

Рост субгармонических функций в полукольце*

А. А. Наумова

Курский государственный университет,
Российская Федерация, 305000, Курск, ул. Радищева, 33

Для цитирования: Наумова А. А. Рост субгармонических функций в полукольце // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2025. Т. 12 (70). Вып. 1. С. 64–75. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2025.105>

В работе рассматриваются субгармонические функции v в неограниченном открытом полукольце, рост которых определяется положительной, непрерывной, возрастающей и неограниченной функцией $\gamma(r)$, определенной на $[0, \infty)$ (функцией роста). Пространство субгармонических функций конечного γ -типа обозначается $S(R, \gamma)$. В терминах коэффициентов Фурье получен критерий принадлежности субгармонической функции пространству $S(R, \gamma)$. В статье некоторые из результатов А. А. Кондратюка, К. Г. Малютина, Б. Н. Хабибуллина и др. распространяются на функции, определенные в неограниченном полукольце. Переход в неограниченное полукольцо вызывает определенные трудности, связанные со сложным поведением функции в окрестности границы. Отличие от случая плоскости проявляется уже при получении критериев принадлежности субгармонической функции заданному классу.

Ключевые слова: субгармоническая функция, полукольцо, полная мера, функция роста, коэффициенты Фурье.

1. Введение. В 60-х годах в работах американских математиков Л. Рубела, Б. Тейлора, Д. Майлза, Д. Шиа и др. начал широко применяться метод рядов Фурье для изучения свойств целых и мероморфных функций. Этот метод является эффективным при решении ряда общих задач теории мероморфных функций и устанавливает ее связь с теорией рядов Фурье. Одним из преимуществ этого метода является то, что он позволяет исследовать функции с довольно нерегулярным ростом на бесконечности и функции бесконечного порядка.

Строго положительная, непрерывная, возрастающая и неограниченная функция $\gamma(r)$, определенная на $[0, \infty)$, называется *функцией роста*. Пусть f — мероморфная в комплексной плоскости функция, $Z(f)$ ($W(f)$) — множество ее нулей (полюсов), $T(r, f)$ — неванлинновская характеристика, $c_k(r, f)$ — коэффициенты Фурье функции f . Функция f называется функцией конечного γ -типа, если существуют положительные постоянные A и B такие, что $T(r, f) \leq A\gamma(Br)$ для всех $r > 0$. Класс таких функций обозначим через Γ , через Γ_E — класс целых функций конечного γ -типа. Ниже через $A, B, \dots$, мы будем обозначать положительные константы, которые могут изменяться на протяжении статьи.

Л. Рубел и Б. Тейлор [1] доказали эквивалентность трех следующих утверждений:

- 1) $f \in \Gamma$;

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-21-00006, <https://rscf.ru/project/24-21-00006/>).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2025

2) последовательность $Z(f)$ (или $W(f)$) имеет конечную γ -плотность и

$$c_k(r, f) \leq A\gamma(Br)$$

для всех целых k при некоторых положительных A, B и всех $r > 0$;

3) последовательность $Z(f)$ (или $W(f)$) имеет конечную γ -плотность,

$$c_k(r, f) \leq \frac{A\gamma(Br)}{|k| + 1}$$

при некоторых (возможно, других, но не зависящих от k) положительных A, B и всех $r > 0$.

Используя метод рядов Фурье, Д. Майлз [2] решил проблему представления мероморфной функции $f \in \Gamma$ в виде частного двух целых функций из класса Γ_E : $\Gamma = \Gamma_E/\Gamma_E$, не поддававшуюся решению на протяжении ряда лет. В 80-е годы важные результаты в этом направлении были получены А. А. Кондратюком [3–5], обобщившим теорию Левина — Пфлюгера целых функций вполне регулярного роста на мероморфные функции произвольного γ -типа. В статье [6] результаты из работ [1, 2] были распространены на дельта-субгармонические функции в полуплоскости. Важные результаты в теории рядов Фурье субгармонических функций в последнее время были получены в работах Б. Н. Хабибуллина и его учеников [7–9].

В данной работе мы распространяем некоторые из отмеченных выше результатов на функции, определенные в неограниченном полукольце. Мы доказываем наши утверждения для субгармонических функций. Переход в неограниченное полукольцо вызывает определенные трудности, связанные со сложным поведением функции в окрестности границы. Отличие от плоскости проявляется уже при получении критериев принадлежности субгармонической функции заданному классу. Так, например, никакое обобщение аналога п. 3) критерия Рубела — Тейлора в неограниченном полукольце невозможно.

