

Дельтаобразные ядра, порождаемые методами обращения преобразования Лапласа*

А. В. Лебедева, В. М. Рябов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: Лебедева А. В., Рябов В. М. Дельтаобразные ядра, порождаемые методами обращения преобразования Лапласа // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2025. Т. 12 (70). Вып. 1. С. 37–47.

<https://doi.org/10.21638/spbu01.2025.103>

Применение интегрального преобразования Лапласа для широкого класса задач приводит к более простому уравнению относительно изображения искомого оригинала. На следующем шаге возникает задача обращения, т. е. нахождения оригинала по его изображению. Как правило, осуществить этот шаг аналитически не удается. Возникает задача использования приближенных методов обращения. При этом приближенное решение представляется в виде линейной комбинации образа и его производных в ряде точек комплексной полуплоскости, в которой изображение регулярно. Однако оригинал, в отличие от изображения, может даже иметь точки разрыва. Для большинства методов обращения отсутствуют какие-либо оценки погрешности, что затрудняет сравнение методов между собой и выбор конкретного метода для практического применения. Цель настоящей работы — рассмотрение различных методов с единой точки зрения, а именно изучение порождаемых ими так называемых дельтаобразных ядер, а также вопросов конструирования дельта-методов с заданными свойствами, оценка их погрешности, ускорения сходимости и т. д. Идея дельта-методов принадлежит, видимо, Виддеру, хотя и в неявной форме.

Ключевые слова: интегральное преобразование Лапласа, задача обращения, дельтаобразные ядра.

1. Дельтаобразные ядра. Интегральное преобразование Лапласа $F(p)$ функции $f(t)$

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (1)$$

представляет собой мощный инструмент для решения широкого класса прикладных задач математической физики. Одним из его главных достоинств является алгебраизация процедур математического анализа, с помощью которой удастся свести интегральные и дифференциальные уравнения к более простым. Изображение Лапласа является регулярной функцией в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} p > \gamma$, что позволяет привлечь к исследованию решаемой задачи результаты теории функций комплексного переменного.

Таблицы соответствия функций-оригиналов и их изображений, теоремы разложения, формула обращения Римана — Меллина позволяют теоретически точно нахо-

* Исследование проводилось с использованием вычислительных ресурсов, предоставленных Ресурсным центром «Вычислительный центр СПбГУ» (<http://www.cc.spbu.ru/en>).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2025

дить оригинал [1]. Но решение практических задач часто приводит к изображениям, к которым не могут быть применены эти классические приемы обращения.

Наиболее полно возможные подходы к задаче обращения и их реализация описаны в книге [2]. Теоретические основы операционного исчисления содержатся в классических работах [1, 3, 4]. Вопросам приложения операционного исчисления к решению прикладных задач посвящены фундаментальные труды [5, 6]. Среди недавних работ, содержащих обзор приближенных методов обращения, укажем книгу [7].

Не существует универсального метода обращения, дающего удовлетворительные результаты для произвольного изображения $F(p)$. Любой конкретный метод обращения должен учитывать специфику поведения изображения (или функции-оригинала), что прежде всего находит отражение в выборе подходящих систем функций в пространствах оригиналов и изображений, с которыми легко работать и с помощью которых могут быть хорошо приближены заданные образы и оригиналы. Выбор метода обращения существенно зависит от способа задания информации об изображении искомого оригинала.

Существуют различные подходы к построению приближенных методов обращения преобразования Лапласа. Как правило, обычно исходят из того, чтобы метод был точен для нескольких первых функций некоторой фиксированной системы. Если искомым оригинал представим в виде ряда по избранной системе функций, то можно надеяться на получение удовлетворительного приближения к нему в результате применения таких методов.

