УДК 519.21 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2025. Т. 12 (70). Вып. 1
MSC 65Y20, 60G60, 41A63, 41A65

О сложности аппроксимации в постановке в среднем для тензорных степеней случайных процессов

К. А. Пяткин[1], *А. А. Хартов*[1,2,3]

[1] Смоленский государственный университет,
Российская Федерация, 214000, Смоленск, ул. Пржевальского, 4
[2] Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН,
Российская Федерация, 127051, Москва, Большой Каретный пер., 19, стр. 1
[3] Национальный исследовательский университет ИТМО,
Российская Федерация, 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

Для цитирования: *Пяткин К. А., Хартов А. А.* О сложности аппроксимации в постановке в среднем для тензорных степеней случайных процессов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2025. Т. 12 (70). Вып. 1. С. 76–90. https://doi.org/10.21638/spbu01.2025.106

Рассматривается случайное поле с нулевым средним и непрерывной ковариационной функцией, которое является d-тензорной степенью некоторого случайного процесса второго порядка. Сложность аппроксимации $\boldsymbol{n}_d(\varepsilon)$ в постановке в среднем для заданного случайного поля определяется как минимальное число значений линейных функционалов, необходимых для его приближения с относительной средней квадратической ошибкой, не превышающей заданного порога ε. В настоящей работе мы получаем верхнюю оценку для $\boldsymbol{n}_d(\varepsilon)$, которая всегда (без каких-либо критериев) имеет место для любых ε и d. Логарифм этой оценки хорошо согласуется с получаемой нами асимптотикой $\ln \boldsymbol{n}_d(\varepsilon)$ при $d \to \infty$ с порогом $\varepsilon = \varepsilon_d$, который может весьма быстро сходиться к нулю при $d \to \infty$. Полученные оценка и асимптотика дополняют и обобщают результаты Лифшица и Туляковой, а также Кравченко и Хартова в этом направлении.

Ключевые слова: сложность аппроксимации, постановка в среднем, случайное поле, тензорная степень, высокая размерность, трактабильность.

1. Введение. Пусть на некотором вероятностном пространстве задан случайный процесс $X = \{X(t),\, t \in [0,1]\}$. Предполагаем, что он имеет нулевое математическое ожидание и непрерывную ковариационную функцию $\mathcal{K}(t,s)$, $t,s \in [0,1]$. Многопараметрический аналог такого процесса можно определять следующим естественным способом. На некотором вероятностном пространстве задается случайное поле $Y_d = \left\{Y_d(t),\, t \in [0,1]^d\right\}$ с $d \in \mathbb{N}$ (множество натуральных чисел), имеющее нулевое среднее и ковариационную функцию

$$\mathcal{K}_d(t,s) := \prod_{j=1}^{d} \mathcal{K}(t_j, s_j), \tag{1}$$

где $t = (t_1, \ldots, t_d)$ и $s = (s_1, \ldots, s_d)$ из $[0,1]^d$. Такое случайное поле Y_d называется *d-тензорной степенью* случайного процесса X. Классический пример — *броуновский лист*, являющийся тензорной степенью винеровского процесса (см. [1]).

Нас интересуют вопросы аппроксимации Y_d при сколь угодно высокой параметрической размерности d. Более точно: случайное поле Y_d рассматривается как элемент пространства $L_2([0,1]^d)$ со скалярным произведением $\langle\,\cdot,\,\cdot\,\rangle_{2,d}$ и нормой $\|\cdot\|_{2,d}$. Мы изучаем *сложность аппроксимации* Y_d:

$$\boldsymbol{n}_d(\varepsilon) := \min\bigl\{n \in \mathbb{N} : \boldsymbol{e}(Y_d, n) \leqslant \varepsilon\, \boldsymbol{e}(Y_d, 0)\bigr\}, \tag{2}$$

где $\varepsilon \in (0,1)$ является заданным порогом для

$$\boldsymbol{e}(Y_d, n) := \inf\Bigl\{\Bigl(\mathbb{E}\,\bigl\|Y_d - \widetilde{Y}_d^{(n)}\bigr\|_{2,d}^2\Bigr)^{1/2} : \widetilde{Y}_d^{(n)} \in \mathcal{A}(n, Y_d)\Bigr\}$$

(здесь и далее $\mathbb{E}$ — символ математического ожидания), т. е. для наименьшей среднеквадратической ошибки приближения Y_d n-ранговыми случайными полями $\widetilde{Y}_d^{(n)}$ из класса

$$\mathcal{A}(n, Y_d) := \Bigl\{\sum_{m=1}^{n} \langle Y_d, \psi_m\rangle_{2,d}\, \psi_m : \psi_m \in L_2([0,1]^d),\ m = 1, \ldots, n\Bigr\}.$$

Ошибка $\boldsymbol{e}(Y_d, n)$ нормализуется «размером» всего поля Y_d:

$$\boldsymbol{e}(Y_d, 0) := \bigl(\mathbb{E}\,\|Y_d\|_{2,d}^2\bigr)^{1/2} < \infty.$$

Величина $\boldsymbol{n}_d(\varepsilon)$ рассматривается как функция двух независимых переменных $d \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \in (0,1)$. Основная задача состоит в оценке ее роста при сколь угодно большом d и малом ε. Это пример так называемой *линейной тензорной задачи аппроксимации в постановке в среднем* (англ. — *average case setting*) из относительно новой *теории многопараметрических проблем* (см. [2–4]). Для подобных задач (и с более общими постановками) представляет интерес их классификация по типам *трактабильности* (англ. — *tractability*), которые задаются видом верхней оценки для $\boldsymbol{n}_d(\varepsilon)$, верной при любых $d \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \in (0,1)$. К настоящему моменту в этом направлении существует довольно много общих и частных результатов (см., например, монографии [2–4] и статьи [5–8]). Фактически все они представляют собой критерии того, что сложность аппроксимации имеет тот или иной вид мажоранты (тип трактабильности). Для случайных полей Y_d, тензорных степеней процессов, результат такого характера был получен в работе [9]. Мы напомним его формулировку в разделе 3 данной статьи. Следует отметить, что существует ряд результатов об асимптотическом поведении сложности аппроксимации для двух постановок: 1) при любом фиксированном $d \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \to 0$ (см. [10]); 2) при любом фиксированном $\varepsilon \in (0,1)$ и $d \to \infty$ (см. [10–13]). Некоторые из них, непосредственно относящиеся к нашей задаче, будут приведены в разделе 3.

В настоящей статье фактически при тех же предположениях, что и результат из работы [9], мы получаем верхнюю оценку для $\boldsymbol{n}_d(\varepsilon)$, которая всегда (без каких-либо критериев, имея в виду условие (12) теоремы 3 (см. ниже)) выполнена для любых $\varepsilon \in (0,1)$ и $d \in \mathbb{N}$ (теорема 4). Кроме того, мы показываем, что логарифм этой оценки хорошо согласуется как с асимптотиками $\ln \boldsymbol{n}_d(\varepsilon)$ в постановках 1) и 2), так и с асимптотикой, которую мы находим в нестандартной постановке: при $d \to \infty$ и с порогом $\varepsilon = \varepsilon_d$, зависящим от d, который может весьма быстро стремиться к нулю при $d \to \infty$ (теорема 5).

