infty);$
- $Q_\theta = 0 \iff \theta \in [\theta_-^+; \theta_+^+];$
- (1.2.3.3.2) пусть $\theta_-^+ = \theta_*^-$, тогда $\theta_*^-, \theta_-^+ = -\frac{c}{\kappa}$
- $Q_\theta = 1 \iff \theta \in (-\infty; -\frac{c}{\kappa});$
- Q_θ – любой элемент отрезка $[0; 1] \iff \theta = -\frac{c}{\kappa};$
- $Q_\theta = 0 \iff \theta \in (-\frac{c}{\kappa}; \theta_+^+];$
- Q_θ определяется равенством (15) $\iff \theta \in [\theta_+^+; +\infty);$
- (1.3) пусть $-\frac{\kappa^2}{a+b^-} < \gamma_2 < \frac{\kappa^2}{a+b^+}$
- (1.3.1) пусть $d^- \leq 0, d^+ \leq 0$, тогда $d^\pm = 0, \theta_0^\pm = -\frac{c}{\kappa} (=:\theta_0)$
- Q_θ определяется равенством (15) $\iff \theta \in (-\infty; \theta_0) \cup (\theta_0; +\infty);$
при этом $\theta \in (-\infty; \theta_0) \cup (\theta_0; +\infty) \implies Q_\theta \in (0; 1);$
- Q_θ – любой элемент отрезка $[0; 1] \iff \theta = \theta_0;$
- (1.3.2) пусть $d^- < 0, d^+ > 0$, тогда $\theta_-^+ < \theta_+^+$
- Q_θ определяется равенством (15) $\iff \theta \in (-\infty; \theta_-^+] \cup [\theta_+^+; +\infty);$
при этом $\theta \in (-\infty; \theta_-^+] \cup [\theta_+^+; +\infty) \implies Q_\theta \in [0; 1];$
- $Q_\theta = 0 \iff \theta \in [\theta_-^+; \theta_+^+];$
- (1.3.3) пусть $d^- = 0, d^+ > 0$, тогда $\theta_0^- \in (-\infty; \theta_-^+) \cup (\theta_+^+; +\infty)$
- Q_θ определяется равенством (15) $\iff \theta \in (-\infty; \theta_-^+] \cup [\theta_+^+; +\infty);$
при этом $Q_\theta = 1 \iff \theta = \theta_0^-;$
- $Q_\theta = 0 \iff \theta \in [\theta_-^+; \theta_+^+];$
- (1.3.4) пусть $d^- > 0, d^+ < 0$, тогда $\theta_-^- < \theta_+^-$
- Q_θ определяется равенством (15) $\iff \theta \in (-\infty; \theta_-^-] \cup [\theta_+^-; +\infty);$
при этом $\theta \in (-\infty; \theta_-^-] \cup [\theta_+^-; +\infty) \implies Q_\theta \in (0; 1];$
- $Q_\theta = 1 \iff \theta \in [\theta_-^-; \theta_+^-];$
- (1.3.5) пусть $d^- > 0, d^+ = 0$, тогда $\theta_0^+ \in (-\infty; \theta_-^-) \cup (\theta_+^-; +\infty)$
- Q_θ определяется равенством (15) $\iff \theta \in (-\infty; \theta_-^-] \cup [\theta_+^-; +\infty);$
при этом $Q_\theta = 0 \iff \theta = \theta_0^+;$
- $Q_\theta = 1 \iff \theta \in [\theta_-^-; \theta_+^-];$
- (1.3.6) пусть $d^- > 0, d^+ > 0$, тогда

$$\theta_-^- < \theta_+^- \leq \theta_-^+ < \theta_+^+ \quad \text{или} \quad \theta_-^+ < \theta_+^+ \leq \theta_-^- < \theta_+^-$$

- (1.3.6.1) пусть $\theta_-^- < \theta_+^- \leq \theta_-^+ < \theta_+^+$

(1.3.6.1.1) пусть $\theta_+^- < \theta_-^+$, тогда

- Q_θ определяется равенством (15) $\iff \theta \in (-\infty; \theta_-^-] \cup [\theta_+^+; +\infty)$;
- $Q_\theta = 1 \iff \theta \in [\theta_-^-; \theta_+^+]$;
- $Q_\theta = 0 \iff \theta \in [\theta_-^+; \theta_+^-]$;

(1.3.6.1.2) пусть $\theta_-^+ = \theta_+^-$, тогда $\theta_+^+, \theta_-^- = -\frac{c}{\varkappa}$ ($=: \theta_0$)

- Q_θ определяется равенством (15) $\iff \theta \in (-\infty; \theta_-^-] \cup [\theta_+^+; +\infty)$;
- $Q_\theta = 1 \iff \theta \in [\theta_-^-; \theta_0]$;
- Q_θ – любой элемент отрезка $[0; 1] \iff \theta = \theta_0$;
- $Q_\theta = 0 \iff \theta \in (\theta_0; \theta_+^+]$;

(1.3.6.2) пусть $\theta_-^+ < \theta_+^+ \leq \theta_-^- < \theta_+^-$

(1.3.6.2.1) пусть $\theta_+^+ < \theta_-^-$, тогда

- Q_θ определяется равенством (15) $\iff \theta \in (-\infty; \theta_-^+] \cup [\theta_+^+; \theta_-^-] \cup [\theta_+^-; +\infty)$;
- $Q_\theta = 0 \iff \theta \in [\theta_-^+; \theta_+^+]$;
- $Q_\theta = 1 \iff \theta \in [\theta_-^-; \theta_+^-]$;

(1.3.6.2.2) пусть $\theta_+^+ = \theta_-^-$, тогда $\theta_+^+, \theta_-^- = -\frac{c}{\varkappa}$ ($=: \theta_0$)

- Q_θ определяется равенством (15) $\iff \theta \in (-\infty; \theta_-^+] \cup [\theta_+^+; +\infty)$;
- $Q_\theta = 0 \iff \theta \in [\theta_-^+; \theta_0]$;
- Q_θ – любой элемент отрезка $[0; 1] \iff \theta = \theta_0$;
- $Q_\theta = 1 \iff \theta \in (\theta_0; \theta_+^-]$;