Любой метод обращения использует значения изображения и его производных в определенных точках вещественной оси или комплексной плоскости. Так как исходное уравнение линейно относительно оригинала и изображения, то в общем случае метод обращения имеет вид

$$f(t) \approx \sum_{k=0}^n \sum_{j=1}^m A_{kj}(t) F^{(k)}(p_{kj}(t)), \quad (2)$$

где $A_{kj}, p_{kj}(t)$ — коэффициенты и узлы, определяющие конкретный метод обращения. Верхние пределы суммирования могут быть бесконечными. С учетом определения преобразования Лапласа (1) перепишем формулу (2) иначе:

$$f(t) \approx \int_0^\infty \left[\sum_{k=0}^n \sum_{j=1}^m (-1)^k A_{kj}(t) x^k \exp(-xp_{kj}(t)) \right] f(tx) dx. \quad (3)$$

Положим

$$\delta_{nm}(x, t) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=1}^m (-1)^k A_{kj}(t) t x^k \exp(-txp_{kj}(t)). \quad (4)$$

Приближенное равенство (3) означает, что параметры метода обращения $m, n, A_{kj}(t), p_{kj}(t)$ следует подобрать так, чтобы функция (4) фактически не зависела от t и была «близка» к дельта-функции в точке $x = 1$, или, другими словами, чтобы правая часть (3) представляла собой сингулярный интеграл [8]. Такие ядра назовем дельтаобразными.

Для любого конкретного метода обращения написать соответствующее ядро (4) не представляет затруднений, после чего можно изучать его свойства. Напомним, что в случае разрывного оригинала следует сначала определить точки разрыва

оригинала и величину скачка оригинала в них и после их удаления свести задачу к поиску непрерывной части оригинала. Если этого не сделать, то любой метод обращения выдаст некоторый «сглаженный» результат. Алгоритм этой процедуры приведен в статье [9]. После его реализации можно воспользоваться характеристиками сходимости и устойчивости используемого метода обращения, изложенными в работе [10].

2. Применение многочленов Чебышёва к построению дельтаобразных ядер. Пусть p_1, \dots, p_n — произвольные узлы, лежащие в полуплоскости $\text{Re } p > 0$, и дана квадратурная формула (КФ) обращения преобразования Лапласа вида

$$f(t) \approx \sum_{k=1}^n A_k \varphi_1(p_k/t), \quad \varphi_1(p) = pF(p). \quad (5)$$

С учетом определения $F(p)$ запишем ее иначе:

$$f(t) \approx \int_0^\infty \left(\sum_{k=1}^n A_k p_k e^{-p_k x} \right) f(tx) dx.$$

Следовательно, КФ будет давать хорошее приближение, если функция

$$\delta_n(x) = \sum_{k=1}^n A_k p_k e^{-p_k x}$$

дельтаобразна в точке $x = 1$. Положим

$$\Delta_n(x) = \int \delta_n(x) dx = C - \sum_{k=1}^n A_k e^{-p_k x}.$$

Узлы p_k и коэффициенты A_k надо выбирать так, чтобы при $n \rightarrow \infty$ выполнялись условия

$$\Delta_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1, \quad \Delta_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Первое из них справедливо при любых p_k, A_k , если положить $C = 1$, а второе условие означает, что

$$\sum_{k=1}^n A_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Далее считаем $p_k = 2k - 1$, $k = 1, 2, \dots, n$. Используя свойства многочленов Чебышёва (см. [11]), получаем ядро [12]:

$$\begin{aligned} \delta_n^*(x) = & \frac{4}{\pi} \left(x \sqrt{1 - e^{-2}} + \sum_{j=1}^{n-1} \sin((2j+1) \arccos x) \times \right. \\ & \left. \times \left\{ \frac{\sin(2j \arccos x)}{\sqrt{1 - x^2}} + \cos((2j+1) \arccos x) \right\} \right). \end{aligned}$$

Положим

$$\delta_n(x) = \delta_n^*(\exp(-x)).$$

График ядра $\delta_{45}(x)$ приведен на рис. 1.

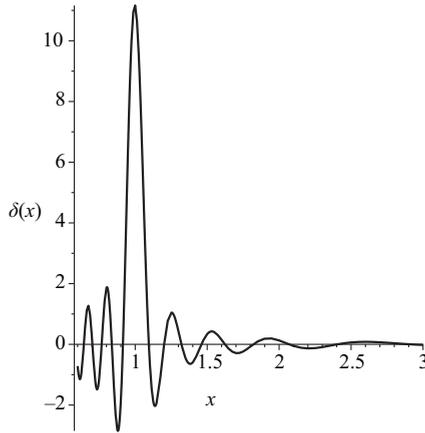


Рис. 1. Ядро $\delta_{45}(x)$.