В статье, помимо тех, что уже введены, мы используем следующие обозначения. Символом $\mathbb{R}$ обозначается множество вещественных чисел. Для двух последовательностей a_n и b_n, $n \in \mathbb{N}$, мы пишем $a_n \sim b_n$, если $a_n/b_n \to 1$, $n \to \infty$. Для любого конечного множества A под символом $\#A$ мы разумеем количество элементов A. Вероятностная мера на некотором пространстве обозначается как $\mathbb{P}$, а для дисперсии мы используем символ $\mathbb{D}$.

2. Предварительные замечания. Сложность аппроксимации $\boldsymbol{n}_d(\varepsilon)$ случайного поля Y_d может быть описана через собственные числа его ковариационного оператора K_d, действующего по формуле

$$K_d f(t) = \int\limits_{[0,1]^d} \mathcal{K}_d(t,s) f(s)\, ds, \quad t \in [0,1]^d.$$

Пусть $(\lambda_{d,m})_{m\in\mathbb{N}}$ — последовательность собственных чисел, а $(\psi_{d,m})_{m\in\mathbb{N}}$ — соответствующая последовательность ортонормированных собственных функций K_d, т. е. $K_d\psi_{d,m}(t) = \lambda_{d,m}\psi_{d,m}(t)$, $m \in \mathbb{N}$, $t \in [0,1]^d$. Предполагается, что последовательность $(\lambda_{d,m})_{m\in\mathbb{N}}$ монотонно не возрастает. Если оператор K_d имеет конечный ранг $p \in \mathbb{N}$, то полагаем $\lambda_{d,m} := 0$ для $m > p$. Символом Λ_d мы будем обозначать след оператора K_d, т. е. $\Lambda_d := \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{d,m}$.

Хорошо известно (см., например, [14]), что для любого $n \in \mathbb{N}$ следующее n-ранговое случайное поле

$$\widetilde{Y}_d^{(n)}(t) := \sum_{m=1}^{n} \langle Y_d, \psi_{d,m}\rangle_{2,d}\, \psi_{d,m}(t), \quad t \in [0,1]^d \tag{3}$$

является наилучшей линейной аппроксимацией для Y_d в вышеописанной постановке в среднем. При этом формула (2) принимает вид

$$\boldsymbol{n}_d(\varepsilon) = \min\Big\{ n \in \mathbb{N} :\ \mathbb{E}\,\big\|Y_d - \widetilde{Y}_d^{(n)}\big\|_{2,d}^2 \leqslant \varepsilon^2\, \mathbb{E}\,\|Y_d\|_{2,d}^2 \Big\}.$$

С учетом (3) и равенств $\mathbb{E}\,\big\langle Y_d, \psi_{d,m}\big\rangle_{2,d}^2 = \big\langle \psi_{d,m}, K_d\psi_{d,m}\big\rangle_{2,d} = \lambda_{d,m}$, $m \in \mathbb{N}$ (см. [15], с. 267–268), мы приходим к следующему представлению для сложности аппроксимации:

$$\boldsymbol{n}_d(\varepsilon) = \min\Big\{ n \in \mathbb{N} :\ \sum_{m=n+1}^{\infty} \lambda_{d,m} \leqslant \varepsilon^2\, \Lambda_d \Big\}.$$

Заметим, что при получении последней формулы мы не использовали специфику ковариационной функции (1). На самом деле она выражается в структуре последовательности $(\lambda_{d,m})_{m\in\mathbb{N}}$, которую мы сейчас и опишем. Пусть K — это ковариационный оператор случайного процесса X, действующий по формуле

$$Kf(t) = \int\limits_0^1 \mathcal{K}(t,s) f(s)\, ds, \quad t \in [0,1].$$

Пусть $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — невозрастающая последовательность его собственных чисел, а Λ — его след, т. е. $\Lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ (если K имеет конечный ранг r, то $\lambda_k := 0$ для $k > r$).

Тогда, как известно (см., например, [2]), $(\lambda_{d,m})_{m\in\mathbb{N}}$ есть упорядоченная по невозрастанию последовательность чисел

$$\prod_{j=1}^{d}\lambda_{k_j},\quad k_1,k_2,\dots,k_d\in\mathbb{N}. \tag{4}$$

При этом

$$\Lambda_d=\sum_{m\in\mathbb{N}}\lambda_{d,m}=\sum_{k_1,k_2,\dots,k_d\in\mathbb{N}}\prod_{j=1}^{d}\lambda_{k_j}=\prod_{j=1}^{d}\sum_{k\in\mathbb{N}}\lambda_k=\Lambda^d.$$

Таким образом, $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ полностью определяет последовательность $(\lambda_{d,m})_{m\in\mathbb{N}}$.

Далее нам будет удобно работать с нормированными собственными числами:

$$\bar\lambda_k:=\frac{\lambda_k}{\Lambda},\quad k\in\mathbb{N},\quad \text{и}\quad \bar\lambda_{d,m}:=\frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda_d},\quad m\in\mathbb{N}.$$

При этом $\sum_{k=1}^{\infty}\bar\lambda_k=1$ и $\sum_{m=1}^{\infty}\bar\lambda_{d,m}=1$, а величина $\boldsymbol{n}_d(\varepsilon)$ получает представление

$$\boldsymbol{n}_d(\varepsilon)=\min\Big\{n\in\mathbb{N}:\sum_{m=n+1}^{\infty}\bar\lambda_{d,m}\leqslant\varepsilon^2\Big\}. \tag{5}$$

Несложно заметить, что на величину $\boldsymbol{n}_d(\varepsilon)$ не влияет, на каком именно отрезке значений t рассматривается порождающий процесс $X(t)$, так как она зависит только от последовательности $(\bar\lambda_{d,m})_{m\in\mathbb{N}}$.

3. Результаты. В соответствии с вышесказанным поведение величины $\boldsymbol{n}_d(\varepsilon)$ с произвольными $d\in\mathbb{N}$ и $\varepsilon\in(0,1)$ полностью определяется последовательностью $(\bar\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Следует отметить, однако, что эта зависимость не вполне явная и весьма сложная при больших значениях $d\in\mathbb{N}$. В связи с этим рассмотрим задачу оценки роста $\boldsymbol{n}_d(\varepsilon)$ как функции двух переменных $d\in\mathbb{N}$ и $\varepsilon\in(0,1)$, предполагая известной последовательность $(\bar\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Введем функцию

$$M(\gamma):=\sum_{k=1}^{\infty}\bar\lambda_k^{1-\gamma},\quad \gamma\in\mathbb{R}.$$

Заметим, что $M(0)=\sum_{k=1}^{\infty}\bar\lambda_k=1$, $M(\gamma)\leqslant 1$ при $\gamma<0$, а при $\gamma>0$ верно $1\leqslant M(\gamma)\leqslant\infty$. Далее, однако, мы будем работать в рамках следующего предположения.

При некотором $\tau>0$ выполнено условие:

$$M(\gamma)<\infty\quad \textit{для любого}\quad \gamma<\tau. \tag{6}$$

Условие (6) в классе рассматриваемых задач не считается слишком ограничительным. Например, если известно, что при некоторых $c_1>0$, $c_2>0$ и $\alpha>1$

$$\frac{c_1}{k^\alpha}\leqslant\bar\lambda_k\leqslant\frac{c_2}{k^\alpha},\quad k\in\mathbb{N}, \tag{7}$$

то (6) выполняется при $\alpha(1-\gamma)>1$, т. е. при $\gamma<\frac{\alpha-1}{\alpha}=:\tau$. Следует отметить, что даже условию (7) удовлетворяют многие известные процессы: броуновский мост, винеровский процесс и его интегрированные версии, дробное броуновское движение, процессы Орнштейна — Уленбека и Андерсона — Дарлинга (см. [7, 16, 17]), а также многие другие.