(1.4) пусть $\gamma_2 = \frac{\varkappa^2}{a + b^+}$

(1.4.1) пусть $d^- < 0$

(1.4.1.1) пусть $\gamma_1 < \frac{c\varkappa}{a + b^+}$, тогда

- $Q_\theta = 0 \iff \theta \in (-\infty; \theta_*^+]$;
- Q_θ определяется равенством (15) $\iff \theta \in [\theta_*^+; +\infty)$;
- при этом $\theta \in [\theta_*^+; +\infty) \implies Q_\theta \in [0; 1]$;

(1.4.1.2) пусть $\gamma_1 = \frac{c\varkappa}{a + b^+}$, тогда $Q_\theta = 0$;

(1.4.1.3) пусть $\gamma_1 > \frac{c\varkappa}{a + b^+}$, тогда

- Q_θ определяется равенством (15) $\iff \theta \in (-\infty; \theta_*^+]$;
- при этом $\theta \in (-\infty; \theta_*^+] \implies Q_\theta \in [0; 1]$;
- $Q_\theta = 0 \iff \theta \in [\theta_*^+; +\infty)$;

(1.4.2) пусть $d^- = 0$

(1.4.2.1) пусть $\gamma_1 < \frac{c\varkappa}{a + b^+}$, тогда $\theta_*^+ < \theta_0^-$

- $Q_\theta = 0 \iff \theta \in (-\infty; \theta_*^+]$;

- Q_θ определяется равенством (15) $\iff \theta \in [\theta_*^+; +\infty)$;
при этом $Q_\theta = 1 \iff \theta = \theta_0^-$;
- (1.4.2.2) пусть $\gamma_1 = \frac{c\kappa}{a+b^+}$, тогда $\theta_0^- = -\frac{c}{\kappa}$
 - $Q_\theta = 0 \iff \theta \in \left(-\infty; -\frac{c}{\kappa}\right) \cup \left(-\frac{c}{\kappa}; +\infty\right)$;
 - Q_θ – любой элемент отрезка $[0; 1] \iff \theta = -\frac{c}{\kappa}$;
- (1.4.2.3) пусть $\gamma_1 > \frac{c\kappa}{a+b^+}$, тогда $\theta_0^- < \theta_*^+$
 - Q_θ определяется равенством (15) $\iff \theta \in (-\infty; \theta_*^+]$;
при этом $Q_\theta = 1 \iff \theta = \theta_0^-$;
 - $Q_\theta = 0 \iff \theta \in [\theta_*^+; +\infty)$;
- (1.4.3) пусть $d^- > 0$
 - (1.4.3.1) пусть $\gamma_1 < \frac{c\kappa}{a+b^+}$, тогда $\theta_*^+ \leq \theta_-^-$
 - (1.4.3.1.1) пусть $\theta_*^+ < \theta_-^-$, тогда
 - $Q_\theta = 0 \iff \theta \in (-\infty; \theta_*^+]$;
 - Q_θ определяется равенством (15) $\iff \theta \in [\theta_*^+; \theta_-^-] \cup [\theta_-^-; +\infty)$;
 - $Q_\theta = 1 \iff \theta \in [\theta_-^-; \theta_+^-]$;
 - (1.4.3.1.2) пусть $\theta_-^- = \theta_*^+$, тогда $\theta_*^+, \theta_-^- = -\frac{c}{\kappa}$
 - $Q_\theta = 0 \iff \theta \in \left(-\infty; -\frac{c}{\kappa}\right)$;
 - Q_θ – любой элемент отрезка $[0; 1] \iff \theta = -\frac{c}{\kappa}$;
 - $Q_\theta = 1 \iff \theta \in \left(-\frac{c}{\kappa}; \theta_+^-\right]$;
 - Q_θ определяется равенством (15) $\iff \theta \in [\theta_+^-; +\infty)$;
 - (1.4.3.2) пусть $\gamma_1 = \frac{c\kappa}{a+b^+}$, тогда
 - Q_θ определяется равенством (15) $\iff \theta \in (-\infty; \theta_-^-] \cup [\theta_+^-; +\infty)$;
при этом $\theta \in (-\infty; \theta_-^-] \cup [\theta_+^-; +\infty) \implies Q_\theta \in (0; 1]$;
 - $Q_\theta = 1 \iff \theta \in [\theta_-^-; \theta_+^-]$;
 - (1.4.3.3) пусть $\gamma_1 > \frac{c\kappa}{a+b^+}$, тогда $\theta_+^- \leq \theta_*^+$
 - (1.4.3.3.1) пусть $\theta_+^- < \theta_*^+$, тогда
 - Q_θ определяется равенством (15) $\iff \theta \in (-\infty; \theta_-^-] \cup [\theta_+^-; \theta_*^+]$;
 - $Q_\theta = 1 \iff \theta \in [\theta_-^-; \theta_+^-]$;
 - $Q_\theta = 0 \iff \theta \in [\theta_*^+; +\infty)$;
 - (1.4.3.3.2) пусть $\theta_+^- = \theta_*^+$, тогда $\theta_+^-, \theta_*^+ = -\frac{c}{\kappa}$
 - Q_θ определяется равенством (15) $\iff \theta \in (-\infty; \theta_-^-]$;
 - $Q_\theta = 1 \iff \theta \in \left[\theta_-^-; -\frac{c}{\kappa}\right)$;

- Q_θ – любой элемент отрезка $[0; 1] \iff \theta = -\frac{c}{\varkappa}$;
- $Q_\theta = 0 \iff \theta \in \left(-\frac{c}{\varkappa}; +\infty\right)$;

(1.5) пусть $\gamma_2 > \frac{\varkappa^2}{a+b^+}$

(1.5.1) пусть $d^+ < 0$, тогда $Q_\theta = 0$;

(1.5.2) пусть $d^+ = 0$

(1.5.2.1) пусть $\theta_0^+ \neq \theta_0^-$, тогда $Q_\theta = 0$;

(1.5.2.2) пусть $\theta_0^+ = \theta_0^-$, тогда $\theta_0^\pm = -\frac{c}{\varkappa}$ ($=: \theta_0$)

– $Q_\theta = 0 \iff \theta \in (-\infty; \theta_0) \cup (\theta_0; +\infty)$;

– Q_θ – любой элемент отрезка $[0; 1] \iff \theta = \theta_0$;

(1.5.3) пусть $d^+ > 0$

(1.5.3.1) пусть $d^- < 0$, тогда

– $Q_\theta = 0 \iff \theta \in (-\infty; \theta_-^+] \cup [\theta_+^+; +\infty)$;