При возрастании n сумма коэффициентов КФ (5) стремится к единице, и в то же время сами коэффициенты растут по модулю. Сумма модулей коэффициентов любой КФ обращения характеризует устойчивость КФ по отношению к ошибкам в функции $\varphi_1(p)$.

3. Квадратурные формулы наивысшей степени точности (КФНСТ).

Как известно, обращение преобразования Лапласа задается интегралом Римана — Меллина

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad c > 0, \quad t > 0. \quad (6)$$

Напомним, что интеграл понимается в смысле главного значения, он не зависит от c и в случае разрыва оригинала в точке t мы получаем полусумму предельных значений оригинала слева и справа от точки t .

Пусть $F(p)$ регулярна в правой полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$ наряду с функцией $\varphi_s(p) = p^s F(p)$ при некотором $s > 0$ и пусть существует значение $\varphi_s(\infty)$. Запишем формулу обращения (6) иначе:

$$f(t) = \frac{t^{s-1}}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} p^{-s} \varphi_s(p/t) dp, \quad c > 0. \quad (7)$$

Для вычисления интеграла в формуле (7) применим квадратурную формулу вида

$$f(t) \approx t^{s-1} \sum_{k=1}^n B_k \varphi_s \left(\frac{q_k}{t} \right). \quad (8)$$

Ее узлы q_k суть корни уравнения

$$P_n^s \left(\frac{1}{q} \right) \equiv \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} (n+s-1)_k q^{-k} = 0.$$

Они попарно различны и лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$.

В записи многочлена P_n^s использован символ Похгаммера:

$$(a)_k = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ a(a+1) \cdots (a+k-1), & k \geq 1. \end{cases}$$

Коэффициенты B_k можно найти как решение системы уравнений

$$\sum_{k=1}^n B_k q_k^{-m} = \frac{1}{\Gamma(s+m)}, \quad m = 0, 1, \dots, n-1.$$

Формула (8) является КФНСТ [2, 13] — она точна для функций $\varphi_s(p) = p^{-j}$, $j = 0, 1, \dots, 2n-1$ или для соответствующих функций-оригиналов $f_j(t) = t^{s-1+j}$, $j = 0, 1, \dots, 2n-1$. Таблицы КФНСТ приведены в книге [14].

Для них ядро (4) принимает вид

$$\delta_{nm}(x, t) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=1}^m (-1)^k A_{kj}(t) t x^k \exp(-tx p_{kj}(t)) = \sum_{k=1}^n B_k q_k^s \exp(-x q_k) \equiv \delta_n(x).$$

Напомним, что узлы и коэффициенты КФНСТ комплексно попарно сопряжены, и потому ядро $\delta_n(x)$ вещественно. Его график для $s = 1, n = 15$ представлен на рис. 2.

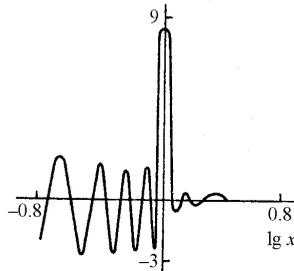


Рис. 2. Ядро КФНСТ.

Ядро КФНСТ обладает ярко выраженными дельтаобразными свойствами (что было ожидаемо в силу высокой точности метода). Однако напомним, что устойчивость КФНСТ характеризуется числами $M_n = \sum_{k=1}^n |B_k|$, быстро растущими при увеличении числа узлов (например, $M_{10} \approx 10^8$), так что при выборе числа узлов n следует проявлять большую осторожность во избежание потери точности.

Характер колебаний ядра слева и справа от точки максимума зависит от значения s и учитывает поведение оригинала при малых и больших значениях аргумента. В случае ограниченного оригинала следует полагать $s = 1$ [13].

Не надо думать, что отмеченная особенность присуща лишь КФНСТ. Причина лежит в существовании задачи обращения — восстановлении всех особенностей поведения оригинала по его изображению $F(p)$ — гладкой, любое число раз непрерывно дифференцируемой функцией, к тому же стремящейся к нулю при $p \rightarrow \infty$. Поэтому в любом методе обращения приходится устраивать комбинации значений изображения и его производных с сильно отличающимися по модулю коэффициентами

(что увеличивает неустойчивость метода). И чем точнее метод, тем сильнее будет проявляться эта особенность.