В предположении усиленной версии условия (7) в работе [10] Лифшицем и Туляковой была получена асимптотика величины $\boldsymbol{n}_d(\varepsilon)$ при любом фиксированном $d \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \to 0$. Приведем этот результат.

Теорема 1. *Пусть* $\bar\lambda_k \sim \beta k^{-\alpha}$, $k \to \infty$, *при некоторых* $\alpha > 1$ *и* $\beta > 0$. *Тогда*

$$\forall d \in \mathbb{N} \quad \ln \boldsymbol{n}_d(\varepsilon) = \tfrac{1}{\alpha-1}|\ln \varepsilon^2| + \tfrac{\alpha}{\alpha-1}(d-1)\ln|\ln\varepsilon^2| + A_{d,\alpha,\beta} + o(1), \quad \varepsilon \to 0, \tag{8}$$

где величина $A_{d,\alpha,\beta} \in \mathbb{R}$ *зависит от* d, α *и* β, *но не зависит от* ε.

Вернемся к предположению (6). При его выполнении конечны следующие важные числовые характеристики последовательности $(\bar\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$:

$$E := \sum_{k=1}^{\infty} |\ln \bar\lambda_k|\,\bar\lambda_k, \qquad \sigma^2 := \sum_{k=1}^{\infty} \big(|\ln\bar\lambda_k| - E\big)^2\,\bar\lambda_k, \tag{9}$$

где $|\ln\bar\lambda_k|\,\bar\lambda_k := 0$ и $\big(|\ln\bar\lambda_k| - E\big)^2\,\bar\lambda_k := 0$ в случае $\bar\lambda_k = 0$. В силу нормировки $\sum_{k=1}^{\infty}\bar\lambda_k = 1$, константы E и σ^2 представляют собой соответственно математическое ожидание и дисперсию некоторого распределения с вероятностями $\bar\lambda_1$, $\bar\lambda_2$, ..., $\bar\lambda_k$, ... (вероятностное представление более подробно обсуждается ниже). Эти константы фигурируют в следующей асимптотике $\boldsymbol{n}_d(\varepsilon)$, полученной в статье [10] (см. также замечания в [12]), для постановки, когда $\varepsilon \in (0,1)$ фиксировано, а $d \to \infty$.

Теорема 2. *Если* $E < \infty$ *и* $\sigma^2 < \infty$, *то*

$$\forall \varepsilon \in (0,1) \quad \ln \boldsymbol{n}_d(\varepsilon) = Ed + \Phi^{-1}(1-\varepsilon^2)\sqrt{\sigma^2 d} + o(\sqrt{d}), \quad d \to \infty, \tag{10}$$

где $\Phi^{-1}(1-\varepsilon^2)$ *— это квантиль порядка* $1-\varepsilon^2$ *функции распределения стандартного нормального закона.*

В работе [9] был получен следующий результат неасимптотического типа.

Теорема 3. *Пусть при некотором* $\tau \in (0,1]$ *выполнено* (6). *Тогда для существования константы* $C > 0$ *такой, что*

$$\ln \boldsymbol{n}_d(\varepsilon) \leqslant Ed + \tfrac{1-\tau}{\tau}\,|\ln\varepsilon^2| + C\sqrt{d\,|\ln\varepsilon^2|} \quad \text{для любых} \quad d \in \mathbb{N},\ \varepsilon \in (0,1), \tag{11}$$

необходимо и достаточно выполнение условия

$$\varlimsup_{\delta\to 0+} M(\tau-\delta)^{\delta} < \infty. \tag{12}$$

Если имеет место (7), то условия (6) и (12) выполняются с $\tau = \frac{\alpha-1}{\alpha}$. При этом оценка (11) согласуется с асимптотиками (8) и (10), показывая хорошую точность (подробнее см. в [9]).

Переходим к формулированию результатов данной статьи. Мы сфокусируемся на случае, когда $\bar\lambda_k > 0$ при любом $k \in \mathbb{N}$. Он наиболее интересен с точки зрения применения к тензорным степеням известных случайных процессов. В частности, этот случай включает выполнение (7).

Ситуация, когда $\bar\lambda_k = 0$ для всех $k > N$ с некоторым $N \in \mathbb{N}$, на наш взгляд, требует отдельного рассмотрения для получения при таких сильных условиях более точных оценок для $\boldsymbol{n}_d(\varepsilon)$. Отметим лишь, что для этого случая, как несложно понять, верна оценка $\boldsymbol{n}_d(\varepsilon) \leqslant N^d$, ее уточненный вариант:

$$\boldsymbol{n}_d(\varepsilon) = 1 + \sum_{m=1}^{\boldsymbol{n}_d(\varepsilon)-1} 1 \leqslant 1 + \sum_{m=1}^{\boldsymbol{n}_d(\varepsilon)-1} \frac{\bar\lambda_{d,m}}{\bar\lambda_{d,N^d}} < 1 + \frac{1-\varepsilon^2}{\bar\lambda_{d,N^d}} = 1 + \frac{1-\varepsilon^2}{\bar\lambda_N^d},$$

а также неравенство (11) с $\tau = 1$.

Введем важные функциональные характеристики последовательности $(\bar\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Определим функцию распределения:

$$F(x) := \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}:\\ |\ln\bar\lambda_k|\leqslant x}} \bar\lambda_k, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Она будет соответствовать случайной величине (на некотором вероятностном пространстве с мерой $\mathbb{P}$) со следующим распределением:

$$\mathbb{P}\big(U = |\ln\bar\lambda_k|\big) = \mathfrak{m}_k\bar\lambda_k, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{13}$$

где $\mathfrak{m}_k := \#\{l \in \mathbb{N} : \bar\lambda_l = \bar\lambda_k\}$ — кратность собственного числа λ_k. Несложно проверить, что

$$\mathbb{E}\, U = E, \qquad \mathbb{D}\, U = \sigma^2, \quad \text{и} \quad \mathbb{E}\, e^{\gamma U} = M(\gamma), \quad \gamma \geqslant 0.$$

Определим *функцию уклонений* (см. [18]):

$$\boldsymbol{I}(r) := \sup_\gamma\big\{\gamma r - \ln M(\gamma)\big\}, \quad r \in \mathbb{R},$$

где супремум берется по всем γ, для которых $M(\gamma) < \infty$. Заметим, что строгая положительность $\bar\lambda_k$ делает выполнение (6) возможным лишь при $\tau \leqslant 1$, причем всегда $M(1) = \infty$. Хорошо известно, что функция $\boldsymbol{I}$ достигает своего минимального значения, равного нулю, в точке E. Рассмотрим ее «правую ветвь»:

$$\boldsymbol{I}_+(r) := \boldsymbol{I}(r), \quad r \geqslant E. \tag{14}$$

С учетом того, что случайная величина U принимает сколь угодно большие значения ($|\ln\bar\lambda_k| \to \infty$ при $k \to \infty$), функция $\boldsymbol{I}_+$ является непрерывной и строго возрастающей на промежутке $[E,\infty)$, причем $\boldsymbol{I}_+(r) \to \infty$ при $r \to \infty$ (см. [18], формулы (1.1.8), (1.1.10) и комментарии к ним). Тогда на $[0,\infty)$ определена обратная функция $\boldsymbol{I}_+^{-1}$ с множеством значений $[E,\infty)$. Эта функция будет непрерывной и строго возрастающей на $[0,\infty)$.

