

Модель страховой компании со случайными премиями и исками

Т. М. Товстик, Д. С. Булгакова

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: Товстик Т. М., Булгакова Д. С. Модель страховой компании со случайными премиями и исками // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2025. Т. 12 (70). Вып. 1. С. 102–116.
<https://doi.org/10.21638/spbu01.2025.108>

В статье рассматривается стохастическая модель Крамера — Лундберга, в которой случайными и независимыми являются премии и страховые возмещения (иски). Премии одинаково распределены и подчиняются показательному закону. Иски тоже одинаково распределены по показательному закону, имеющему положительный сдвиг от начала координат. Вводится однородный процесс Пуассона, скачки которого интерпретируются как моменты поступления премий, а интенсивность соответствует среднему числу премий за год. Процесс Пуассона не зависит от случайных величин, представляющих премии и страховые возмещения. Страховые случаи происходят в те же моменты, в которые поступают премии, но с меньшей интенсивностью. Находятся вероятности разорения компании в первые три момента появления исков, а также приводится схема последовательного вычисления вероятностей разорения в моменты поступления страховых случаев. Приводятся примеры.

Ключевые слова: вероятность разорения, модель риска, стохастическая модель страховой компании, экспоненциальное распределение со сдвигом у страховых возмещений.

1. Введение. Страховые компании сталкиваются с определенными финансовыми рисками, связанными с возмещением убытков. Чтобы эффективно управлять рисками и защитить себя от разорения, они используют математические модели для оценки и управления рисками. Одним из важных классов современных математических моделей являются вероятностные (стохастические) модели, так как позволяют учитывать случайность различных факторов и оценивать риски более точно.

Стандартной задачей в актуарной математике является определение вероятности разорения страховой компании, т.е. вероятности того, что компания не сможет исполнить свои финансовые обязательства из-за нехватки средств, учитывая различные предположения о потоках страховых премий и выплат, осуществляемых компанией. Поэтому важным является получение явной формулы для вероятности разорения, применимой к широкому классу распределений страховых премий и выплат.

Работы шведских математиков Ф. Лундберга [1] и Г. Крамера [2] оказали существенное влияние на развитие теории страхования. Они сформировали модель, в которой премии поступали равномерно, а моменты поступления рисков подчинялись пуассоновскому процессу. Позднее эта модель была названа классической моделью Крамера — Лундберга.

Существенно расширился круг задач, связанных с изучением денежного баланса страховых компаний после выхода статьи А. В. Бойкова [3], в которой не только возмещения, но и премии являлись независимыми случайными величинами и моменты их поступлений описывались пуассоновскими процессами. Для вероятностей разорения в [3] получены интегральные уравнения и экспоненциальные оценки. При экспоненциальных распределениях премий и возмещений получены явные формулы для вероятностей разорения. Данную модель называют стохастической (случайной) или рискованной моделью Крамера — Лундберга.

В статье Т. М. Товстик [4] найдены рекуррентные уравнения для вероятностей разорения, когда премии и возмещения имеют гамма-распределения с целыми параметрами. Найдены формулы для вычисления вероятности разорения на конечном интервале.

В работе К. И. Лившица, Л. Ю. Сухотиной [5] предполагается, что премии и возмещения являются смесями экспоненциальных распределений.

В модели А. А. Муромской [6] один из процессов поступлений премий или возмещений является пуассоновским, а другой — процессом восстановления. Найдены оценки сверху для вероятностей разорения.

Луо (Luo) в статье [7] представил модель, в которой страховые иски и премии поступают в одни и те же моменты, но с разной интенсивностью. Эта модель также стала интересной для изучения: так, например, в работе Т. М. Товстик, В. Ю. Богдана [8] одна из рассматриваемых моделей является рискованной и предполагает, что случайные премии и страховые возмещения независимы и экспоненциально распределены, а их поступления такие же, как и в [7]. Для данной модели была исследована вероятность разорения страховой компании при выплатах страховых возмещений и предложены рекуррентные формулы для ее вычисления.

В данной статье рассматривается стохастическая модель Крамера — Лундберга, в которой случайными являются премии и страховые возмещения (иски). Предполагается, что премии η_i независимы, одинаково по экспоненте распределены, поступают в моменты скачков однородного процесса Пуассона, размер премий не зависит от этого процесса. Задается интенсивность процесса Пуассона, которая равна среднему числу премий, поступающих за год.