– Q_θ определяется равенством (15) $\iff \theta \in [\theta_-^+; \theta_+^+]$;

при этом $\theta \in [\theta_-^+; \theta_+^+] \implies Q_\theta \in [0; 1]$;

(1.5.3.2) пусть $d^- = 0$, тогда $\theta_0^+ \neq \theta_0^-$, $\theta_0^- \in (\theta_-^+; \theta_+^+)$

– $Q_\theta = 0 \iff \theta \in (-\infty; \theta_-^+] \cup [\theta_+^+; +\infty)$;

– Q_θ определяется равенством (15) $\iff \theta \in [\theta_-^+; \theta_+^+]$;

при этом $Q_\theta = 1 \iff \theta = \theta_0^-$;

(1.5.3.3) пусть $d^- > 0$, тогда $\theta_-^+ \leq \theta_-^- < \theta_+^- \leq \theta_+^+$;

(1.5.3.3.1) пусть $\theta_-^+ \neq \theta_-^-$, $\theta_+^- \neq \theta_+^+$, тогда

– $Q_\theta = 0 \iff \theta \in (-\infty; \theta_-^+] \cup [\theta_+^+; +\infty)$;

– Q_θ определяется равенством (15) $\iff \theta \in [\theta_-^+; \theta_-^-] \cup [\theta_+^-; \theta_+^+]$;

– $Q_\theta = 1 \iff \theta \in [\theta_-^-; \theta_+^-]$;

(1.5.3.3.2) пусть $\theta_-^+ = \theta_-^-$, тогда $\theta_-^\pm = -\frac{c}{\varkappa}$ ($=: \theta_-$), $\theta_+^- \neq \theta_+^+$, $\theta_+^\pm = \theta_0^\pm + \{\theta_0^\pm - \theta_-\}$

– $Q_\theta = 0 \iff \theta \in (-\infty; \theta_-) \cup [\theta_+^+; +\infty)$;

– Q_θ – любой элемент отрезка $[0; 1] \iff \theta = \theta_-$;

– $Q_\theta = 1 \iff \theta \in (\theta_-; \theta_+^-]$;

– Q_θ определяется равенством (15) $\iff \theta \in [\theta_+^-; \theta_+^+]$;

(1.5.3.3.3) пусть $\theta_+^- = \theta_+^+$, тогда $\theta_+^\pm = -\frac{c}{\varkappa}$ ($=: \theta_+$), $\theta_-^\pm \neq \theta_-^-$, $\theta_-^\pm = \theta_0^\pm + \{\theta_0^\pm - \theta_+\}$

– $Q_\theta = 0 \iff \theta \in (-\infty; \theta_-^+] \cup (\theta_+; +\infty)$;

– Q_θ определяется равенством (15) $\iff \theta \in [\theta_-^+; \theta_-^-]$;

– $Q_\theta = 1 \iff \theta \in [\theta_-^-; \theta_+)$;

– Q_θ – любой элемент отрезка $[0; 1] \iff \theta = \theta_+$;

(2) пусть $\varkappa = 0$, тогда

$$\theta_0^\pm = -\frac{\gamma_1}{\gamma_2} (=:\theta_0), \quad d^\pm = \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2} - \left\{ \frac{[\langle A\zeta, \zeta \rangle] + \gamma_0}{\gamma_2} \mp \frac{c^2}{(a+b^\pm)\gamma_2} \right\}, \quad \text{при } \gamma_2 \neq 0;$$

$$\theta_{\pm}^{\pm} = \theta_0 - \sqrt{d^{\pm}}, \quad \theta_{\pm}^{\pm} = \theta_0 + \sqrt{d^{\pm}}, \quad \text{при } \gamma_2 \neq 0, \quad d^{\pm} \geq 0;$$

$$\theta_{*}^{\pm} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{[\langle A\zeta, \zeta \rangle] + \gamma_0}{\gamma_1} \mp \frac{c^2}{(a + b^{\pm})\gamma_1} \right\}, \quad \text{при } \gamma_2 = 0, \quad \gamma_1 \neq 0$$

(2.1) пусть $c \neq 0$

(2.1.1) пусть $\gamma_2 < 0$, тогда $d^{+} < d^{-}$

(2.1.1.1) пусть $d^{-} \leq 0$, тогда $Q_{\theta} = 1$;

(2.1.1.2) пусть $d^{+} \leq 0 \leq d^{-}$, тогда

$$- Q_{\theta} = 1 \iff \theta \in (-\infty; \theta_{-}^{-}] \cup [\theta_{+}^{-}; +\infty);$$

$$- Q_{\theta} \text{ определяется равенством (15)} \iff \theta \in [\theta_{-}^{-}; \theta_{+}^{-}];$$

(2.1.1.3) пусть $d^{+} \geq 0$, тогда $\theta_{-}^{-} < \theta_{-}^{+} \leq \theta_{+}^{+} < \theta_{+}^{-}$

$$- Q_{\theta} = 1 \iff \theta \in (-\infty; \theta_{-}^{-}] \cup [\theta_{+}^{-}; +\infty);$$

$$- Q_{\theta} \text{ определяется равенством (15)} \iff \theta \in [\theta_{-}^{-}; \theta_{-}^{+}] \cup [\theta_{+}^{+}; \theta_{+}^{-}];$$

$$- Q_{\theta} = 0 \iff \theta \in [\theta_{-}^{+}; \theta_{+}^{+}];$$

(2.1.2) пусть $\gamma_2 = 0$

(2.1.2.1) пусть $\gamma_1 < 0$, тогда $\theta_{*}^{+} < \theta_{*}^{-}$

$$- Q_{\theta} = 0 \iff \theta \in (-\infty; \theta_{*}^{+}];$$

$$- Q_{\theta} \text{ определяется равенством (15)} \iff \theta \in [\theta_{*}^{+}; \theta_{*}^{-}];$$

$$- Q_{\theta} = 1 \iff \theta \in [\theta_{*}^{-}; +\infty);$$

(2.1.2.2) пусть $\gamma_1 = 0$, тогда

$$(2.1.2.2.1) \quad Q_{\theta} = 1 \iff \gamma_0 \leq -[\langle A\zeta, \zeta \rangle] - \frac{c^2}{a + b^{-}};$$

$$(2.1.2.2.2) \quad Q_{\theta} \text{ определяется равенством (15)} \iff -[\langle A\zeta, \zeta \rangle] - \frac{c^2}{a + b^{-}} \leq$$

$$\gamma_0 \leq -[\langle A\zeta, \zeta \rangle] + \frac{c^2}{a + b^{+}};$$

$$(2.1.2.2.3) \quad Q_{\theta} = 0 \iff \gamma_0 \geq -[\langle A\zeta, \zeta \rangle] + \frac{c^2}{a + b^{+}};$$