Теперь мы непосредственно сформулируем первый результат этой статьи.

Теорема 4. *Пусть $\bar\lambda_k > 0$ при любом $k \in \mathbb{N}$. Пусть при некотором $\tau \in (0,1]$ выполнено* (6). *Тогда для любых $d \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \in (0,1)$ справедлива оценка*

$$\ln\boldsymbol{n}_d(\varepsilon) \leqslant d\boldsymbol{I}_+^{-1}\Big(\tfrac{|\ln\varepsilon^2|}{d}\Big) - |\ln\varepsilon^2|. \tag{15}$$

Отметим, что теорема 4 фактически при тех же предположениях, что сделаны в теореме 3, предоставляет оценку сверху для $\boldsymbol{n}_d(\varepsilon)$ без какого-либо дополнительного условия, подобного (12). Также, как нам видится, оценка (15) во многих случаях является более точной по сравнению с оценкой (11). Кроме того, сохранена возможность дополнительного анализа правой части (15) при заданных частных предположениях на $(\bar{\lambda}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ или на отношение $\frac{|\ln\varepsilon^2|}{d}$. Здесь мы ограничимся лишь общими замечаниями. Например, если d существенно больше $|\ln\varepsilon^2|$, т. е. $\frac{|\ln\varepsilon^2|}{d}$ близко к нулю, то величина $\boldsymbol{I}_+^{-1}\left(\frac{|\ln\varepsilon^2|}{d}\right)$ близка к $\boldsymbol{I}_+^{-1}(0) = E$, и, значит, Ed является главной компонентой в (15), что согласуется с асимптотикой (10). В случае, когда $|\ln\varepsilon^2|$ существенно больше d, т. е. $\frac{|\ln\varepsilon^2|}{d}$ идет к бесконечности, мы вспоминаем, что $\boldsymbol{I}_+(r) = \boldsymbol{I}(r) \sim \tau r$ при $r\to\infty$ (см. [18], с. 19, 20), где $\tau := \sup\{\gamma : M(\gamma) < \infty\}$ (см. условие (6)), т. е. $\boldsymbol{I}_+^{-1}(x) \sim \frac{1}{\tau}\cdot x$ при $x\to\infty$. Следовательно, величина $\boldsymbol{I}_+^{-1}\left(\frac{|\ln\varepsilon^2|}{d}\right)$ ведет себя как $\frac{|\ln\varepsilon^2|}{\tau d}$, а $\left(\frac{1}{\tau}-1\right)|\ln\varepsilon^2|$ будет главной компонентой правой части (15). Если предположить (7), то, как было замечено, $\tau = \frac{\alpha-1}{\alpha}$, и эта компонета равна $\frac{1}{\alpha-1}|\ln\varepsilon^2|$, что согласуется с асимптотикой (8).

Следующий результат асимптотического характера до некоторой степени совмещает постановки $\varepsilon\to 0$ и $d\to\infty$.

Теорема 5. *Пусть $\bar{\lambda}_k > 0$ при любом $k\in\mathbb{N}$. Пусть при некотором $\tau\in(0,1]$ выполнено (6). Пусть задана такая последовательность значений $\varepsilon = \varepsilon_d$, $d\in\mathbb{N}$, что $\varepsilon_d\in(0,\varkappa]$ с некоторым $\varkappa\in(0,1)$ и $\frac{|\ln\varepsilon_d^2|}{d}\to c\geqslant 0$ при $d\to\infty$. Тогда*

$$\ln\boldsymbol{n}_d(\varepsilon_d) = d\boldsymbol{I}_+^{-1}\left(\frac{|\ln\varepsilon_d^2|}{d}\right) - |\ln\varepsilon_d^2| + o(d), \quad d\to\infty. \tag{16}$$

Отметим, что введение параметра $\varkappa$ фактически не ограничивает применимости данной теоремы, ведь всегда представляет интерес аппроксимация с малым порогом ошибки ε.

Следствие 1. *В предположениях теоремы 5*

$$\ln\boldsymbol{n}_d(\varepsilon_d) = (\boldsymbol{I}_+^{-1}(c) - c)\cdot d + o(d), \quad d\to\infty. \tag{17}$$

Здесь $\boldsymbol{I}_+^{-1}(c) - c\geqslant E$, причем равенство выполняется лишь для случая $c = 0$.

Доказательство этого следствия приводится в конце следующего раздела.

Утверждение теоремы 5 с учетом следствия 1 можно записать в следующей форме.

Следствие 2. *В предположениях теоремы 5*

$$\ln\boldsymbol{n}_d(\varepsilon_d) \sim d\cdot\boldsymbol{I}_+^{-1}\left(\frac{|\ln\varepsilon_d^2|}{d}\right) - |\ln\varepsilon_d^2|, \quad d\to\infty.$$

Теорема 5 и ее следствия показывают, что оценка для $\ln\boldsymbol{n}_d(\varepsilon)$ из теоремы 4 является неулучшаемой с точностью до $o(d)$ при $d\to\infty$.

4. Доказательства. В этом разделе мы определим дополнительные спектральные характеристики и задействуем их в приводимых здесь вспомогательных утверждениях. С помощью последних мы докажем теоремы 4 и 5.

Определим функцию распределения:

$$F_d(x) := \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}:\\ |\ln\bar\lambda_{d,m}|\leqslant x}} \bar\lambda_{d,m}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Лемма 1. *Пусть U_1, U_2, ..., U_d — независимые случайные величины на некотором вероятностном пространстве с мерой $\mathbb{P}$, имеющие распределение* (13)*. Тогда*

$$F_d(x) = \mathbb{P}\Big(\sum_{j=1}^d U_j \leqslant x\Big), \quad x\in\mathbb{R}.$$

Эта лемма была доказана в [10], с. 107, для случая $\mathfrak{m}_k\equiv 1$ и в [12], с. 845, для общего случая.

Введем величину $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_d(\varepsilon) := \bar\lambda_{d,n}$ с $n = \boldsymbol{n}_d(\varepsilon)$. Следующая лемма, доказанная в [12], с. 840, дает оценку величины $\boldsymbol{n}_d(\varepsilon)$ через значения $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_d(\varepsilon)$.

Лемма 2. *Для любых $\varepsilon_1\in(0,1)$, $\varepsilon_2\in(\varepsilon_1,1)$ и $d\in\mathbb{N}$ справедлива оценка*

$$\boldsymbol{n}_d(\varepsilon_1) \geqslant \frac{\varepsilon_2^2-\varepsilon_1^2}{\bar{\boldsymbol{\lambda}}_d(\varepsilon_2)}.$$

Теперь приведем доказательства результатов данной статьи.