Если происходит страховой случай, то клиенту выплачивается ξ — страховое возмещение. Страховые возмещения $\xi_k, k = 1, 2, \dots$, независимы, одинаково распределены и имеют показательное распределение, плотность которого определена в области (x_o, ∞) , $x_o > 0$. При варианте с $x_o = 0$ получили бы минимальное $\xi = x_o = 0$ и наиболее вероятными являлись бы значения ξ близкие к нулю, что мало приемлемо для страховых возмещений. Вариант, в котором минимальное значение ξ удовлетворяет соотношению $\xi = x_o > 0$, приводит к лучшему согласованию с реальными данными. Такие страховые возмещения были рассмотрены в работе Е. В. Капустина [9].

Так как число премий, например в течение года, должно значительно превосходить число страховых случаев, то не будет большим ограничением предположить, что момент выплаты страхового возмещения совпадает с поступлением премии, причем премия может быть использована при выплате поступающего одновременно с ним иска.

Предполагается, что иск выплачивается в момент поступления страхового случая. Разорение компании происходит, если очередной иск превосходит капитал компании на данный момент. В статье находятся вероятности разорения компании в моменты предъявления первых трех исков. При большем числе исков приводится

схема последовательного вычисления вероятностей разорения. Рассмотрены примеры.

2. Стохастическая модель со случайными премиями и исками. Рассмотрим стохастическую модель, описанную выше, у которой премии $\eta_k, k = 1, 2, \dots$, и страховые возмещения $\xi_k, k = 1, 2, \dots$, имеют соответствующие плотности распределения:

$$f_\eta(x) = a^{-1}e^{-\frac{x}{a}}, \quad x > 0, \quad (1)$$

$$f_\xi(x) = \mu^{-1}e^{-\frac{x-x_0}{\mu}}, \quad x > x_0 > 0. \quad (2)$$

Обозначим через u начальный капитал компании. Модель страховой компании предполагает, что изменение капитала между моментами поступления $(k-1)$ -й и k -й премий выражается формулой

$$\zeta_k = \gamma_k \xi_k - \eta_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

причем случайные величины γ_k принимают только два значения: 1 и 0 с вероятностями $\mathbf{P}(\gamma_k = 1) = \rho$, $\mathbf{P}(\gamma_k = 0) = 1 - \rho$ и не зависят от случайных величин ξ_k и η_k . Формула (3) означает, что в момент появления страхового случая поступает и премия, которую можно использовать при оплате страхового иска. Из свойств компонент ζ_k следует, что при разных k они независимы и одинаково распределены.

Будем говорить, что произошло событие S_k , если капитал компании изменился на величину (3).

Общий капитал после поступления n премий равен

$$U_n = u - \sum_{k=1}^n \zeta_k. \quad (4)$$

Предполагается, что число премий $M(t)$, поступивших к моменту времени t , равно значению в момент t однородного процесса Пуассона с интенсивностью λ_η . Этот процесс не зависит от ξ_k и η_k . Премии поступают в моменты скачков процесса Пуассона. Из (3) и (4) следует, что число исков $N(t)$ к моменту t также равно значению в момент t процесса Пуассона с интенсивностью λ_ξ , и имеют место равенства

$$\mathbf{E}M(t) = \lambda_\eta t, \quad \mathbf{E}N(t) = \lambda_\xi t \quad \lambda_\xi = \rho \lambda_\eta. \quad (5)$$

Условие платежеспособности компании $\lambda_\eta \mathbf{E}\eta > \lambda_\xi \mathbf{E}\xi$ для данной задачи соответствует неравенству

$$\mathbf{E}\zeta < 0. \quad (6)$$

Капитал компании в момент времени t равен

$$U(t) = u - \sum_{k=1}^{M(t)} \zeta_k. \quad (7)$$

Формулы (4) и (7) дают два разных подхода к изучению баланса капитала компании.

3. Вероятность разорения в момент выплаты первого иска. Разорение может произойти только в момент выплаты страхового возмещения. Пусть $A_i, i \geq 1$,

обозначает событие, которое констатирует изменение капитала после выплаты $(i-1)$ -го иска и вплоть до выплаты i -го иска.