4. Методы Виддера. Рассмотрим выражение

$$(-1)^n \frac{p^{n+1}}{n!} F^{(n)}(p) = \int_0^\infty \left(x^n e^{-px} \frac{p^{n+1}}{n!} \right) f(x) dx$$

и введем операторы Виддера

$$W_n(f, t) = (-1)^n \frac{p^{n+1}}{n!} F^{(n)}(p) \Big|_{p=n/t}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Запишем их в виде сингулярных интегралов

$$W_n(f, t) = \int_0^\infty w_n(x) f(tx) dx, \quad w_n(x) = \frac{n^{n+1}}{n!} e^{-nx} x^n.$$

Ядра $w_n(x)$ удовлетворяют условиям теорем И. П. Романовского и Д. К. Фаддеева [8], откуда сразу следует сходимость, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n(f, t) = f(t),$$

если $f(x)$ интегрируема и непрерывна в точке $x = t$.

Однако нас интересует не только факт сходимости, но и скорость сходимости, т. е. поведение величин

$$\varepsilon_n^W(f, t) = W_n(f, t) - f(t)$$

при $n \rightarrow \infty$. Ядро $w_n(x)$ неотрицательно, наибольшего значения достигает в точке $x = 1$, $w_n(1) \approx \sqrt{n/2\pi}$, и при любом n площадь под его графиком равна единице, т. е. $\int_0^\infty w_n(x) dx = 1$.

Графики ядер $w_n(x)$ для $n = 1, 3, 7, 10$ приведены на рис. 3.

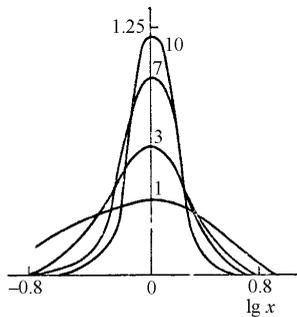


Рис. 3. Ядра Виддера.

Погрешность $\varepsilon_n^W(f, t)$ представима в виде [13]

$$\varepsilon_n^W(f, t) = \frac{1}{n} t f'(t) + \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \right) \frac{t^2 f''(t)}{2!} + \left(\frac{5}{n^2} + \frac{6}{n^3} \right) \frac{t^3 f'''(t)}{3!} + \dots$$

В частности, отсюда при больших n получаем главный член погрешности:

$$\varepsilon_n^W(f, t) \approx \frac{1}{n} \frac{(t^2 f'(t))'}{2}.$$

Как видим, метод Виддера быстро насыщаем, а именно: наличие производных оригинала выше второго порядка не улучшает сходимости. Приближенные значения оригинала, получаемые по формуле $f(t) \approx W_n(f, t)$, представляют собой усреднение искомого оригинала $f(tx)$ с ядрами $w_n(x)$ по таким окрестностям точки $x = 1$, где ядра существенно отличны от нуля. Значит, если искомым оригиналом слабо меняется на отрезках, длины которых сравнимы с «шириной» ядра, то методы будут доставлять неплохие приближения к оригиналу.

Знание характера зависимости ошибки от n позволяет на основе полученных приближений строить методы, быстрее сходящиеся к искомому оригиналу [13]: линейная комбинация

$$W_n(k, f, t) = \sum_{j=1}^k c_{kj} W_{nd_j}(f, t) \quad (9)$$

значительно лучше приближает искомым оригиналом, чем все входящие в нее приближения по Виддеру $W_{nd_j}(f, t)$. Коэффициенты линейной комбинации (9) вычисляются по формуле

$$c_{kj} = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \frac{d_j}{d_j - d_i}, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Оператор (9) допускает интегральное представление

$$W_n(k, f, t) = \int_0^{\infty} w_n(k, x) f(tx) dx, \quad w_n(k, x) = \sum_{j=1}^k c_{kj} w_{nd_j}(x),$$

ядро которого при любых значениях n, k удовлетворяет условию

$$\int_0^{\infty} w_n(k, x) dx = 1.$$

Это ядро не знакопостоянно, в отличие от ядер $w_{nd_j}(x)$. Знаки чисел c_{kj} чередуются, а значение c_{kk} положительно и больше единицы. В точке $x = 1$ имеем

$$w_n(k, 1) \approx \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \sum_{j=1}^k c_{kj} \sqrt{d_j}.$$

Пример. Пусть известны значения $W_n(f, t)$ для $n = 3, 6, 9$. Их линейная комбинация (9) имеет вид $4.5W_9(f, t) - 4W_6(f, t) + 0.5 \cdot W_3(f, t)$. Графики ядра $w_3(3, x)$ этого оператора и порождающих его ядер $w_3(x), w_6(x), w_9(x)$ приведены на рис. 4.