Доказательство теоремы 4. Зафиксируем произвольные $d\in\mathbb{N}$ и $\varepsilon\in(0,1)$. Выберем любое $\gamma\leqslant\tau\leqslant 1$, для которого $M(\gamma)<\infty$, и сделаем следующую оценку:

$$\boldsymbol{n}_d(\varepsilon) = \sum_{m=1}^{\boldsymbol{n}_d(\varepsilon)} 1 \leqslant \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}:\\ \bar\lambda_{d,m}\geqslant\bar{\boldsymbol{\lambda}}_d(\varepsilon)}} 1 \leqslant \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}:\\ \bar\lambda_{d,m}\geqslant\bar{\boldsymbol{\lambda}}_d(\varepsilon)}} \left(\frac{\bar\lambda_{d,m}}{\bar{\boldsymbol{\lambda}}_d(\varepsilon)}\right)^{1-\gamma} \leqslant \frac{1}{\bar{\boldsymbol{\lambda}}_d(\varepsilon)^{1-\gamma}} \sum_{m\in\mathbb{N}} \bar\lambda_{d,m}^{1-\gamma}.$$

С учетом мультипликативной структуры (4) замечаем, что

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} \bar\lambda_{d,m}^{1-\gamma} = \sum_{k_1,k_2,\dots,k_d\in\mathbb{N}} \prod_{j=1}^d \bar\lambda_{k_j}^{1-\gamma} = \prod_{j=1}^d \sum_{k\in\mathbb{N}} \bar\lambda_k^{1-\gamma} = M(\gamma)^d.$$

Тогда имеем неравенство

$$\ln\boldsymbol{n}_d(\varepsilon) \leqslant (1-\gamma)|\ln\bar{\boldsymbol{\lambda}}_d(\varepsilon)| + d\ln M(\gamma). \tag{18}$$

Оценим сверху $|\ln\bar{\boldsymbol{\lambda}}_d(\varepsilon)|$. По формуле (5) для $\boldsymbol{n}_d(\varepsilon)$ и определению $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_d(\varepsilon)$ заметим, что

$$\varepsilon^2 < \sum_{m=\boldsymbol{n}_d(\varepsilon)}^{\infty} \bar\lambda_{d,m} \leqslant \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}:\\ \bar\lambda_{d,m}\leqslant\bar{\boldsymbol{\lambda}}_d(\varepsilon)}} \bar\lambda_{d,m} = \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}:\\ |\ln\bar\lambda_{d,m}|\geqslant|\ln\bar{\boldsymbol{\lambda}}_d(\varepsilon)|}} \bar\lambda_{d,m}.$$

В соответствии с леммой 1 верно представление

$$\sum_{\substack{m\in\mathbb{N}:\\ |\ln\bar\lambda_{d,m}|\geqslant|\ln\bar{\boldsymbol{\lambda}}_d(\varepsilon)|}} \bar\lambda_{d,m} = \mathbb{P}\Big(\sum_{j=1}^d U_j \geqslant |\ln\bar{\boldsymbol{\lambda}}_d(\varepsilon)|\Big).$$

Предположим, что $|\ln \bar{\boldsymbol{\lambda}}_d(\varepsilon)| \geqslant Ed$, где константа E определена по формуле (9). Определим случайные величины $U_1, \ldots, U_d$, как в лемме 1. В силу того, что $E = \mathbb{E}\, U_j$, последняя вероятность оценивается с помощью известного экспоненциального неравенства Чебышёва с оптимизацией (см. [18] с. 24):

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{j=1}^{d} U_j \geqslant |\ln \bar{\boldsymbol{\lambda}}_d(\varepsilon)|\Big) \leqslant \exp\Big\{-d\boldsymbol{I}\Big(\tfrac{|\bar{\boldsymbol{\lambda}}_d(\varepsilon)|}{d}\Big)\Big\}.$$

По предположению на $|\ln \bar{\boldsymbol{\lambda}}_d(\varepsilon)|$ справедливо $\boldsymbol{I}\Big(\frac{|\bar{\boldsymbol{\lambda}}_d(\varepsilon)|}{d}\Big) = \boldsymbol{I}_+\Big(\frac{|\bar{\boldsymbol{\lambda}}_d(\varepsilon)|}{d}\Big)$. Следовательно, мы приходим к неравенству

$$\varepsilon^2 < \exp\Big\{-d\boldsymbol{I}_+\Big(\tfrac{|\ln \bar{\boldsymbol{\lambda}}_d(v)|}{d}\Big)\Big\},$$

т. е.

$$\boldsymbol{I}_+\Big(\tfrac{|\ln \bar{\boldsymbol{\lambda}}_d(\varepsilon)|}{d}\Big) < \tfrac{|\ln \varepsilon^2|}{d},$$

откуда получаем

$$|\ln \bar{\boldsymbol{\lambda}}_d(\varepsilon)| < dr_{d,\varepsilon}, \quad \text{где} \quad r_{d,\varepsilon} := \boldsymbol{I}_+^{-1}\Big(\tfrac{|\ln \varepsilon^2|}{d}\Big). \tag{19}$$

Это неравенство сохраняется и для случая $|\ln \bar{\boldsymbol{\lambda}}_d(\varepsilon)| \leqslant Ed$, так как строго возрастающая функция $\boldsymbol{I}_+$ достигает минимума, равного нулю, в точке E, и, значит, $E < r_{d,\varepsilon}$.

Используя оценку (19) в неравенстве (18), имеем

$$\ln \boldsymbol{n}_d(\varepsilon) < (1-\gamma)dr_{d,\varepsilon} + d\ln M(\gamma) = dr_{d,\varepsilon} - d\big(\gamma r_{d,\varepsilon} - \ln M(\gamma)\big)$$

для любого $\gamma \leqslant \tau$, для которого $M(\gamma) < \infty$ (всегда $\gamma < 1$, см. комментарий перед (14)). Оптимизируя по таким γ и учитывая (14), получаем

$$\ln \boldsymbol{n}_d(\varepsilon) \leqslant dr_{d,\varepsilon} - d\sup_{\gamma}\big\{\gamma r_{d,\varepsilon} - \ln M(\gamma)\big\} = dr_{d,\varepsilon} - d\boldsymbol{I}_+(r_{d,\varepsilon}).$$

Делая подстановку, приходим к нужному неравенству:

$$\ln \boldsymbol{n}_d(\varepsilon) \leqslant d\boldsymbol{I}_+^{-1}\Big(\tfrac{|\ln \varepsilon^2|}{d}\Big) - d\boldsymbol{I}_+\Big(\boldsymbol{I}_+^{-1}\Big(\tfrac{|\ln \varepsilon^2|}{d}\Big)\Big) = d\boldsymbol{I}_+^{-1}\Big(\tfrac{|\ln \varepsilon^2|}{d}\Big) - |\ln \varepsilon^2|. \qquad \square$$

Доказательство теоремы 5. По теореме 4 для величины $\ln \boldsymbol{n}_d(\varepsilon_d)$ имеем следующую оценку сверху, справедливую при всех $d \in \mathbb{N}$:

$$\ln \boldsymbol{n}_d(\varepsilon_d) \leqslant d \cdot \boldsymbol{I}_+^{-1}\Big(\tfrac{|\ln \varepsilon_d^2|}{d}\Big) - |\ln \varepsilon_d^2|. \tag{20}$$

Получим для $\ln \boldsymbol{n}_d(\varepsilon_d)$ оценку снизу. Зафиксируем произвольное $a \in (1, \varkappa^{-1})$. Тогда $\varepsilon_d < a\varepsilon_d \leqslant a\varkappa < 1$. Воспользуемся леммой 2 с $\varepsilon_1 := \varepsilon_d$ и $\varepsilon_2 = a\varepsilon_d$:

$$\boldsymbol{n}_d(\varepsilon_d) \geqslant \frac{(a\varepsilon_d)^2 - \varepsilon_d^2}{\bar{\boldsymbol{\lambda}}_d(a\varepsilon_d)} = \frac{\varepsilon_d^2(a^2-1)}{\bar{\boldsymbol{\lambda}}_d(a\varepsilon_d)},$$

т. е.

$$\ln \boldsymbol{n}_d(\varepsilon_d) \geqslant |\ln \bar{\boldsymbol{\lambda}}_d(a\varepsilon_d)| - |\ln \varepsilon_d^2| + \ln\big(a^2-1\big). \tag{21}$$

Видим, что задача свелась к оцениванию снизу величины $|\ln \bar{\boldsymbol{\lambda}}_d(a\varepsilon_d)|$ при всех достаточно больших d в рамках предположения $\frac{|\ln \varepsilon_d^2|}{d} \to c$ при $d \to \infty$.