2. Вспомогательные сведения. 2.1. Определения и терминология. Будем использовать следующие определения и терминологию. Через $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ обозначим множество целых положительных (натуральных) чисел; $\mathbb{C} = \{z = x + iy\}$ — комплексная плоскость с вещественной осью $\mathbb{R}$; $\text{Im } z = y$, $\text{Re } z = x$; $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ — верхняя полуплоскость без границы. Открытый круг радиуса r с центром в точке a будем обозначать через $C(a, r)$; через $B(a, r) = \overline{C(a, r)}$ — замкнутый круг; $\overline{G}$ — замыкание множества G ; G_+ — пересечение множества G с полуплоскостью $\mathbb{C}_+$, т. е. $G_+ = G \cap \mathbb{C}_+$; $\overset{\circ}{G}$ — внутренность множества G . Для $x \in \mathbb{R}$ обозначим через $x_+ = \max\{x, 0\}$. В частности, $\ln_+ 0 = 0$. Под выражением «полузамкнутое множество» мы понимаем множество на комплексной плоскости, часть границы которого принадлежит множеству, а остальная часть ему не принадлежит. В частности, под полузамкнутым полукольцом или полукругом в верхней полуплоскости мы понимаем полукольцо или полукруг, пересечение границы которого с вещественной осью не принадлежит данному множеству, а остальная часть границы принадлежит. Обозначим через $D_+(R_1, R_2) = \{z : 0 < R_1 < |z| < R_2 < +\infty, \text{Im } z > 0\}$ открытое полукольцо на верхней полуплоскости. Субгармоничность в замкнутом полукольце $\overline{D_+(R_1, R_2)}$ равносильна субгармоничности в $D_+(R'_1, R'_2, \delta) = \{z : 0 < R'_1 < |z| < R'_2 < +\infty, \text{Im } z > -\delta\}$ при некоторых $R'_1 < R_1 < R_2 < R'_2$, $\delta > 0$. Поэтому функции субгармонические и ограниченные сверху внутри открытого по-

лукольца $\overline{D_+(R_1, R_2)}$ образуют более широкий класс, чем субгармонические в замыкании $\overline{D_+(R_1, R_2)}$ полукольца. Через $D_+(R) = \{z : |z| > R, \operatorname{Im} z > 0\}$ обозначаем неограниченное открытое полукольцо на верхней полуплоскости.

2.2. Классы функций в $D_+(R_1, R_2)$. Пусть $S(D_+(R_1, R_2))$ — класс субгармонических функций в $D_+(R_1, R_2)$, имеющих в этом полукольце положительную гармоническую мажоранту, $G(z, \zeta)$ — функция Грина полукольца $D_+(R_1, R_2)$. Из [10, теорема 7] следует, что функция v из класса $S(D_+(R_1, R_2))$ обладает следующими свойствами:

а) v имеет почти всюду некасательные пределы:

$$v(R_1 e^{i\varphi}) = \lim_{r \rightarrow R_1 + 0} v(re^{i\varphi}), \quad v(R_2 e^{i\varphi}) = \lim_{r \rightarrow R_2 - 0} v(re^{i\varphi}), \quad v(t) = \lim_{y \rightarrow +0} v(t + iy);$$

б) существуют меры ν_j , $j = 1, 2$, на интервале $(0, \pi)$, причем если $z_0 \in D_+(R_1, R_2)$ такая точка, что $v(z_0) > -\infty$, то меры $\tilde{\nu}_j$, где $d\tilde{\nu}_j = \frac{\partial G(z_0, R_j e^{i\varphi})}{\partial n_\zeta}$, $j = 1, 2$, имеют ограниченную полную вариацию на интервале $(0, \pi)$, мера ν на множестве $I(R_1, R_2) = (-R_2, -R_1) \cup (R_1, R_2)$, причем мера $\tilde{\nu}$, где $d\tilde{\nu} = \frac{\partial G(z_0, t)}{\partial n_\zeta}$, имеет ограниченную полную вариацию на множестве I такую, что

$$\nu_1([\alpha, \beta]) = \lim_{r \rightarrow R_1 + 0} R_1 \int_{\alpha}^{\beta} v(re^{i\varphi}) d\varphi, \quad \nu_2([\alpha, \beta]) = \lim_{r \rightarrow R_2 - 0} R_2 \int_{\alpha}^{\beta} v(re^{i\varphi}) d\varphi,$$

если $0 < \alpha < \beta < \pi$, $\nu_j(\{\alpha\}) = \nu_j(\{\beta\}) = 0$, $j = 1, 2$,

$$\nu([a, b]) = \lim_{y \rightarrow +0} \int_a^b v(x + iy) dx, \text{ если } [a, b] \in I, \nu(\{a\}) = \nu(\{b\}) = 0.$$

Мера $\hat{\nu} = \nu_1 + \nu_2 + \nu$ называется граничной мерой функции v .

с) $d\nu_j(\varphi) = R_j v(R_j e^{i\varphi}) d\varphi + d\sigma_j(\varphi) d\varphi$, $j = 1, 2$, $d\nu(t) = v(t) dt + d\sigma(t)$, где σ_j , $j = 1, 2$, σ — меры, сингулярные относительно меры Лебега (невозрастающие ограниченные функции на $(0, \pi)$, на I , для которых почти всюду $\sigma'_j = 0$, $\sigma' = 0$).

Для функции $v \in S(D_+(R_1, R_2))$ определим полную меру λ как

$$\lambda(K) = 2\pi \int_{D_+(R_1, R_2) \cap K} \operatorname{Im} \zeta d\mu(\zeta) - \hat{\nu}(K),$$

где μ — рессовская мера функции v . Мера λ обладает следующими свойствами:

- 1) λ — конечная мера на каждом компакте $K \subset \mathbb{C}$;
- 2) λ — неотрицательная мера в $\overline{D_+(R_1, R_2)}$;
- 3) λ равна нулю в дополнении $\mathbb{C} \setminus \overline{D_+(R_1, R_2)}$.