5. Ряды Лагерра. Рассмотрим систему функций Лагерра:

$$\{l_k(t)\}_{k=0}^{\infty}, \quad l_k(t) = \exp(-t/2)L_k(t),$$

$$L_k(t) = \frac{e^t}{k!} \frac{d^k}{dt^k} (t^k e^{-t}) \text{ — многочлен Лагерра.}$$

Эта система полна и ортонормирована в пространстве $L_2(0, \infty)$.

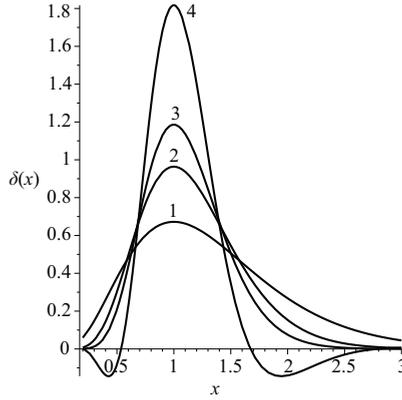


Рис. 4. Ядра $w_3(x), w_6(x), w_9(x), w_3(3, x)$.

Пусть a — произвольное положительное число. Система функций

$$\{\eta_k(t)\}_{k=0}^{\infty}, \quad \eta_k(t) = \sqrt{a} l_k(at) \quad (10)$$

также будет полна и ортонормирована в $L_2(0, \infty)$.

Предположим, что решение $f(t)$ уравнения (1) при некотором $a > 0$ представимо в виде ряда по системе функций (10):

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \eta_k(t).$$

Подставляя его в уравнение (1), с учетом свойств изображений многочленов Лагерра, приходим к уравнению

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k \sqrt{a} \left(\frac{a/2 - p}{a/2 + p} \right)^k = \left(\frac{a}{2} + p \right) F(p).$$

Положим

$$b_k = (-1)^k c_k \sqrt{a}, \quad k = 0, 1, \dots$$

и сделаем замену переменной

$$z = (a/2 - p)/(a/2 + p). \quad (11)$$

Преобразование (11) конформно отображает правую полуплоскость $\operatorname{Re} p \geq 0$ на круг $|z| \leq 1$. Функция

$$G(z) = \left(\frac{a}{2} + p \right) F(p) \Big|_{p=a(1-z)/(2(1+z))} = \frac{a}{1+z} F\left(\frac{a}{2} \cdot \frac{1-z}{1+z} \right) \quad (12)$$

в силу сделанных относительно $F(p)$ предположений будет регулярна на круге $|z| \leq 1$.

Итак, функция (12) имеет представление

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k, \quad (13)$$

причем радиус сходимости ряда (13) не менее единицы.

Как известно, радиус сходимости степенного ряда равен расстоянию от точки $z = 0$ до ближайшей особой точки $G(z)$. Укажем способ выбора такого значения параметра a , при котором радиус сходимости ряда (13) максимален, что равносильно самому быстрому убыванию коэффициентов ряда (13) (см. [13]).

Радиус сходимости ряда (13) будет наибольшим, если все особые точки функции $F(p)$, лежащие в полуплоскости $\operatorname{Re} p < 0$, заключить в замкнутый круг с центром на отрицательной полуоси, который виден из начала координат под наименьшим углом, а в качестве параметра a взять удвоенную длину отрезка касательной к этому кругу от точки касания до точки $p = 0$.

З а м е ч а н и е 1. Если множество особых всех точек $F(p)$ лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} p < 0$, но неограничено, то при любом выборе параметра a радиус сходимости ряда (13) не превосходит единицы.