(2.1.2.3) пусть $\gamma_1 > 0$, тогда $\theta_{*}^{-} < \theta_{*}^{+}$

$$- Q_{\theta} = 1 \iff \theta \in (-\infty; \theta_{*}^{-}];$$

$$- Q_{\theta} \text{ определяется равенством (15)} \iff \theta \in [\theta_{*}^{-}; \theta_{*}^{+}];$$

$$- Q_{\theta} = 0 \iff \theta \in [\theta_{*}^{+}; +\infty);$$

(2.1.3) пусть $\gamma_2 > 0$, тогда $d^{-} < d^{+}$

(2.1.3.1) пусть $d^{+} \leq 0$, тогда $Q_{\theta} = 0$;

(2.1.3.2) пусть $d^{-} \leq 0 \leq d^{+}$, тогда

$$- Q_{\theta} = 0 \iff \theta \in (-\infty; \theta_{-}^{+}] \cup [\theta_{+}^{+}; +\infty);$$

$$- Q_{\theta} \text{ определяется равенством (15)} \iff \theta \in [\theta_{-}^{+}; \theta_{+}^{+}];$$

(2.1.3.3) пусть $d^{-} \geq 0$, тогда $\theta_{-}^{+} < \theta_{-}^{-} \leq \theta_{+}^{-} < \theta_{+}^{+}$

$$- Q_{\theta} = 0 \iff \theta \in (-\infty; \theta_{-}^{+}] \cup [\theta_{+}^{+}; +\infty);$$

$$- Q_{\theta} \text{ определяется равенством (15)} \iff \theta \in [\theta_{-}^{+}; \theta_{-}^{-}] \cup [\theta_{+}^{-}; \theta_{+}^{+}];$$

$$- Q_{\theta} = 1 \iff \theta \in [\theta_{-}^{-}; \theta_{+}^{-}];$$

(2.2) пусть $c = 0$, тогда

$$d^{\pm} = \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2} - \frac{[\langle A\zeta, \zeta \rangle] + \gamma_0}{\gamma_2} (=: d), \quad \text{при } \gamma_2 \neq 0$$

$$\theta_{-}^{\pm} = \theta_0 - \sqrt{d} (=: \theta_{-}), \quad \theta_{+}^{\pm} = \theta_0 + \sqrt{d} (=: \theta_{+}), \quad \text{при } \gamma_2 \neq 0, \quad d \geq 0;$$

$$\theta_{*}^{\pm} = -\frac{1}{2} \frac{[\langle A\zeta, \zeta \rangle] + \gamma_0}{\gamma_1} (=: \theta_{*}), \quad \text{при } \gamma_2 = 0, \quad \gamma_1 \neq 0;$$

(2.2.1) пусть $\gamma_2 < 0$

(2.2.1.1) пусть $d < 0$, тогда $Q_{\theta} = 1$;

(2.2.1.2) пусть $d = 0$, тогда $\theta_{\pm} = \theta_0$

$$- Q_{\theta} = 1 \iff \theta \in (-\infty; \theta_0) \cup (\theta_0; +\infty);$$

$$- Q_{\theta} = \text{любой элемент отрезка } [0; 1] \iff \theta = \theta_0;$$

(2.2.1.3) пусть $d > 0$, тогда $\theta_{-} < \theta_{+}$

$$- Q_{\theta} = 1 \iff \theta \in (-\infty; \theta_{-}) \cup (\theta_{+}; +\infty);$$

$$- Q_{\theta} = \text{любой элемент отрезка } [0; 1] \iff \theta \in \{\theta_{-}, \theta_{+}\};$$

$$- Q_{\theta} = 0 \iff \theta \in (\theta_{-}; \theta_{+});$$

(2.2.2) пусть $\gamma_2 = 0$:

(2.2.2.1) пусть $\gamma_1 < 0$, тогда

$$- Q_{\theta} = 0 \iff \theta \in (-\infty; \theta_{*});$$

$$- Q_{\theta} = \text{любой элемент отрезка } [0; 1] \iff \theta = \theta_{*};$$

$$- Q_{\theta} = 1 \iff \theta \in (\theta_{*}; +\infty);$$

(2.2.2.2) пусть $\gamma_1 = 0$, тогда

$$(2.2.2.2.1) \quad Q_{\theta} = 1 \iff \gamma_0 < -[\langle A\zeta, \zeta \rangle];$$

$$(2.2.2.2.2) \quad Q_{\theta} = \text{любой элемент отрезка } [0; 1] \iff \gamma_0 = -[\langle A\zeta, \zeta \rangle];$$

$$(2.2.2.2.3) \quad Q_{\theta} = 0 \iff \gamma_0 > -[\langle A\zeta, \zeta \rangle];$$

(2.2.2.3) пусть $\gamma_1 > 0$, тогда

$$- Q_{\theta} = 1 \iff \theta \in (-\infty; \theta_{*});$$

$$- Q_{\theta} = \text{любой элемент отрезка } [0; 1] \iff \theta = \theta_{*};$$

$$- Q_{\theta} = 0 \iff \theta \in (\theta_{*}; +\infty);$$

(2.2.3) пусть $\gamma_2 > 0$

(2.2.3.1) пусть $d < 0$, тогда $Q_{\theta} = 0$;

(2.2.3.2) пусть $d = 0$, тогда $\theta_{\pm} = \theta_0$

$$- Q_{\theta} = 0 \iff \theta \in (-\infty; \theta_0) \cup (\theta_0; +\infty);$$

$$- Q_{\theta} = \text{любой элемент отрезка } [0; 1] \iff \theta = \theta_0;$$

(2.2.3.3) пусть $d > 0$, тогда $\theta_{-} < \theta_{+}$

$$- Q_{\theta} = 0 \iff \theta \in (-\infty; \theta_{-}) \cup (\theta_{+}; +\infty);$$

$$- Q_{\theta} = \text{любой элемент отрезка } [0; 1] \iff \theta \in \{\theta_{-}, \theta_{+}\};$$

$$- Q_{\theta} = 1 \iff \theta \in (\theta_{-}; \theta_{+});$$

$$Q_\theta = \begin{cases} h^+(\theta), & \text{при } [b] = 0; \\ \frac{a+b^+}{[b]} - \frac{1}{[b] \sqrt{\frac{h^+(\theta)}{(a+b^-)^2} + \frac{h^-(\theta)}{(a+b^+)^2}}}, & \text{при } [b] \neq 0; \end{cases} \quad (15)$$