Наоборот, если мера λ удовлетворяет условиям 1–3, то существует функция $v \in S(D_+(R_1, R_2))$, с полной мерой равная λ . Совокупность условий 1–3 в дальнейшем будем обозначать через $\{G\}$, если, кроме того, мера λ неотрицательная и на $\mathbb{R}$, то через $\{G^+\}$.

Используя введенные определения, функцию $v \in S(D_+(R_1, R_2))$, $z \in D_+(R_1, R_2)$ можно записать в виде ([10, теорема 7]):

$$v(z) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\frac{D_+(R_1, R_2)}{D_+(R_1, R_2)}} K(z, \zeta) d\lambda(\zeta) + \\ + a_1 M(z, R_1) + a_2 M(z, -R_1) + a_3 M(z, R_2) + a_4 M(z, -R_2),$$

где

$$K(z, \zeta) = \begin{cases} \frac{1}{\operatorname{Im} \zeta} G(z, \zeta), & \zeta \in D_+(R_1, R_2), \\ \frac{\partial G(z, R_j e^{i\varphi})}{\partial n_\zeta}, & \zeta = R_j e^{i\varphi}, \varphi \in (0, \pi), \\ \frac{\partial G(z, t)}{\partial n_t}, & \zeta \in I(R_1, R_2), \end{cases}$$

$M(z, \zeta)$ — функция Мартина полукольца $D_+(R_1, R_2)$, отвечающая граничной точке ζ , а интегралы понимаются как несобственные с особыми точками на концах интегрирования; функция $K(z, \zeta)$ продолжена по непрерывности на вещественную ось при $R_1 \leq |t| \leq R_2$. В частности, если функция v субгармонична в полукольце $D_+(R'_1, R'_2)$, $R'_1 < R'_1 < R_2 < R'_2$, то

$$v(z) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\frac{D_+(R_1, R_2)}{D_+(R_1, R_2)}} G(z, \zeta) d\lambda(\zeta) + \frac{R_2}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G(z, R_2 e^{i\varphi})}{\partial n} v(R_2 e^{i\varphi}) d\varphi + \\ + \frac{R_1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G(z, R_1 e^{i\varphi})}{\partial n} v(R_1 e^{i\varphi}) d\varphi, \quad z \in D_+(R_1, R_2). \quad (1)$$

Пусть $R_1 = qR$, $R_2 = \frac{1}{q}R$. Тогда имеет место соотношение:

$$G(z, \zeta) = \ln \left| \frac{\sigma \left(\ln \frac{z\bar{\zeta}}{q^2 R^2} \right) \sigma \left(\ln \frac{z}{\zeta} \right)}{\sigma \left(\ln \frac{z\zeta}{q^2 R^2} \right) \sigma \left(\ln \frac{z}{\bar{\zeta}} \right)} \right|,$$

где $\ln \omega = \ln |\omega| + i \arg \omega$, $0 < \arg z, \arg \zeta < \pi$, $\arg \bar{\zeta} = -\arg \zeta$, $\arg \omega_1 \omega_2 = \arg \omega_1 + \arg \omega_2$, $\arg \frac{\omega_1}{\omega_2} = \arg \omega_1 - \arg \omega_2$, $\sigma(u)$ — сигма-функция Вейерштрасса с основными периодами $\omega_1 = 4 \ln \frac{1}{q}$, $\omega_2 = 2\pi i$.

Используя теорию эллиптических функций (см., например, [11, глава III, п. 12]), можно получить разложения ядра в формуле (1) при $R_1 = qR$, $R_2 = R/q$, $q \in (0, 1)$, $z = re^{i\theta}$, $\zeta = \tau e^{i\varphi}$:

$$G(z, \zeta) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(1-q^{4m})} \left(\frac{\tau}{r} \right)^m \left(1 - \frac{q^{2m} r^{2m}}{R^{2m}} \right) \left(1 - \frac{q^{2m} R^{2m}}{\tau^{2m}} \right) \times \\ \times \sin m\theta \sin m\varphi, \quad qR < \tau < r < \frac{1}{q}R, \quad (2)$$

$$G(z, \zeta) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(1-q^{4m})} \left(\frac{r}{\tau} \right)^m \left(1 - \frac{q^{2m} R^{2m}}{r^{2m}} \right) \left(1 - \frac{q^{2m} \tau^{2m}}{R^{2m}} \right) \times \\ \times \sin m\theta \sin m\varphi, \quad qR < r < \tau < \frac{1}{q}R, \quad (3)$$

$$\frac{\partial G(z, t)}{\partial n} = \frac{2}{t} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(1 - q^{4m})} \left(\frac{t}{r}\right)^m \left(1 - \frac{q^{2m} R^{2m}}{t^{2m}}\right) \left(1 - \frac{q^{2m} r^{2m}}{R^{2m}}\right) \sin m\theta, \quad (4)$$

$$qR < |t| < r < R/q,$$

$$\frac{\partial G(z, t)}{\partial n} = \frac{2}{t} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(1 - q^{4m})} \left(\frac{r}{t}\right)^m \left(1 - \frac{q^{2m} t^{2m}}{R^{2m}}\right) \left(1 - \frac{q^{2m} R^{2m}}{r^{2m}}\right) \sin m\theta, \quad (5)$$

$$qR < r < |t| < R/q,$$

$$\frac{\partial G(z, qRe^{i\varphi})}{\partial n} = \frac{4}{qR} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{4m}} \left(\frac{qR}{r}\right)^m \left(1 - \frac{q^{2m} r^{2m}}{R^{2m}}\right) \sin m\theta \sin m\varphi, \quad (6)$$

$$\frac{\partial G\left(z, \frac{1}{q}Re^{i\varphi}\right)}{\partial n} = \frac{4q}{R} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{4m}} \left(\frac{qr}{R}\right)^m \left(1 - \frac{q^{2m} R^{2m}}{r^{2m}}\right) \sin m\theta \sin m\varphi. \quad (7)$$

Формулы (2)–(7) получены в диссертации А. Ф. Гришина [12]. В других источниках нам они не встречались. Заметим также, что если $\zeta \in \partial D(R_1, R_2)$, то $G(z, \zeta) = 0$.