В книге [13] предложен следующий алгоритм приближенного нахождения коэффициентов ряда (13). Положим

$$w = \exp(-2\pi i/n), \quad z_k = w^k, \quad p_k = \frac{a}{2} \frac{1 - z_k}{1 + z_k}, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1,$$

тогда

$$b_\nu \approx \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} G(z_k) z_k^{-\nu}, \quad \nu = 0, 1, \dots, n - 1,$$

и в итоге поиск приближенного решения $f_n(t)$ в виде отрезка ряда по функциям Лагерра равносильно его представлению сингулярным интегралом:

$$f_n(t) = \int_0^\infty \delta_n(x, t) f(tx) dx, \quad \delta_n(x, t) = \frac{t}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu l_\nu(at) \sum_{k=0}^{n-1} z_k^{-\nu} \frac{a}{1 + z_k} \exp(-xtp_k).$$

Отметим, что полностью избавиться от зависимости ядра от t не удастся, что демонстрирует график функции $\delta_{45}(x, 15)$ на рис. 5, и при изменении t точка максимума ядра не меняется.

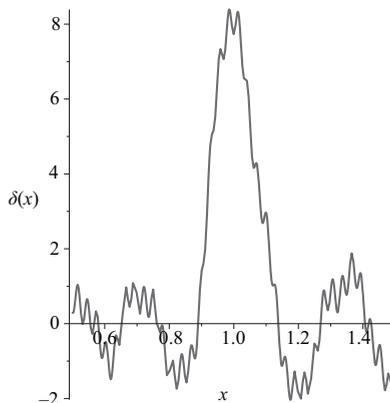


Рис. 5. Ядро $\delta_{45}(x, 15)$.

З а м е ч а н и е 2. Можно построить дельтаобразные ядра, получающиеся при применении формулы трапеций для вычисления интеграла (6). Однако их график

аналогичен приведенному на рис. 1 лишь при большом числе узлов формулы трапеций — порядка 10 000.

Литература

1. Диткин В. А., Прудников А. П. *Операционное исчисление*. Москва, Высшая школа (1975).
2. Крылов В. И., Скобля Н. С. *Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа*. Москва, Наука (1974).
3. Widder D. V. *The Laplace transform*. Princeton (1946).
4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. *Методы теории функций комплексного переменного*. Москва, Лань (2002).
5. Лурье А. И. *Операционное исчисление и его приложение к задачам механики*. Москва; Ленинград, Гостехиздат (1951).
6. Слепян Л. И., Яковлев Ю. С. *Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики*. Ленинград, Судостроение (1980).
7. Cohen A. M. *Numerical methods for Laplace transform inversion*. New York, Springer (2007).
8. Натансон И. П. *Теория функций вещественной переменной*. Москва, Наука (1974).
9. Лебедева А. В., Рябов В. М. Определение точек разрыва и величины скачка оригинала по его изображению по Лапласу. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **11** (69), вып. 2, 316–323 (2024). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.205>
10. Лебедева А. В., Рябов В. М. Характеристики сходимости и устойчивости некоторых методов обращения преобразования Лапласа. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **11** (69), вып. 1, 115–130 (2024). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.107>
11. Пашковский С. *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышёва*. Москва, Наука (1983).
12. Рябов В. М. О некоторых задачах, возникающих при обращении преобразования Лапласа. *Методы вычислений*. **16**, 59–63 (1991).
13. Рябов В. М. *Численное обращение преобразования Лапласа*. Санкт-Петербург, Изд-во С.-Петерб. ун-та (2013).
14. Крылов В. И., Скобля Н. С. *Справочная книга по численному обращению преобразования Лапласа*. Минск, Наука и техника (1968).

Статья поступила в редакцию 25 мая 2024 г.;
доработана 14 июня 2024 г.;
рекомендована к печати 29 августа 2024 г.