Обозначим через Z случайную величину, равную изменению капитала, если произошло событие A_1 , т. е. к моменту выплаты первого иска ξ . Если к этому моменту поступило n премий, то капитал изменится на величину

$$v(n) = \xi - \sum_{k=1}^n \eta_k = \sum_{k=1}^n \zeta_k, \quad \gamma_j = 0, \quad j \leq n-1, \quad \gamma_n = 1, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

$\gamma_0 = 0$, с вероятностью

$$\mathbf{P}(\gamma_j = 0, \quad j \leq n-1, \quad \gamma_n = 1) = \mathbf{P}(\gamma_n = 1) \prod_{i=1}^{n-1} \mathbf{P}(\gamma_i = 0) = \rho(1-\rho)^{n-1}.$$

Итак, определена случайная величина Z , на которую изменится капитал после выплаты первого страхового возмещения и которая принимает значения $v(n)$ с вероятностями

$$\mathbf{P}(Z = v(n)) = \rho(1-\rho)^{n-1}, \quad n \geq 1. \quad (9)$$

Заметим, что $\sum_{n=1}^{\infty} \rho(1-\rho)^{n-1} = 1$, следовательно, (9) дает распределение случайной величины Z . Если происходит событие $A_i, i > 1$ и оно влечет изменение капитала на случайную величину Z_i , то ясно, что распределения $Z = Z_1$ и $Z_i, i > 1$, совпадают. Случайные величины Z_i и Z_j , если $i \neq j$, независимы, так как состоят из независимых ζ_k . Разорение компании произойдет в момент появления первого страхового случая, если начальный капитал u окажется меньше суммы, которую нужно выплатить, т. е. если $Z > u$.

Рассмотрим вариант, когда происходит первый страховой случай и он приводит к разорению компании. Пусть в этот момент появилась n -я премия, тогда разорение происходит с вероятностью

$$P_n(u) = \rho(1-\rho)^{n-1} \mathbf{P}(v(n) > u). \quad (10)$$

Вероятность $\Psi_1^{(n)}(u)$ разорения при первом страховом случае, если к этому моменту поступило не более n премий, равна

$$\Psi_1^{(n)}(u) = \sum_{i=1}^n P_i(u). \quad (11)$$

Так как страховой случай происходит одновременно с n -й ($n \geq 1$) премией, то получаем вероятность разорения при первом страховом случае

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_1^{(n)}(u) = \Phi_1(u), \quad (12)$$

которая равна

$$\Phi_1(u) = \mathbf{P}(Z > u) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho(1-\rho)^{n-1} \mathbf{P}(v(n) > u). \quad (13)$$

Величина $v(n)$ соответствует изменению капитала при выплате первого иска в момент появления n -й премии. Найдем вероятности $\mathbf{P}(v(n) > u)$, а с ними и $\Phi_1(u)$.

Пусть $u > x_o$, тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(v(n) > u | u > x_o) &= \mathbf{P}\left(\xi - \sum_{k=1}^n \eta_k > u | u > x_o\right) = \int_0^\infty \frac{z^{(n-1)} e^{-\frac{z}{a}}}{a^n \Gamma(n)} \mathbf{P}(\xi > u+z) dz = \\ &= \int_0^\infty \frac{z^{(n-1)} e^{-\frac{z}{a}}}{a^n \Gamma(n)} \int_{u+z}^\infty \mu^{-1} e^{-\frac{y-x_o}{\mu}} dy dz = \frac{\mu^n}{(a+\mu)^n} e^{-\frac{u-x_o}{\mu}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь учтено, что сумма $\sum_{k=1}^n \eta_k$ имеет гамма-распределение, так как η_k независимы и имеют плотность (1).

Так как Z может представляться только в виде одной из случайных величин $v(n), n = 1, 2, \dots$, и при разных n они несовместны, то по формуле полной вероятности

$$\mathbf{P}(Z > u | u > x_o) = \sum_{n=1}^\infty \rho(1-\rho)^{n-1} \frac{\mu^n}{(a+\mu)^n} e^{-\frac{u-x_o}{\mu}} = \frac{\rho\mu}{a+\rho\mu} e^{-\frac{u-x_o}{\mu}}. \quad (15)$$

Рассмотрим вариант, в котором $u < x_o$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(v(n) < u | u < x_o) &= \int_0^\infty \frac{z^{(n-1)} e^{-\frac{z}{a}}}{a^n \Gamma(n)} \mathbf{P}(\xi < u+z | u < x_o) dz = \\ &= \int_{x_o-u}^\infty \frac{z^{(n-1)} e^{-\frac{z}{a}}}{a^n \Gamma(n)} \int_{x_o}^{u+z} \mu^{-1} e^{-\frac{y-x_o}{\mu}} dy dz = \int_{x_o-u}^\infty \frac{z^{(n-1)} e^{-\frac{z}{a}}}{a^n \Gamma(n)} \left(1 - e^{-\frac{u+z-x_o}{\mu}}\right) dz. \end{aligned}$$