Предположим, что $c > 0$. Зафиксируем произвольно малое $h > 0$ и выберем такое $\delta \in (0, c]$, что $r := \boldsymbol{I}_+^{-1}(c-\delta) > \boldsymbol{I}_+^{-1}(c) - h$. По замечаниям перед формулировкой теоремы 4 это возможно в силу непрерывности $\boldsymbol{I}_+^{-1}$, а в силу монотонности $\boldsymbol{I}_+^{-1}$ мы имеем $r \geqslant \boldsymbol{I}_+^{-1}(0) = E$. Покажем, что для всех достаточно больших d выполняется неравенство

$$\sum_{\substack{m\in\mathbb{N}:\\ |\ln \bar{\lambda}_{d,m}|\geqslant dr}} \bar{\lambda}_{d,m} > (a\varepsilon_d)^2.$$

В соответствии с леммой 1 верно представление

$$\sum_{\substack{m\in\mathbb{N}:\\ |\ln \bar{\lambda}_{d,m}|\geqslant dr}} \bar{\lambda}_{d,m} = \mathbb{P}\Big(\sum_{j=1}^{d} U_j \geqslant dr\Big) = \mathbb{P}\Big(\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d} U_j \geqslant r\Big).$$

По известной теореме Чернова из теории больших уклонений имеет место сходимость:

$$\frac{1}{d}\,\ln \mathbb{P}\Big(\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d} U_j \geqslant r\Big) \to -\boldsymbol{I}(r), \quad d \to \infty.$$

Здесь $\boldsymbol{I}(r) = \boldsymbol{I}_+(r) = \boldsymbol{I}_+\big(\boldsymbol{I}_+^{-1}(c-\delta)\big) = c - \delta$. Таким образом, мы получаем

$$\frac{1}{d}\,\ln \mathbb{P}\Big(\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d} U_j \geqslant r\Big) \to -c + \delta, \quad d \to \infty.$$

По предположению

$$c = \frac{|\ln \varepsilon_d^2|}{d} + o(1) = \frac{|\ln\big(a^2\varepsilon_d^2\big)|}{d} + o(1), \quad d \to \infty.$$

Тогда найдется такое $d_0 \in \mathbb{N}$, что при всех $d \geqslant d_0$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{d}\,\ln \mathbb{P}\Big(\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d} U_j \geqslant r\Big) > -\frac{|\ln\big(a^2\varepsilon_d^2\big)|}{d} = \frac{\ln\big(a^2\varepsilon_d^2\big)}{d},$$

т. е.

$$\sum_{\substack{m\in\mathbb{N}:\\ |\ln \bar{\lambda}_{d,m}|\geqslant dr}} \bar{\lambda}_{d,m} = \mathbb{P}\Big(\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d} U_j \geqslant r\Big) > (a\varepsilon_d)^2,$$

что и требовалось показать. Полученное неравенство означает, что $|\ln \bar{\boldsymbol{\lambda}}_d(a\varepsilon_d)| \geqslant dr$ при всех $d \geqslant d_0$. Действительно, ведь по определению $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_d(\varepsilon)$ и по представлению (5) для $\boldsymbol{n}_d(\varepsilon)$ с произвольным $\varepsilon \in (0,1)$ справедливо

$$\sum_{\substack{m\in\mathbb{N}:\\ |\ln \bar{\lambda}_{d,m}|>|\ln \bar{\boldsymbol{\lambda}}_d(a\varepsilon_d)|}} \bar{\lambda}_{d,m} = \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}:\\ \bar{\lambda}_{d,m}<\bar{\boldsymbol{\lambda}}_d(a\varepsilon_d)}} \bar{\lambda}_{d,m} \leqslant \sum_{m=\boldsymbol{n}_d(a\varepsilon_d)+1}^{\infty} \bar{\lambda}_{d,m} \leqslant (a\varepsilon_d)^2.$$

В итоге при всех $d \geqslant d_0$ имеем

$$|\ln \bar{\boldsymbol{\lambda}}_d(a\varepsilon_d)| \geqslant dr = d\boldsymbol{I}_+^{-1}(c-\delta) > d\big(\boldsymbol{I}_+^{-1}(c) - h\big).$$

Далее найдется такое $d_1 \in \mathbb{N}$, большее d_0, что $\boldsymbol{I}_+^{-1}(c) > \boldsymbol{I}_+^{-1}\Big(\frac{|\ln \varepsilon_d^2|}{d}\Big) - h$ при всех $d \geqslant d_1$. Тогда имеем

$$|\ln \bar{\boldsymbol{\lambda}}_d(a\varepsilon_d)| \geqslant d\boldsymbol{I}_+^{-1}\Big(\frac{|\ln \varepsilon_d^2|}{d}\Big) - d\cdot 2h, \quad d \geqslant d_1. \tag{22}$$

Перейдем к случаю $c = 0$. Заметим, что всегда $|\ln \bar{\lambda}_1| < E$. Действительно, в силу строгой положительности $\bar{\lambda}_k$, $k \in \mathbb{N}$, случайная величина U_j имеет невырожденное распределение, причем $U_j \geqslant |\ln \bar{\lambda}_1|$ п. н. и $\mathbb{E}\, U_j = E$. Равенство $|\ln \bar{\lambda}_1| = E$ невозможно, иначе оно вступало бы в противоречие с невырожденностью U_j. Зафиксируем произвольно малое $h > 0$, причем мы полагаем, что $|\ln \bar{\lambda}_1| < E - h$. В соответствии с леммой 1 верно представление

$$\sum_{\substack{m\in\mathbb{N}:\\ |\ln \bar{\lambda}_{d,m}|<d(E-h)}} \bar{\lambda}_{d,m} = \mathbb{P}\Big(\sum_{j=1}^d U_j < d(E-h)\Big) = \mathbb{P}\bigg(\frac{1}{d}\sum_{j=1}^d U_j < E-h\bigg).$$

Теорема Чернова дает сходимость:

$$\frac{1}{d}\,\ln \mathbb{P}\bigg(\frac{1}{d}\sum_{j=1}^d U_j < E-h\bigg) \to -\boldsymbol{I}(E-h), \quad d \to \infty.$$

Здесь $\boldsymbol{I}(E-h) > \boldsymbol{I}(E) = 0$ в силу строгого убывания функции $\boldsymbol{I}$ на отрезке $[|\ln \bar{\lambda}_1|, E\,]$ (см. [18], с. 19). Тогда найдется такое $d_0 \in \mathbb{N}$, что $-\boldsymbol{I}(E-h) < \frac{1}{d}\ln\big(1 - a^2\varkappa^2\big)$ при всех $d \geqslant d_0$. По предположению $\varepsilon_d \leqslant \varkappa < 1$ при всех d, поэтому всегда $\frac{1}{d}\ln\big(1 - a^2\varkappa^2\big) \leqslant \frac{1}{d}\ln\big(1 - a^2\varepsilon_d^2\big)$. Тогда при всех $d \geqslant d_0$

$$\frac{1}{d}\,\ln \mathbb{P}\bigg(\frac{1}{d}\sum_{j=1}^d U_j < E-h\bigg) < \frac{\ln\big(1 - a^2\varepsilon_d^2\big)}{d},$$