3. Коэффициенты Фурье функций класса $S(D_+(R_1, R_2))$. Коэффициенты Фурье функции $v \in S(D_+(R_1, R_2))$ определяются равенством

$$c_k(r, v) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} v(re^{i\theta}) \sin k\theta d\theta, \quad R_1 < r < R_2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Для заданной меры λ обозначим

$$d\lambda_m(\zeta) = \frac{\sin m\varphi}{\sin \varphi} \tau^{m-1} d\lambda(\zeta) \quad (\zeta = \tau e^{i\varphi}), \quad \lambda_m(r) = \lambda_m(\overline{C(0, r)}),$$

где функция $\frac{\sin m\varphi}{\sin \varphi}$ при $\varphi = 0, \pi$ определяется по непрерывности.

Следующая формула — это формула Карлемана в обозначениях А. Ф. Гришина [13]:

$$\frac{1}{r^k} \int_0^{\pi} v(re^{i\varphi}) \sin k\varphi d\varphi = \int_{r_0}^r \frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}} dt + \frac{1}{r_0^k} \int_0^{\pi} v(r_0 e^{i\varphi}) \sin k\varphi d\varphi, \quad R_1 < r_0 < r < R_2, \quad (8)$$

где λ — полная мера функции v . В частности, при $k = 1$ формула (8) имеет вид

$$\frac{1}{r} \int_0^{\pi} v(re^{i\varphi}) \sin \varphi d\varphi = \int_{r_0}^r \frac{\lambda(t)}{t^3} dt + \frac{1}{r_0} \int_0^{\pi} v(r_0 e^{i\varphi}) \sin \varphi d\varphi \quad (9)$$

для всех $r, R_1 < r_0 < r < R_2$.

Отметим еще неравенство, которое будет полезно в дальнейшем:

$$\begin{aligned} |\lambda_m(r)| &= \left| \iint_{\overline{C(0, r)}} d\lambda_m(\zeta) \right| = \left| \iint_{\overline{C(0, r)}} \frac{\sin m\varphi}{\sin \varphi} \tau^{m-1} d\lambda(\zeta) \right| \leq \\ &\leq m \iint_{\overline{C(0, r)}} \tau^{m-1} d|\lambda|(\zeta) \leq mr^{m-1} |\lambda|(r). \end{aligned} \quad (10)$$

Из формулы (8) получим следующие выражения для коэффициентов Фурье:

$$c_k(r, v) = \alpha_k r^k + \frac{2r^k}{\pi} \int_{r_0}^r \frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}} dt, \quad k \in \mathbb{N}, \quad R_1 < r_0 < r < R_2, \quad (11)$$

где $\alpha_k = r_0^{-k} c_k(r_0, v)$.

Применяя формулу интегрирования по частям к интегралу в (11), получим следующее представление для коэффициентов Фурье при $R_1 < r_0 < r < R_2$:

$$\begin{aligned} c_k(r, v) = & \alpha_k r^k + \frac{r^k}{\pi k r_0^{2k}} \iint_{\overline{C_+(0, r_0)}} \frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im} \zeta} \tau^k d\lambda(\zeta) + \\ & + \frac{r^k}{\pi k} \iint_{D_+(r_0, r)} \frac{\sin k\varphi}{\tau^k \operatorname{Im} \zeta} d\lambda(\zeta) - \frac{1}{r^k \pi k} \iint_{\overline{C_+(0, r)}} \frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im} \zeta} \tau^k d\lambda(\zeta), \end{aligned}$$

в котором $\zeta = \tau e^{i\varphi}$.

Предложение 1. Коэффициенты Фурье $c_k(r, v)$ функции класса $S(D_+(R_1, R_2))$ являются непрерывными функциями от r .

Доказательство. Утверждение следует из того, что правые части соотношений (11) являются непрерывными в каждой точке r функциями.

4. Субгармонические функции конечного γ -типа в $D_+(R)$. Обозначим через $SK(R)$ класс субгармонических функций в $D_+(R)$, имеющих в каждом ограниченном множестве этого полукольца положительную гармоническую мажоранту. Пусть $v \in SK(R)$, $v = v_+ - v_-$, λ — полная мера функции v , $\lambda = \lambda_+ - \lambda_-$ — жорданово разложение меры λ (заметим, что λ_- не есть полная мера v_-). Положим

$$m(r, v) := \frac{1}{r} \int_0^\pi v_+(re^{i\varphi}) \sin \varphi d\varphi, \quad N(r, v) := \int_{r_0}^r \frac{\lambda_-(t)}{t^3} dt,$$

$$T(r, v) := m(r, v) + N(r, v) + m(r_0, -v), \quad r > r_0,$$

где r_0 — фиксированное положительное число такое, что $r_0 > R$.