где

$$h^-(\theta) = \frac{\frac{1}{a+b^-} + \frac{[\langle A\zeta, \zeta \rangle] + [\gamma(\theta)]}{\bar{c}^2(\theta)}}{\frac{1}{a+b^-} + \frac{1}{a+b^-}}, \quad h^+(\theta) = \frac{\frac{1}{a+b^+} - \frac{[\langle A\zeta, \zeta \rangle] + [\gamma(\theta)]}{\bar{c}^2(\theta)}}{\frac{1}{a+b^+} + \frac{1}{a+b^-}}.$$

При дополнительных ограничениях $\zeta^\pm = \lambda^\pm i$, $b^\pm = b$, $\gamma^\pm(\theta) \equiv 0$ результат, аналогичный теореме 1, получен в [3]. Наша цель — избавиться от этих ограничений. Для удобства изложения, разобьем доказательство теоремы 1 на ряд этапов.

3. Формулировка вспомогательных результатов. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} G(Q, t, \zeta^+, \zeta^-) &= \\ &= Qt + Q \langle A^+ \zeta^+, \zeta^+ \rangle + (1-Q) \langle A^- \zeta^-, \zeta^- \rangle - \frac{\text{tr}[A\zeta]}{m} \alpha \left(Q, \frac{\text{tr}[A\zeta]}{m} \right) Q (1-Q), \\ &\quad Q \in [0; 1], \quad t \in \mathbb{R}, \quad \zeta^+, \zeta^- \in \mathbb{R}_s^{m \times m}; \\ \bar{\zeta}^\pm(\theta) &= \zeta^\pm + (A^\pm)^{-1} \beta^\pm \theta, \quad \theta \in \mathbb{R}; \\ \bar{t}(\theta) &= [\langle A\zeta, \zeta \rangle] - [\langle A\bar{\zeta}(\theta), \bar{\zeta}(\theta) \rangle] + [\gamma(\theta)], \quad \theta \in \mathbb{R}; \\ \bar{t}^\pm(\theta) &= -[\langle A\bar{\zeta}(\theta), \bar{\zeta}(\theta) \rangle] \pm \frac{\bar{c}^2(\theta)}{a^\pm + b^\pm}. \end{aligned}$$

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится основной результат предыдущей части работы [4].

Теорема 2. При условиях (7), (8)–(12) для любого $\theta \in \mathbb{R}$ задача (2) для функционала (1) с плотностями свободной энергии, задающимися формулами (6), разрешима, и множество всех ее решений совпадает со множеством всех решений задачи (14), где число $Q_\theta \in [0; 1]$ — любое решение задачи

$$G(Q_\theta, \bar{t}(\theta), \bar{\zeta}^+(\theta), \bar{\zeta}^-(\theta)) = \min_{Q \in [0; 1]} G(Q, \bar{t}(\theta), \bar{\zeta}^+(\theta), \bar{\zeta}^-(\theta)), \quad Q_\theta \in [0; 1]. \quad (16)$$

Введем следующие обозначения:

$$t^\pm = -[\langle A\zeta, \zeta \rangle] \pm \frac{c^2}{a^\pm + b^\pm}.$$

Очевидно, что $t^- \leq t^+$ и $t^+ = t^- \iff c = 0$.

Распределение множества всех решений задачи

$$G(\bar{Q}_t, t, \zeta^+, \zeta^-) = \min_{Q \in [0; 1]} G(Q, t, \zeta^+, \zeta^-), \quad \bar{Q}_t \in [0; 1], \quad (17)$$

по значению параметра $t \in \mathbb{R}$ дает следующее.

Предложение 1. При условиях (8)–(10)

- a) если $t \leq t^-$ и $t < t^+$, то $\bar{Q}_t = 1$ — единственное решение задачи (17);
- b) если $t \geq t^+$ и $t > t^-$, то $\bar{Q}_t = 0$ — единственное решение задачи (17);
- c) если $t^- \leq t \leq t^+$ и $t^- < t^+$, то единственным решением задачи (17) является число

$$\bar{Q}_t = \begin{cases} \bar{h}^+(t), & \text{при } [a+b] = 0; \\ \frac{a^+ + b^+}{[a+b]} - \frac{1}{[a+b] \sqrt{\frac{\bar{h}^+(t)}{(a^- + b^-)^2} + \frac{\bar{h}^-(t)}{(a^+ + b^+)^2}}}, & \text{при } [a+b] \neq 0; \end{cases} \quad (18)$$

где

$$\bar{h}^-(t) = \frac{t - t^-}{t^+ - t^-}, \quad \bar{h}^+(t) = \frac{t^+ - t}{t^+ - t^-};$$

- d) если $t = t^\pm$, то множество всех решений задачи (17) совпадает с отрезком $[0; 1]$.

Доказательство предложения 1 дается элементарным анализом скалярной функции G . Поскольку исследование функции G в предположениях (8)–(10) идентично исследованию функции G при дополнительном предположении $\zeta^\pm = \lambda^\pm i$ (см. [5]), мы не будем приводить здесь доказательство предложения 1.