т. е.

$$\sum_{\substack{m\in\mathbb{N}:\\ |\ln \bar{\lambda}_{d,m}|<d(E-h)}} \bar{\lambda}_{d,m} = \mathbb{P}\bigg(\frac{1}{d}\sum_{j=1}^d U_j < E-h\bigg) < 1 - a^2\varepsilon_d^2.$$

Следовательно, мы имеем

$$\sum_{\substack{m\in\mathbb{N}:\\ |\ln \bar{\lambda}_{d,m}|\geqslant d(E-h)}} \bar{\lambda}_{d,m} > (a\varepsilon_d)^2.$$

Отсюда заключаем, как это было сделано в случае $c > 0$, что $|\ln \bar{\boldsymbol{\lambda}}_d(a\varepsilon_d)| \geqslant d(E - h)$ при всех $d \geqslant d_0$. Предположение о том, что $\frac{|\ln \varepsilon_d^2|}{d} \to 0$ при $d \to \infty$, в силу непрерывности функции $\boldsymbol{I}_+^{-1}$ дает сходимость:

$$\boldsymbol{I}_+^{-1}\Big(\frac{|\ln \varepsilon_d^2|}{d}\Big) \to \boldsymbol{I}_+^{-1}(0) = E, \quad d \to \infty.$$

Тогда найдется такое $d_1 \in \mathbb{N}$, большее d_0, что $E > \boldsymbol{I}_+^{-1}\Big(\frac{|\ln \varepsilon_d^2|}{d}\Big) - h$ при всех $d \geqslant d_1$. Так мы приходим к оценке (22).

Далее мы применяем (22) в неравенстве (21):

$$\ln \boldsymbol{n}_d(\varepsilon_d) \geqslant d\boldsymbol{I}_+^{-1}\Big(\frac{|\ln \varepsilon_d^2|}{d}\Big) - |\ln \varepsilon_d^2| + \ln\big(a^2 - 1\big) - d \cdot 2h, \quad d \geqslant d_1.$$

Отсюда мы заключаем, что для любого $h > 0$ и всех достаточно больших d верно

$$\ln \boldsymbol{n}_d(\varepsilon_d) \geqslant d\boldsymbol{I}_+^{-1}\Big(\frac{|\ln \varepsilon_d^2|}{d}\Big) - |\ln \varepsilon_d^2| - d \cdot 3h.$$

Данная оценка вместе с (20) дает требуемую асимптотику:

$$\ln \boldsymbol{n}_d(\varepsilon_d) = d\boldsymbol{I}_+^{-1}\Big(\frac{|\ln \varepsilon_d^2|}{d}\Big) - |\ln \varepsilon_d^2| + o(d), \quad d \to \infty. \quad \square$$

Доказательство следствия 1. По предположению $|\ln \varepsilon_d^2| = cd + o(d)$, $d \to \infty$, а в силу непрерывности $\boldsymbol{I}_+^{-1}$ мы имеем

$$\boldsymbol{I}_+^{-1}\Big(\frac{|\ln \varepsilon_d^2|}{d}\Big) \to \boldsymbol{I}_+^{-1}(c), \quad d \to \infty.$$

Поэтому из (16) получаем (17). Далее, если $c = 0$, то $\boldsymbol{I}_+^{-1}(c) - c = \boldsymbol{I}_+^{-1}(0) = E$. Перейдем к случаю $c > 0$. Рассмотрим величину

$$\boldsymbol{I}_+(c+E) = \boldsymbol{I}(c+E) = \sup_{\gamma : M(\gamma) < \infty} \big\{\gamma(c+E) - \ln M(\gamma)\big\}.$$

Определим $\tau := \sup\{\gamma : M(\gamma) < \infty\}$. По предположению (12) $\tau > 0$, а так как $\lambda_k > 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$ (см. соглашение после теоремы 3), всегда $M(1) = \infty$, и, следовательно, $\tau \leqslant 1$. Также мы определим величину

$$a := \lim_{\gamma \to \tau - 0} \frac{M'(\gamma)}{M(\gamma)} \leqslant \infty.$$

Известно (см. [18] с. 18), что

$$\sup_{\gamma : M(\gamma) < \infty} \big\{\gamma(c+E) - \ln M(\gamma)\big\} = \gamma_c(c+E) - \ln M(\gamma_c)$$

с некоторым $\gamma_c \leqslant \tau$. При этом, если $a = \infty$, то $\gamma_c < \tau$, а если $a < \infty$, то неравенство $\gamma_c \leqslant \tau$ не улучшается, но в этом случае $M(\tau) < \infty$ (см. [18] с. 20), а значит, $\tau < 1$. Таким образом, в любом случае $\gamma_c < 1$.

По неравенству Йенсена соотношение $M(\gamma) \geqslant e^{\gamma E}$ верно для любого γ, и тогда

$$\boldsymbol{I}_+(c+E) = \gamma_c(c+E) - \ln M(\gamma_c) \leqslant \gamma_c(c+E) - \gamma_c E = \gamma_c c.$$

Следовательно, $\boldsymbol{I}_+(c+E) < c$, что влечет $c + E < \boldsymbol{I}_+^{-1}(c)$, т. е. $\boldsymbol{I}_+^{-1}(c) - c > E$. $\square$

Литература

1. Лифшиц М. А. *Лекции по гауссовским процессам.* Санкт-Петербург, Лань (2016).
2. Novak E., Woźniakowski H. Tractability of multivariate problems. Vol. I: Linear Information, in: *EMS Tracts in Mathematics*, vol. 6. Zürich, EMS (2008).
3. Novak E., Woźniakowski H. Tractability of multivariate problems. Vol. II. Standard Information for Functionals, in: *EMS Tracts in Mathematics*, vol. 12, Zürich, EMS (2010).
4. Novak E., Woźniakowski H. Tractability of multivariate problems. Vol. III: Standard Information for Operators, in: *EMS Tracts in Mathematics*, vol. 18, Zürich, EMS (2012).
5. Chen J., Wang H., Zhang J., Average case (s,t)-weak tractability of non-homogeneous tensor product problems. *J. Complexity* **49**, 27–45 (2018).
6. Lifshits M. A., Papageorgiou A., Woźniakowski H. Average case tractability of non-homogeneous tensor product problems. *J. Complexity* **28**, 539–561 (2012). https://doi.org/10.1016/j.jco.2012.05.003
7. Lifshits M. A., Papageorgiou A., Woźniakowski H. Tractability of multi-parametric Euler and Wiener integrated processes. *Probab. Math. Stat.* **32** (1), 131–165 (2012).
8. Papageorgiou A., Petras I., Xu G., Yanqi D. EC-(s,t)-weak tractability of multivariate linear problems in the average case setting. *J. Complexity* **55**, 101425 (2019). https://doi.org/10.1016/j.jco.2019.101425
9. Кравченко А. А., Хартов А. А. Оценка сложности аппроксимации в среднем для тензорных степеней случайных процессов. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **8** (4), 580–592 (2021). https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.403
10. Lifshits M. A., Tulyakova E. V. Curse of dimensionality in approximation of random fields. *Probab. Math. Statist.* **26** (1), 97–112 (2006).
11. Хартов А. А. Аппроксимация в среднем тензорных случайных полей возрастающей размерности. *Записки научных семинаров ПОМИ* **396**, 233–256 (2011).
12. Khartov A. A. Asymptotic analysis of average case approximation complexity of Hilbert space valued random elements. *J. Complexity* **31**, 835–866 (2015). https://doi.org/10.1016/j.jco.2015.06.004
13. Хартов А. А. Аппроксимация многопараметрических процессов Андерсона — Дарлинга. *Записки научных семинаров ПОМИ* **515**, 214–232 (2022).
14. Brown J. L. Mean square truncation error in series expansions of random functions. *J. Soc. Indust. Appl. Math.* **8** (1), 28–32 (1960).
15. Гихман И. И., Скороход А. В. *Теория случайных процессов.* Т. 1. Москва, Наука, (1971).
16. Karol A., Nazarov A., Nikitin Ya. Small ball probabilities for Gaussian random fields and tensor products of compact operators. *Trans. Amer. Math. Soc.* **360** (3), 1443–1474 (2008).
17. Pycke J.-R. Multivariate extensions of the Anderson — Darling process. *Statist. Probab. Letters* **63**, 387–399 (2003).
18. Боровков А. А. *Асимптотический анализ случайных блужданий. Быстро убывающие распределения приращений.* Москва, Физматлит (2013).