В этих обозначениях формула (9) может быть записана в следующем виде:

$$T(r, v) = T(r, -v). \quad (12)$$

Мы предположим теперь, что функция роста γ удовлетворяет условию

$$\varliminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\gamma(r)}{r} > 0. \quad (13)$$

Определение 1. Функция $v \in SK(R)$ называется функцией конечного γ -типа, если существуют постоянные A и $B > 0$ такие, что

$$T(r, v) \leq \frac{A}{r} \gamma(Br)$$

для всех $r > r_0$.

Класс данных субгармонических функций конечного γ -типа обозначим через $S(R, \gamma)$.

Лемма 1. *Класс $S(R, \gamma)$ — конус.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение вытекает из (12) и неравенства

$$T\left(r, \sum v_j\right) \leq \sum T(r, v_j).$$

Определение 2. *Положительная мера λ имеет конечную γ -плотность в $D_+(R)$, если при некоторых положительных A и B выполняется неравенство*

$$N(r, \lambda) := \int_{r_0}^r \frac{\lambda(t)}{t^3} dt \leq \frac{A}{r} \gamma(Br)$$

для всех $r > r_0 > R$.

Определение 3. *Положительная мера λ в $D_+(R)$ называется мерой конечного γ -типа, если существуют положительные постоянные A и B такие, что для всех $r > r_0 > R$*

$$\lambda(r) \leq r A \gamma(Br). \quad (14)$$

Лемма 2. *Если мера λ имеет конечную γ -плотность, то она является мерой конечного γ -типа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательством служат неравенства

$$N(er, \lambda) = \int_{r_0}^{er} \frac{\lambda(t)}{t^3} dt \geq \int_r^{er} \frac{\lambda(t)}{t^3} dt \geq \frac{\lambda(r)}{e^2 r^2}.$$

5. Критерий принадлежности субгармонических функций пространству $S(R, \gamma)$. Сформулируем и докажем основной результат нашей работы.

Теорема 1. *Пусть $\lambda(v) = \lambda_+(v) - \lambda_-(v)$ — полная мера функции v , γ — функция роста, $v \in SK(R)$. Следующие два утверждения эквивалентны:*

1) $v \in S(R, \gamma)$;

2) *мера $\lambda_+(v)$ (или мера $\lambda_-(v)$) имеет конечную γ -плотность и выполняется неравенство*

$$|c_k(r, v)| \leq A \gamma(Br), \quad k \in \mathbb{N},$$

при некоторых положительных A , B и всех $r > R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем по схеме 1) $\implies$ 2) $\implies$ 1).

Докажем импликацию 1) $\implies$ 2). Пусть $v \in S(R, \gamma)$. Заметим вначале, что каждая из мер $\lambda_+(v)$ и $\lambda_-(v)$ имеет конечную γ -плотность. Мера $\lambda_-(v)$ имеет конечную γ -плотность по определению класса $S(R, \gamma)$. То, что мера $\lambda_+(v)$ имеет конечную γ -плотность, следует из формулы (12). Из этой же формулы мы получаем, что

$$\int_0^\pi |v(re^{i\varphi})| \sin \varphi d\varphi \leq A \gamma(Br). \quad (15)$$

Заметим также, что мера $|\lambda| = \lambda_+ + \lambda_-$ имеет конечную γ -плотность, а значит, удовлетворяет неравенству (14). Из (15) следует неравенство

$$|c_k(r, v)| = \left| \frac{2}{\pi} \int_0^\pi v(re^{i\theta}) \sin k\theta d\theta \right| \leq \frac{2k}{\pi} \int_0^\pi |v(re^{i\theta})| \sin \theta d\theta \leq kA\gamma(Br). \quad (16)$$

Из формулы (11) получаем

$$c_k(r, v) = \frac{1}{2^k} c_k(2r, v) - \frac{2r^k}{\pi} \int_r^{2r} \frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}} dt,$$

откуда, с учетом (10), (14), (16), следует неравенство

$$|c_k(r, v)| \leq \frac{k}{2^k} A\gamma(2Br) + \frac{2}{\pi} A\gamma(Br).$$

Тем самым импликация 1) $\implies$ 2) доказана.

Докажем теперь импликацию 2) $\implies$ 1). Пусть условие 2) теоремы 1 выполнено. Из неравенства $|c_1(r, v)| \leq A\gamma(Br)$ и формулы (9) следует, что если одна из мер $\lambda_+(v)$ или $\lambda_-(v)$ имеет конечную γ -плотность, то и другая мера имеет конечную γ -плотность и, таким образом, мера $|\lambda|$ имеет конечную γ -плотность. Далее мы оценим $v_+(z)$, используя формулу (1) при $R_1 = r/2$, $R_2 = 2r$. Используя разложение в ряд Фурье (6), (7), при $q = 1/2$, $R = r = |z|$, получим:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{r}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G(z, 2re^{i\varphi})}{\partial n} v(2re^{i\varphi}) d\varphi + \frac{r}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G(z, \frac{1}{2}re^{i\varphi})}{\partial n} v\left(\frac{1}{2}re^{i\varphi}\right) d\varphi \right| \leq \\ & \leq \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{2^m} \frac{4^m}{1+4^m} \left[2|c_m(2r, v)| + 8 \left| c_m\left(\frac{1}{2}r, v\right) \right| \right] \leq A\gamma(Br). \end{aligned}$$