Контактная информация:

Лебедева Анастасия Владимировна — канд. физ.-мат. наук, доц.;
<https://orcid.org/0000-0001-9026-0292>, a.v.lebedeva@spbu.ru
Рябов Виктор Михайлович — д-р физ.-мат. наук, проф.;
<https://orcid.org/0000-0002-1364-5428>, v.ryabov@spbu.ru

Delta-shaped kernels generated by Laplace transform inversion methods*

A. V. Lebedeva, V. M. Ryabov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Lebedeva A. V., Ryabov V. M. Delta-shaped kernels generated by Laplace transform inversion methods. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2025, vol. 12 (70), issue 1, pp. 37–47. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2025.103> (In Russian)

The application of the integral Laplace transform for a wide class of problems leads to a simpler equation for the image of the desired original. At the next step, the problem of inversion arises, i. e. finding the original from its image. As a rule, it is not possible to carry

*Research was carried out using computational resources provided by Resource Center “Computer Center of St. Petersburg State University” (<http://www.cc.spbu.ru/en>).

out this step analytically. The problem arises of using approximate inversion methods. In this case, the approximate solution is represented as a linear combination of the image and its derivatives at a number of points of the complex half-plane in which the image is regular. However, the original, unlike the image, may even have break points. For most handling methods there are no error estimates, which makes it difficult to compare methods with each other and the choice of a particular method for practical application. Target of this work is to consider various methods from a single point of view, namely the study of the so-called called delta-shaped nuclei, as well as design issues delta methods with specified properties, estimating their error, accelerating convergence, etc. Ideology of delta methods belongs, apparently, to Widder, although in an implicit form.

Keywords: integral Laplace transform, inversion problem, delta-shaped kernels.

References

1. Ditkin V. A., Prudnikov A. P. *Operational calculus*. Moscow, Vysshiaia shkola Publ. (1975). (In Russian)
2. Krylov V. I., Skoblya N. S. *Methods of the approximate Fourier transform and the inversion of the Laplace transform*. Moscow, Nauka Publ. (1974.). (In Russian)
3. Widder D. V. *The Laplace transform*. Princeton (1946).
4. Lavrent'ev M. A., Shabat B. V. *Methods of the theory of functions of a complex variable*. Moscow, Lan' Publ. (2002). (In Russian)
5. Lurie A. I. *Operational calculus and its application to problems of mechanics*. Moscow; Leningrad, Gostekhizdat Publ. (1951). (In Russian)
6. Slepyan L. I., Yakovlev Yu. S. *Integral transformations in non-stationary problems of mechanics*. Leningrad, Sudostroenie Publ. (1980). (In Russian)
7. Cohen A. M. *Numerical methods for Laplace transform inversion*. New York, Springer (2007).
8. Natanson I. P. *Teoriia funktsii veshchestvennoi peremennoi*. Moscow, Nauka Publ. (1974). (In Russian) [Eng. transl.: Natanson I. P. *Theory of functions of a real variable*. Courier Dover Publ. (2016)].
9. Lebedeva A. V., Ryabov V. M. Determination of discontinuity points and the jump magnitude of the original based on its Laplace image. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **11** (69), iss. 2, 316–323 (2024). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.205> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **57**, iss. 2, 213–218 (2024). <https://doi.org/10.1134/S1063454124700067>].
10. Lebedeva A. V., Ryabov V. M. Characteristics of convergence and stability of some methods for inverting the Laplace transform. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **11** (69), iss. 1, 115–130 (2024). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.107> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **57**, iss. 1, 77–88 (2024). <https://doi.org/10.1134/S1063454124010096>].
11. Pashkovsky S. *Vychislitel'nye primeneniia mnogochlenov i riadov Chebysheva*. Moscow, Nauka Publ. (In Russian) [Eng. transl.: Pashkovsky S. *Numerical applications of Chebyshev polynomials and series*. Warsaw, PWN Publ. (1975)].
12. Ryabov V. M. On some problems arising when inverting the Laplace transform. *Computational methods* **16**, 59–63 (1991). (In Russian)
13. Ryabov V. M. *Numerical inversion of the Laplace transform*. St. Petersburg, St. Petersburg University Press (2013). (In Russian)
14. Krylov V. I., Skoblya N. S. *Reference book on the numerical inversion of the Laplace transform*. Minsk, Nauka i tekhnika Publ. (1968). (In Russian)

Received: May 25, 2024

Revised: June 14, 2024

Accepted: August 29, 2024

Authors' information:

Anastasia V. Lebedeva — <https://orcid.org/0000-0001-9026-0292>, a.v.lebedeva@spbu.ru

Victor M. Ryabov — <https://orcid.org/0000-0002-1364-5428>, v.ryabov@spbu.ru