Статья поступила в редакцию 25 февраля 2024 г.;
доработана 4 августа 2024 г.;
рекомендована к печати 29 августа 2024 г.

Контактная информация:

Пяткин Кирилл Александрович — аспирант; https://orcid.org/0009-0001-1986-9246, pyatkin.kirill@gmail.com

Хартов Алексей Андреевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; https://orcid.org/0000-0003-4134-083X, alexeykhartov@gmail.com

On approximation complexity in average case setting for tensor degrees of random processes

K. A. Pyatkin[1], *A. A. Khartov*[1,2,3]

[1] Smolensk State University,
4, ul. Przhevalskogo, Smolensk, 214000, Russian Federation

[2] Institute for information transmission problems of the Russian Academy of Sciences,
19, Bolshoy Karetny per., Moscow, 127051, Russian Federation

[3] ITMO University, 49, Kronverksky pr., St. Petersburg, 197101, Russian Federation

For citation: Pyatkin K. A., Khartov A. A. On approximation complexity in average case setting for tensor degrees of random processes. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2025, vol. 12 (70), issue 1, pp. 76–90. https://doi.org/10.21638/spbu01.2025.106 (In Russian)

We consider a random field with a zero mean and a continuous covariance function that is a d-tensor degree of a random process of second order. The average case approximation complexity $\boldsymbol{n}_d(\varepsilon)$ of a random field is defined as the minimal number of evaluations of linear functionals needed to approximate the field with relative 2-average error not exceeding a given threshold ε. In the present paper we obtain an upper estimate for $\boldsymbol{n}_d(\varepsilon)$ that is always valid (without any criteria) for any ε and d. The logarithm of this estimate agrees well with the asymptotics that we obtain for $\ln \boldsymbol{n}_d(\varepsilon)$ as $d \to \infty$ with a threshold $\varepsilon = \varepsilon_d$, which can be rather quickly convergent to zero at $d \to \infty$. The estimate and the asymptotics complement and generalize the results by Lifshits and Tulyakova, by Kravchenko and Khartov in this direction.

Keywords: approximation complexity, average case setting, random fields, tensor degree, high dimension, tractability.

References

1. Lifshits M. A. *Lections on Gaussian processes.* Heidelberg, Springer, Berlin (2012). [Rus. ed.: Lifshits M. A. *Lektsii po gaussovskim protsessam.* St. Petersburg, Lan' Publ. (2016)].

2. Novak E., Woźniakowski H. Tractability of multivariate problems. Vol. I: Linear Information, in: *EMS Tracts in Mathematics*, vol. 6. Zürich, EMS (2008).

3. Novak E., Woźniakowski H. Tractability of multivariate problems. Vol. II: Standard Information for Functionals, in: *EMS Tracts in Mathematics*, vol. 12, Zürich, EMS (2010).

4. Novak E., Woźniakowski H. Tractability of multivariate problems. Vol. III: Standard Information for Operators, in: *EMS Tracts in Mathematics*, vol. 18, Zürich, EMS (2012).

5. Chen J., Wang H., Zhang J., Average case (s,t)-weak tractability of non-homogeneous tensor product problems. *J. Complexity* **49**, 27–45 (2018).

6. Lifshits M. A., Papageorgiou A., Woźniakowski H. Average case tractability of non-homogeneous tensor product problems. *J. Complexity* **28**, 539–561 (2012). https://doi.org/10.1016/j.jco.2012.05.003

7. Lifshits M. A., Papageorgiou A., Woźniakowski H. Tractability of multi-parametric Euler and Wiener integrated processes. *Probab. Math. Stat.* **32** (1), 131–165 (2012).

8. Papageorgiou A., Petras I., Xu G., Yanqi D. EC-(s,t)-weak tractability of multivariate linear problems in the average case setting. *J. Complexity* **55**, 101425 (2019). https://doi.org/10.1016/j.jco.2019.101425

9. Kravchenko A. A., Khartov A. A. An estimate of average case approximation complexity for tensor degrees of random processes. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **8** (4), 580–592 (2021). https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.403 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **54**, iss. 4, 351–360 (2021). https://doi.org/10.1134/S1063454121040087].

10. Lifshits M. A., Tulyakova E. V. Curse of dimensionality in approximation of random fields. *Probab. Math. Statist.* **26** (1), 97–112 (2006).

11. Khartov A. A. Average approximation of tensor product-type random fields of increasing dimension. *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI*, **396** (2011), 233–256 (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **188** (6), 769–782 (2013). https://doi.org/10.1007/s10958-013-1170-7].

12. Khartov A. A. Asymptotic analysis of average case approximation complexity of Hilbert space valued random elements. *J. Complexity* **31**, 835–866 (2015). https://doi.org/10.1016/j.jco.2015.06.004

13. Khartov A. A. Approximation of multiparametric Anderson — Darling processes. *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI* **515**, 214–232 (2022) (In Russian).

14. Brown J. L. Mean square truncation error in series expansions of random functions. *J. Soc. Indust. Appl. Math.* **8** (1), 28–32 (1960).

15. Gikhman I. I., Skorokhod A. V. *Theoriya sluchainikh processov.* Vol. 1, Moscow, Nauka Publ. (1971). (In Russian) [Eng. transl.: Gikhman I. I., Skorokhod A. V. *The Theory of Stochastic Processes I.* Heidelberg, Springer Berlin (2004)].

16. Karol A., Nazarov A., Nikitin Ya. Small ball probabilities for Gaussian random fields and tensor products of compact operators. *Trans. Amer. Math. Soc.* **360** (3), 1443–1474 (2008).

17. Pycke J.-R. Multivariate extensions of the Anderson — Darling process. *Statist. Probab. Letters* **63**, 387–399 (2003).

18. Borovkov A. A. *Asimptoticheskii analiz sluchainykh bluzhdanii. Bystro ubyvayushchie raspredeleniia prirashchenii.* Moscow, Fizmatlit Publ. (2013). (In Russian) [Eng. transl.: Borovkov A. A. *Asymptotic Analysis of Random Walks: Light-Tailed Distributions of Increments.* Cambridge, Cambridge University Press (2020)].

Received: February 25, 2024
Revised: August 4, 2024
Accepted: August 29, 2024

Authors' information:

Kirill A. Pyatkin — https://orcid.org/0009-0001-1986-9246, pyatkin.kirill@gmail.com
Alexey A. Khartov — https://orcid.org/0000-0003-4134-083X, alexeykhartov@gmail.com