5. Доказательство теоремы 1. В силу теоремы 2, достаточно доказать, что множество всех решений задачи (16) имеет описание, данное в теореме 1. В силу легко проверяемого равенства $[A\bar{\zeta}(\theta)] = \bar{c}(\theta)i$, набор параметров $(A^+, \bar{\zeta}^+(\theta), A^-, \bar{\zeta}^-(\theta))$ удовлетворяет условиям (8)–(10) (при подстановке $\bar{\zeta}^\pm(\theta)$ вместо $\zeta^\pm$ соответственно и $\bar{c}(\theta)$ вместо c), а значит, он удовлетворяет условиям предложения 1. Подставим $\bar{t}(\theta)$ вместо t и $\bar{c}(\theta)$ вместо c в предложение 1 и, в частности, в равенство (18) и заметим, что

$$\bar{t}^+(\theta) - \bar{t}^-(\theta) = \frac{\bar{c}^2(\theta)}{a + b^+} + \frac{\bar{c}^2(\theta)}{a + b^-}; \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \bar{t}^+(\theta) - \bar{t}(\theta) &= \frac{\bar{c}^2(\theta)}{a + b^+} - \{[\langle A\zeta, \zeta \rangle] + [\gamma(\theta)]\}, \\ \bar{t}(\theta) - \bar{t}^-(\theta) &= \frac{\bar{c}^2(\theta)}{a + b^-} + \{[\langle A\zeta, \zeta \rangle] + [\gamma(\theta)]\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Подставляя (19), (20) в (18), получаем (15). Кроме того,

$$\bar{t}^+(\theta) = \bar{t}^-(\theta) \iff \begin{cases} \theta = -\frac{c}{\varkappa}, & \text{при } \varkappa \neq 0; \\ c = 0, & \text{при } \varkappa = 0; \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \bar{t}(\theta) \vee \bar{t}^\pm(\theta) \iff \{ (a + b^\pm) ([\langle A\zeta, \zeta \rangle] + \gamma_0) \mp c^2 \} + 2 \{ (a + b^\pm) \gamma_1 \mp c\varkappa \} \theta + \\ + \{ (a + b^\pm) \gamma_2 \mp \varkappa^2 \} \theta^2 \vee 0 \iff \end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} (\theta - \theta_0^\pm)^2 - d^\pm \wedge 0, & \text{при } \gamma_2 < \pm \frac{\varkappa^2}{a + b^\pm}; \\ \theta \wedge \theta_*^\pm, & \text{при } \gamma_2 = \pm \frac{\varkappa^2}{a + b^\pm}, \gamma_1 < \pm \frac{c\varkappa}{a + b^\pm}; \\ \gamma_0 \vee -[\langle A\zeta, \zeta \rangle] \pm \frac{c^2}{a + b^\pm}, & \text{при } \gamma_2 = \pm \frac{\varkappa^2}{a + b^\pm}, \gamma_1 = \pm \frac{c\varkappa}{a + b^\pm}; \\ \theta \vee \theta_*^\pm, & \text{при } \gamma_2 = \pm \frac{\varkappa^2}{a + b^\pm}, \gamma_1 > \pm \frac{c\varkappa}{a + b^\pm}; \\ (\theta - \theta_0^\pm)^2 - d^\pm \vee 0, & \text{при } \gamma_2 > \pm \frac{\varkappa^2}{a + b^\pm}, \end{cases} \quad (22)$$

где символом « $\vee$ » обозначен любой из знаков « $\leq$ », « $\geq$ », « $<$ », « $>$ », « $=$ », а символом « $\wedge$ » — знак « $\geq$ », « $\leq$ », « $>$ », « $<$ », « $=$ » соответственно. Пользуясь предложением 1, перебирая по порядку все варианты комбинаций неравенств $\bar{t}(\theta) \vee \bar{t}^\pm(\theta)$ для знаков « $\pm$ » в отдельности в (22) и сочетая их с двумя различными возможностями $\bar{t}^-(\theta) < \bar{t}^+(\theta)$ и $\bar{t}^+(\theta) = \bar{t}^-(\theta) = \bar{t}^-(\theta)$ в (21), а также пользуясь легко проверяемыми соотношениями

$$\theta_0^\pm = -\frac{c}{\varkappa} \iff \gamma_1 \varkappa = \gamma_2 c, \quad \text{при } \varkappa \neq 0, \quad \gamma_2 \neq \pm \frac{\varkappa^2}{a + b^\pm};$$

$$d^\pm = 0 \iff ([\langle A\zeta, \zeta \rangle] + \gamma_0) \varkappa^2 = \gamma_2 c^2, \quad \text{при } \theta_0^\pm = -\frac{c}{\varkappa}, \quad \varkappa \neq 0, \quad \gamma_2 \neq \pm \frac{\varkappa^2}{a + b^\pm};$$

$$\theta_0^+ = \theta_0^- \iff \gamma_1 \varkappa = \gamma_2 c, \quad \text{при } \varkappa \neq 0, \quad \gamma_2 \neq -\frac{\varkappa^2}{a + b^-}, \quad \gamma_2 \neq \frac{\varkappa^2}{a + b^+};$$

получаем требуемое.

6. Примеры. На рис. 1–3 изображены графики зависимости равновесной доли фазы «+» от температуры в случаях (1.1.3.3.1), (1.3.6.1.1), (2.1.2.3) для наборов параметров:

$$1) \quad m = 3; a = 1; b^- = 0, b^+ = 1; \zeta^- = -i, \zeta^+ = 0; \varkappa = 1; \gamma_0 = 4, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = -2;$$

$$\text{для этого набора параметров } \theta_\pm^- = 2 \pm \sqrt{6}, \theta_\pm^+ = \frac{1 \pm \sqrt{6}}{5};$$

$$2) \quad m = 3; a = 1; b^- = 0, b^+ = 1; \zeta^- = -i, \zeta^+ = 0; \varkappa = 1; \gamma_0 = 3, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = \frac{1}{3};$$

$$\text{для этого набора параметров } \theta_\pm^- = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{2}}, \theta_\pm^+ = 3 \pm \sqrt{6};$$

$$3) \quad m = 3; a = 1; b^- = 0, b^+ = 1; \zeta^- = i, \zeta^+ = 0; \varkappa = 0; \gamma_0 = \frac{3}{2}, \gamma_1 = \frac{1}{2}, \gamma_2 = 0;$$

$$\text{для этого набора параметров } \theta_*^- = \frac{1}{2}, \theta_*^+ = 2.$$

Мотивированным с физической точки зрения кажется существование таких $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, $\theta_1 \leq \theta_2$, что для любого $\theta < \theta_1$ равновесным является только одно однофазное состояние, а для любого $\theta > \theta_2$ — только другое однофазное состояние (как, например, на рис. 3). Из теоремы 1 следует, что соответствующая этому зависимость равновесной доли фазы «+» от температуры реализуется в том и только в том случае, когда $\varkappa = 0$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_1 \neq 0$, т. е. когда $[\beta] = 0$, а функция $[\gamma(\cdot)]$ является полиномом степени 1.