Из этого неравенства и формулы (1) получаем

$$v_+(z) \leq \frac{1}{2\pi} \iint_{D_+(\frac{1}{2}r, 2r)} K(z, \zeta) d\lambda_-(\zeta) + A\gamma(Br).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное маленькое число. Оценим интеграл:

$$I_\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \iint_{D_+(r/2, r-\varepsilon)} K(z, \zeta) d\lambda_-(\zeta) \sin \theta d\theta.$$

Используя ортогональность системы полиномов $\{\sin k\theta\}$, $k = 1, 2, \dots$, на отрезке $[0, \pi]$ формулы (2), получим

$$\begin{aligned} I_\varepsilon & \leq \frac{1}{2} \iint_{D_+(r/2, r-\varepsilon)} \frac{\sin \varphi}{\operatorname{Im} \zeta} \frac{\tau}{r} \frac{4}{5} \left(1 - \frac{r^2}{4\tau^2} \right) d\lambda_-(\zeta) \leq \frac{2}{5r} \int_{r/2}^{r-\varepsilon} \left(1 - \frac{r^2}{4\tau^2} \right) d\lambda_-(\tau) \leq \\ & \leq \frac{2}{5r} \int_{r/2}^{r-\varepsilon} d\lambda_-(\tau) \leq \frac{2\lambda_-(r-\varepsilon)}{5r} \leq \frac{A}{r} \gamma(Br). \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$, получим

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \iint_{D_+(r/2, r)} K(z, \zeta) d\lambda_-(\zeta) \sin \theta d\theta \leq \frac{A}{r} \gamma(Br). \quad (17)$$

Теперь, опять используя ортогональность системы полиномов $\{\sin k\theta\}$, $k = 1, 2, \dots$, на отрезке $[0, \pi]$, формулы (3)–(5) и неравенство (17), имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\pi v_+(re^{i\theta}) \sin \theta d\theta &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left\{ \left[\iint_{D_+(r/2, r)} + \iint_{D_+(r, 2r)} \right] K(z, \zeta) d\lambda_-(\zeta) \right\} \sin \theta d\theta + \\ &+ 2A\gamma(Br) \leq \frac{1}{2} \iint_{D_+(r/2, r)} \frac{\sin \varphi}{\operatorname{Im} \zeta} \frac{\tau}{r} \frac{4}{5} \left(1 - \frac{r^2}{4\tau^2} \right) d\lambda_-(\zeta) + \\ &+ \frac{1}{2} \iint_{D_+(r, 2r)} \frac{\sin \varphi}{\operatorname{Im} \zeta} \frac{r}{\tau} \frac{4}{5} \left(1 - \frac{\tau^2}{4r^2} \right) d\lambda_-(\zeta) + 2A\gamma(Br) \leq \\ &\leq \frac{2}{5r} \int_{r/2}^r \left(1 - \frac{r^2}{4\tau^2} \right) d\lambda_-(\tau) + \frac{2}{5r} \int_r^{2r} \left(1 - \frac{\tau^2}{4r^2} \right) d\lambda_-(\tau) + 2A\gamma(Br) \leq \\ &\leq \frac{2}{5r} \int_{r/2}^{2r} d\lambda_-(\tau) + 2A\gamma(Br) \leq \frac{2\lambda_-(2r)}{5r} + 2A\gamma(Br). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что функция $v \in S(R, \gamma)$. □

В дополнение к теореме 1 покажем, что из условия 1) не следует такое усиление

$$|c_k(r)| \leq \varepsilon_k \gamma(Br),$$

где $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Это показывает следующий пример.

Пример. Рассмотрим неположительную, гармоническую в $\mathbb{C}_+$ функцию:

$$v(z) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \operatorname{Im} \frac{3^{(\rho+1)k}}{z - 3^k}, \quad 0 < \rho < 1.$$

Функция v удовлетворяет соотношению $v(3z) = 3^\rho v(z)$. Действительно,

$$v(3z) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \operatorname{Im} \frac{3^{(\rho+1)k}}{3z - 3^k} = \frac{1}{3} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \operatorname{Im} \frac{3^{(\rho+1)k}}{z - 3^{k-1}} = 3^\rho \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \operatorname{Im} \frac{3^{(\rho+1)k}}{z - 3^k}.$$

Отсюда получаем

$$C_1 r^\rho \leq \int_0^\pi |v(re^{i\varphi})| \sin \varphi d\varphi \leq C_2 r^\rho, \quad (18)$$

где

$$C_1 = 3^{-\rho} \inf_{1 \leq r \leq 3} \left(- \int_0^\pi v(re^{i\theta}) \sin \theta d\theta \right), \quad C_2 = 3^\rho \sup_{1 \leq r \leq 3} \left(- \int_0^\pi v(re^{i\theta}) \sin \theta d\theta \right).$$

Действительно, пусть $r = 3^k t$, где $t \in [1, 3]$. Тогда

$$\int_0^\pi |v(re^{i\varphi})| \sin \varphi d\varphi = - \int_0^\pi v(re^{i\varphi}) \sin \varphi d\varphi = (3^k)^\rho \int_0^\pi v(te^{i\varphi}) \sin \varphi d\varphi.$$

Откуда и следует (18).