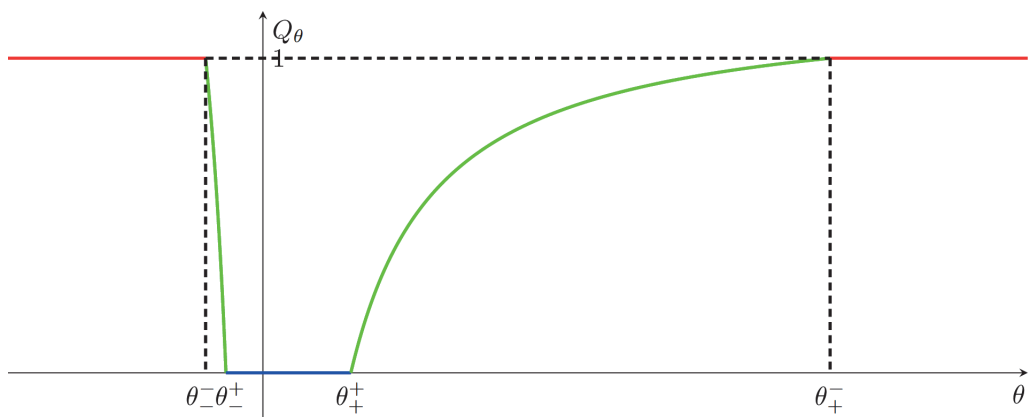


Рис. 1. Зависимость равновесной доли фазы «+» от температуры. Случай (1.1.3.3.1).

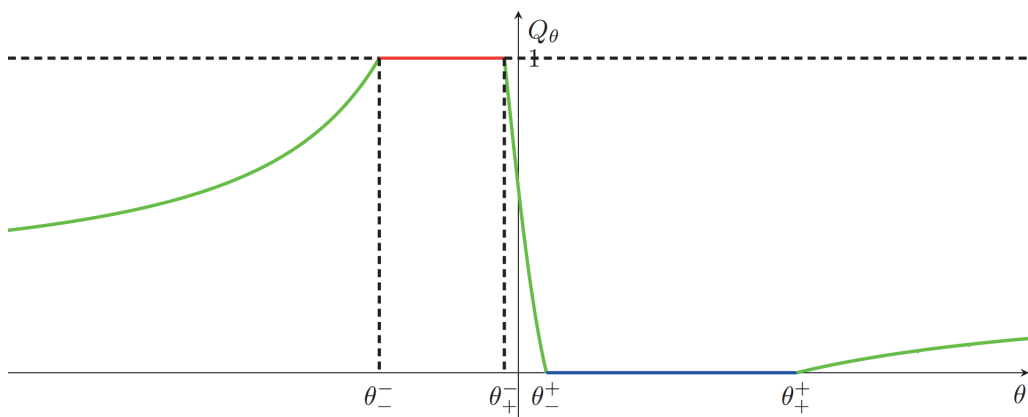


Рис. 2. Зависимость равновесной доли фазы «+» от температуры. Случай (1.3.6.1.1).

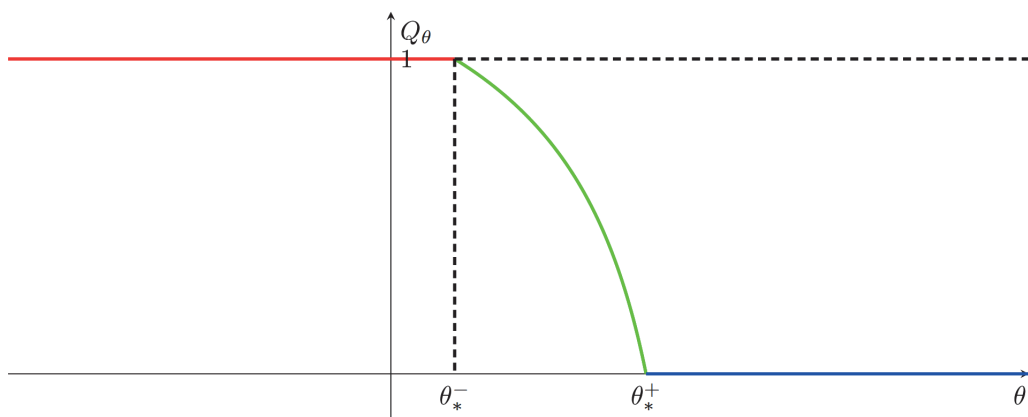


Рис. 3. Зависимость равновесной доли фазы «+» от температуры. Случай (2.1.2.3).

Поскольку при нулевых граничных условиях Дирихле (7) на поле перемещений множество всех решений задачи (2) о минимизации функционала свободной энергии (1) с плотностями свободной энергии (6) совпадает со множеством всех решений задачи (2) о минимизации функционала свободной энергии (1) с плотностями свободной энергии

$$\mathcal{F}^{\pm}(M, \theta) = F^{\pm}(M) - 2 \left\langle M^s, \tilde{\beta}^{\pm} \right\rangle \theta + \tilde{\gamma}^{\pm}(\theta), \quad M \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad \theta \in \mathbb{R};$$

где

$$\tilde{\gamma}^{+}(\theta) = [\gamma(\theta)], \quad \tilde{\gamma}^{-}(\theta) = 0; \quad \theta \in \mathbb{R}; \quad \tilde{\beta}^{+} = [\beta], \quad \tilde{\beta}^{-} = 0,$$
(23)

приходим к выводу, что физически мотивированная зависимость множества всех состояний равновесия от температуры реализуется лишь для двухфазных термоупругих сред, по существу эквивалентных двухфазным упругим средам с плотностями свободной энергии

$$\mathcal{F}^{+}(M, t) = F^{+}(M) + t, \quad \mathcal{F}^{-}(M, t) = F^{-}(M); \quad M \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Рис. 1, 2 иллюстрируют две характерные ситуации: когда существуют такие $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, $\theta_1 \leq \theta_2$, что, как для любого $\theta < \theta_1$, так и для любого $\theta > \theta_2$, равновесным является только одно и то же однофазное состояние (рис. 1); когда существуют такие $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, $\theta_1 \leq \theta_2$, что, как для любого $\theta < \theta_1$, так и для любого $\theta > \theta_2$, ни одно из однофазных состояний не является состоянием равновесия (рис. 2). Одно из возможных объяснений появления таких ситуаций заключается в том, что, поскольку при условии (13) функции (23) оказываются полиномами второй степени от совокупности переменных $(M, \theta) \in \mathbb{R}^{m \times m} \times \mathbb{R}$, модель двухфазной упругой среды, основанная на плотностях свободной энергии (6) при условии (13), является (несущественным для граничных условий (7)) обобщением модели двухфазной упругой среды с квадратичными плотностями свободной энергии, в то время как квадратичные плотности свободной энергии принято считать приближениями плотностей свободной энергии «более общего вида» при малых значениях деформаций и температуры, а теорема 1 описывает зависимость равновесной доли фазы «+» от температуры во всем диапазоне $\theta \in \mathbb{R}$. Другое возможное объяснение появления таких зависимостей множества всех решений задачи (2), (1), (7) от параметра $\theta \in \mathbb{R}$ заключается в том, что в этих случаях параболоиды $\mathcal{F}^{\pm}(\cdot, \theta)$ «разбегаются на бесконечность» при $\theta \rightarrow \pm\infty$.

7. Заключение. В работе при некоторых ограничениях на параметры двухфазной термоупругой среды описана зависимость от температуры множества всех решений вариационной задачи о состояниях равновесия. Как и в случае двухфазной упругой среды без температурных напряжений, в случае двухфазной термоупругой среды ключевым объектом в описании множества всех глобальных минимайзеров функционала свободной энергии является равновесная доля фазы «+», а равновесные поле перемещений и пространственное распределение фаз восстанавливаются как решение некоторой вспомогательной системы уравнений. Несмотря на то что для любого значения температуры задача о равновесии двухфазной термоупругой среды сводится к задаче о равновесии двухфазной упругой среды без температурных напряжений, зависимости множества всех состояний равновесия от температуры для этих двух моделей существенно отличаются, что, в частности, демонстрируется рис. 1, 2.

Благодарность. Автор выражает благодарность В. Г. Осмоловскому, В. А. Кучеру и А. Б. Фрейдину за ценные замечания, повлиявшие на постановку задачи и интерпретацию результатов.

Литература

1. Гринфельд М. А. *Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений*. Москва, Наука (1990).
2. Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н. *Математические модели термомеханики*. Москва, Физматлит (2002).
3. Osolovskii V. G. Computation of the entropy of a two-phase elastic medium in the problem of thermoelasticity. *Journal of Mathematical Sciences* **175** (3), 349–362 (2011). <https://doi.org/10.1007/s10958-011-0350-6>
4. Ефимов Е. А. Множество всех состояний равновесия двухфазной термоупругой среды. Ч. 1. Существование состояний равновесия двухфазной термоупругой среды. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **11** (69), вып. 4, 706–717 (2024). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.407>
5. Осмоловский В. Г. Квазивыпуклая оболочка для однородной изотропной двухфазовой упругой среды и решения исходной и релаксированной задач. *Проблемы математического анализа* **70**, 161–170 (2013). <https://doi.org/10.1007/s10958-013-1316-7>

Статья поступила в редакцию 20 мая 2024 г.;
доработана 6 июня 2024 г.;
рекомендована к печати 29 августа 2024 г.

Контактная информация:

Ефимов Егор Анатольевич — аспирант, стажер-исследователь;
<https://orcid.org/0009-0006-0220-0235>, egorefimov256@gmail.com

The set of all equilibrium states of a two-phase thermoelastic medium. Part 2: Dependence of the set of all equilibrium states of a two-phase thermoelastic medium on the temperature*

E. A. Efimov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation
Institute of Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences,
61, Bolshoi pr. V. O., St. Petersburg, 199178, Russian Federation

For citation: Efimov E. A. The set of all equilibrium states of a two-phase thermoelastic medium. Part 2: Dependence of the set of all equilibrium states of a two-phase thermoelastic medium on the temperature. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2025, vol. 12 (70), issue 1, pp. 18–36. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2025.102> (In Russian)

This article is the second part of the work devoted to the study of the set of all equilibrium states of a two-phase thermoelastic medium. The equilibrium state of a two-phase elastic medium is understood as an ordered pair: a displacement field and a spatial

*The research was carried out within the state assignment of Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (theme no. 124041500009-8).

See the first part: Efimov E. A. The set of all equilibrium states of a two-phase thermoelastic medium. Part 1: existence of equilibrium states of a two-phase thermoelastic medium. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 4, pp. 706–717. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.407> (In Russian)

phase distribution which provide the free energy functional with a global minimum. For thermoelastic media, the free energy densities are obtained by adding to the strain energy densities the terms associated with the temperature stresses of each phase and the terms associated with the energies of each phase in the unstressed state at zero stress-temperature tensors. Under zero Dirichlet boundary conditions on the displacement field and certain restrictions on the elasticity tensors, the strain tensors providing each phase with the unstressed state at the initial temperature, the stress-temperature tensors and the terms in the definition of the free energy densities associated with the energies of each phase in the unstressed state at zero stress-temperature tensors the dependence of the set of all equilibrium states of a two-phase thermoelastic medium on the temperature is found and studied.

Keywords: two-phase thermoelastic medium, free energy functional, free energy density, spatial phase distribution, equilibrium state.

References

1. Grinfel'd M.A. *Methods of continuum mechanics in the theory of phase transitions*. Moscow, Nauka Publ. (1990). (In Russian)
2. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Mathematical models of thermomechanics*. Moscow, Fizmatlit Publ. (2002). (In Russian)
3. Osmolovskii V.G. Computation of the entropy of a two-phase elastic medium in the problem of thermoelasticity. *Journal of Mathematical Sciences* **175** (3), 349–362 (2011). <https://doi.org/10.1007/s10958-011-0350-6>
4. Efimov E.A., The set of all equilibrium states of a two-phase thermoelastic medium. Part 1: existence of equilibrium states of a two-phase thermoelastic medium. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **11** (69), iss.4, 706–717 (2024). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.407> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics* **57**, 490–498 (2024). <https://doi.org/10.1134/S106345412470033X>].
5. Osmolovskii V. G. Quasiconvex Hull of Energy Densities in a Homogeneous Isotropic Two-Phase Elastic Medium and Solutions of the Original and Relaxed Problems. *Problems in Mathematical Analysis* **70**, 161–170 (2013). (In Russian) [Eng. transl.: *Journal of Mathematical Sciences* **191** (2), 280–290 (2013). <https://doi.org/10.1007/s10958-013-1316-7>].

Received: May 20, 2024

Revised: June 6, 2024

Accepted: August 29, 2024

Author's information:

Egor A. Efimov — <https://orcid.org/0009-0006-0220-0235>, egorefimov256@gmail.com