Пусть $z = re^{i\theta}$, $3^{k_0} < r < 3^{k_0+1}$. Из разложения

$$v(re^{i\theta}) = - \sum_{3^k < r} 3^{\rho(k+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{3^{mk} \sin(m+1)\theta}{r^{m+1}} - \sum_{3^k > r} 3^{\rho k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^m \sin m\theta}{3^{mk}}$$

непосредственным подсчетом убеждаемся в справедливости соотношений

$$\begin{aligned} c_n(r, v) &= -\frac{1}{r^n} \sum_{3^k < r} 3^{k(\rho+n)} - r^n \sum_{3^k > r} 3^{k(\rho-n)} = -\frac{1}{r^n} \sum_{k=-\infty}^{k_0} 3^{k(\rho+n)} - r^n \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 3^{k(\rho-n)} = \\ &= -\frac{1}{r^n} \frac{3^{k_0(\rho+n)}}{1 - 3^{-(\rho+n)}} - r^n \frac{3^{(k_0+1)(\rho-n)}}{1 - 3^{\rho-n}}. \end{aligned}$$

В силу предложения 1 эти соотношения имеют место и при $r = r_0 = 3^{k_0}$:

$$\begin{aligned} c_n(r_0, v) &= -\frac{1}{3^{k_0}} \frac{3^{k_0(\rho+n)}}{1 - 3^{-(\rho+n)}} - 3^{k_0} \frac{3^{(k_0+1)(\rho-n)}}{1 - 3^{\rho-n}} = \\ &= -\frac{r_0^\rho}{1 - 3^{-(\rho+n)}} - \frac{3^\rho r_0^\rho}{3^n(1 - 3^{\rho-n})}. \end{aligned}$$

Откуда получаем неравенство

$$|c_n(r_0, v)| \geq r_0^\rho, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Так как число $r_0 = 3^{k_0}$ может быть выбрано каким угодно большим, то последнее неравенство показывает невозможность усиления теоремы 1.

6. Заключение. На протяжении статьи мы предполагали при определении классов растущих функций, что функция роста $\gamma(r)$ удовлетворяет условию (13). Оно необходимо, если мы хотим использовать для определения роста классическую неванлинновскую характеристику $T(r, v)$, так как неравенство $T(r, v) \leq A\gamma(Br)/r$ уже накладывает это ограничение на функцию роста γ . Если мы хотим рассматривать общий случай, без всяких ограничений на функцию роста (например, случай $\gamma(r) = r^\rho$, $0 < \rho < 1$), то мы должны использовать более сложную характеристику, чем неванлинновская, а именно $v \in S(R, \gamma)$, если

$$m(r_2, v) + m(r_1, -v) + \int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda_-(t)}{t^3} dt \leq \frac{A}{r_1} \gamma(Br_1) + \frac{A}{r_2} \gamma(Br_2)$$

для всех $r_2 > r_1 > R$. В этом случае все утверждения нашей работы имеют место, а их доказательство автоматически повторяет приведенные выше рассуждения.

Благодарность. Автор выражает признательность рецензенту за сделанные замечания, которые улучшили содержание и качество статьи.

Литература

1. Rubel L. A., Taylor B. A. Fourier series method for meromorphic and entire functions *Bull. Soc. Math. France* **96**, 53–96 (1968).
2. Miles J. B. Quotient representations of meromorphic functions *J. d'Analyse Math.* **25**, 371–388 (1972).
3. Кондратюк А. А. Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста. *Математический сборник* **106** (3), 386–408 (1978).
4. Кондратюк А. А. Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста. II. *Математический сборник* **113** (1), 118–132 (1980).
5. Кондратюк А. А. Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста. III. *Математический сборник* **120** (3), 331–343 (1983).
6. Малютин К. Г. Ряды Фурье и δ -субгармонические функции конечного γ -типа в полуплоскости. *Математический сборник* **192** (6), 51–70, (2001). <https://doi.org/10.4213/sm572>
7. Khabibullin B. N., Menshikova E. B. Balayage of Measures with respect to Polynomials and Logarithmic Kernels on the Complex Plane. *Lobachevskii Journal of Mathematics* **24** (12), 2823–2833 (2021). <https://doi.org/10.1134/S1995080221120180>
8. Khabibullin B. N., Menshikova E. B. Preorders on Subharmonic Functions and Measures with Applications to the Distribution of Zeros of Holomorphic Functions. *Lobachevskii Journal of Mathematics* **43** (3), 587–611 (2022). <https://doi.org/10.1134/S1995080222060154>
9. Меньшикова Э. Б. Интегральные формулы типа Карлемана и Б. Я. Левина для мероморфных и субгармонических функций. *Известия вузов. Математика* **6**, 37–53 (2022). <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2022-6-37-53>
10. Малютин К. Г., Наумова А. А. Представление субгармонических функций в полукольце и полукруге. *Чебышёвский сборник* **24** (5), 136–152 (2023). <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2023-24-5-136-152>
11. Ахиезер Н. И. *Элементы теории эллиптических функций*. Москва, Наука (1970).
12. Гришин А. Ф. Субгармонические функции конечного порядка: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Харьков (1992).
13. Гришин А. Ф. Непрерывность и асимптотическая непрерывность субгармонических функций. *Математическая физика, анализ, геометрия* **1** (2), 193–215 (1994).

Статья поступила в редакцию 9 мая 2024 г.;
доработана 26 июня 2024 г.;
рекомендована к печати 29 августа 2024 г.

Контактная информация:

Наумова Алена Александровна — аспирант; <https://orcid.org/0009-0001-9268-6649>,
aliona.filatowa2013@yandex.ru

The growth of subharmonic functions in a semicircle*

A. A. Naumova

Kursk State University, 33, ul. Radishcheva, Kursk, 305000, Russian Federation

For citation: Naumova A. A. The growth of subharmonic functions in a semicircle. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2025, vol. 12 (70), issue 1, pp. 64–75. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2025.105> (In Russian)

*The work is supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 24-21-00006, <https://rscf.ru/project/24-21-00006/>).

Subharmonic functions v in an unbounded open semiring, the growth of which is determined by the positive, continuous, increasing and unbounded function $\gamma(r)$, defined on $[0, \infty)$ (the growth function) are considered in the paper. Space of subharmonic functions of finite γ -type are denoted as $S(R, \gamma)$. In terms of Fourier coefficients, the criterion for belonging of a subharmonic function to the space $S(R, \gamma)$ is obtained. The paper contains some of the results by A. A. Kondratyuk, K. G. Malyutina, B. N. Khabibullina et al. extended to the functions defined in unbounded semiring. Transition to an unbounded semiring causes certain difficulties associated with complex behavior functions in a neighborhood of the boundary. Difference from the plane case appears already when receiving the criteria for belonging of subharmonic function to a given class.

Keywords: asymptotic stability, small periodic perturbation, oscillator.

References

1. Rubel L. A., Taylor B. A. Fourier series method for meromorphic and entire functions. *Bull. Soc. Math. France* **96**, 53–96 (1968).
2. Miles J. B. Quotient representations of meromorphic functions *J. d' Analyse Math.* **25**, 371–388 (1972).
3. Kondratyuk A. A. Fourier series method for integer and meromorphic functions of quite regular growth. *Matematicheskii sbornik* **106** (3), 386–408 (1978). [Eng. transl.: *Mathematics of the USSR-Sbornik* **35**, iss. 3, 63–84 (1979). <https://doi.org/10.1070/SM1979v035n01ABEH001452>].
4. Kondratyuk A. A. Fourier series method for integer and meromorphic functions of quite regular growth. II. *Matematicheskii sbornik* **113** (1), 118–132 (1980). (In Russian) [Eng. transl.: *Mathematics of the USSR-Sbornik* **41**, iss. 1, 101–113 (1982). <https://doi.org/10.1070/SM1982v041n01ABEH002223>].
5. Kondratyuk A. A. Fourier series method for integer and meromorphic functions of quite regular growth. III. *Matematicheskii sbornik* **120** (3), 331–343 (1983). (In Russian) [Eng. transl.: *Mathematics of the USSR-Sbornik* **48**, iss. 2, 327–338 (1984) <https://doi.org/10.1070/SM1984v048n02ABEH002677>].
6. Malyutin K. G. Fourier series and δ -subharmonic functions of finite γ -type in a half-plane. *Matematicheskii sbornik* **192** (6), 51–70 (2001). <https://doi.org/10.4213/sm572> [Eng. transl.: *Sb. Math.* **192** (6), 843–861 (2001). <https://doi.org/10.1070/SM2001v192n06ABEH000572>].
7. Khabibullin B. N., Menshikova E. B. Balayage of Measures with respect to Polynomials and Logarithmic Kernels on the Complex Plane. *Lobachevskii Journal of Mathematics* **24** (12), 2823–2833 (2021). <https://doi.org/10.1134/S1995080221120180>
8. Khabibullin B. N., Menshikova E. B. Preorders on Subharmonic Functions and Measures with Applications to the Distribution of Zeros of Holomorphic Functions. *Lobachevskii Journal of Mathematics* **43** (3), 587–611 (2022). <https://doi.org/10.1134/S1995080222060154>
9. Menshikova E. B. Integral formulas of the Carleman and B. Ya. Levin type for meromorphic and subharmonic functions. *News of universities. Mathematics* **6**, 37–53 (2022). <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2022-6-37-53> (2022). (In Russian) [Eng. transl.: *Russian Math. (Iz. VUZ)* **66** (6), 28–42 (2022). <https://doi.org/10.3103/S1066369X22060056>].
10. Malyutin K. G., Naumova A. A. Representation of subharmonic functions in a semicircle and a semicircle. *Chebyshevskii sbornik* **24** (5), 136–152 (2023). (In Russian) <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2023-24-5-136-152>
11. Ahiezer N. I. *Elements of the theory of elliptic functions*. Moscow, Nauka Publ. (1970). (In Russian)
12. Grishin A. F. Subharmonic functions of finite order: *Dis. Doctor of Physical and Mathematical Sciences*. Kharkov (1992).
13. Grishin A. F. Continuity and asymptotic continuity of subharmonic functions. *Mathematical physics, analysis, geometry* **1** (2), 193–215 (1994).

Received: May 9, 2024

Revised: June 26, 2024

Accepted: August 29, 2024

Author's information:

Alena A. Naumova — <https://orcid.org/0009-0001-9268-6649>, aliona.filatowa2013@yandex.ru