Найдем функцию распределения Z при условии, что $u < x_o$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z < u | u < x_o) &= \sum_{n=1}^\infty \rho(1-\rho)^{n-1} \int_{x_o-u}^\infty \frac{z^{(n-1)} e^{-\frac{z}{a}}}{a^n (n-1)!} \left(1 - e^{-\frac{u+z-x_o}{\mu}}\right) dz = \\ &= \int_{x_o-u}^\infty \frac{\rho}{a} e^{-\rho \frac{z}{a}} \left(1 - e^{-\frac{u+z-x_o}{\mu}}\right) dz = \frac{a}{a+\rho\mu} e^{-\rho \frac{x_o-u}{a}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Теперь найдем, чему равна вероятность $\Phi_1(u)$ разорения при поступлении первого иска. Из формул (12) и (13) получаем вероятность разорения при выплате первого страхового возмещения:

$$\Phi_1(u) = \mathbf{P}(Z > u) = \begin{cases} 1 - \frac{a}{a+\rho\mu} e^{-\rho \frac{x_o-u}{a}}, & u < x_o \\ \frac{\rho\mu}{a+\rho\mu} e^{-\frac{u-x_o}{\mu}}, & u \geq x_o. \end{cases} \quad (17)$$

Запишем полученную формулу в виде

$$\Phi_1(u) = \begin{cases} \Phi_{1,0}(u) = \Phi_1(u | u < x_o), \\ \Phi_{1,1}(u) = \Phi_1(u | u \geq x_o). \end{cases} \quad (18)$$

Плотность распределения Z будет иметь вид

$$f_Z(x) = \begin{cases} \frac{\rho}{a+\rho\mu} e^{-\rho \frac{x_o-x}{a}}, & x < x_o \\ \frac{\rho}{a+\rho\mu} e^{-\frac{x-x_o}{\mu}}, & x \geq x_o. \end{cases} = \begin{cases} g_1(x), & x < x_o \\ g_2(x), & x \geq x_o. \end{cases} \quad (19)$$

Вероятность разорения, при выплате n -го страхового возмещения, равна

$$\Phi_n(u) = \mathbf{P} \left(Z_1 < u, Z_1 + Z_2 < u, \dots, \sum_{i=1}^{n-1} Z_i < u, \sum_{i=1}^n Z_i > u \right).$$

Так как случайные величины Z_i независимы и одинаково распределены, то для вычисления вероятности $\Phi_n(u)$ можно воспользоваться рекуррентным способом [4] с помощью уравнений:

$$\Phi_n(u) = \int_{-\infty}^u f_Z(y) \Phi_{n-1}(u-y) dy \quad (20)$$

или

$$\Phi_n(u) = \int_{-\infty}^u f_Z(s_1) \dots \int_{-\infty}^{u-\sum_{k=1}^{i-1} s_k} f_Z(s_i) \Phi_{n-i} \left(u - \sum_{k=1}^i s_k \right) ds_1 \dots ds_i.$$

Учитывая форму (19) плотности $f_Z(x)$, вероятность (20) записывается в виде

$$\Phi_n(u) = \begin{cases} \int_{-\infty}^u g_1(s) \Phi_{n-1}(u-s) ds, & u < x_o, \\ \int_{-\infty}^{x_o} g_1(s) \Phi_{n-1}(u-s) ds + \int_{x_o}^u g_2(s) \Phi_{n-1}(u-s) ds, & u \geq x_o. \end{cases} \quad (21)$$

Разорение компании может произойти только в момент появления страхового случая, который влечет выплату страхового возмещения, следовательно, при осуществлении несовместных событий A_n . Поэтому вероятность разорения компании

$$\Phi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(u).$$

Замечание. При исходных данных случайная величина Z , равная изменению капитала компании между появлениями соседних страховых случаев, имеет экспоненциальное распределение. Это дает возможность выводить рекуррентные уравнения для вероятности разорения компании.

С другой стороны, Z имеет геометрическое распределение, а именно: принимает случайные значения $v(n) = \xi - \sum_{k=1}^n \eta_k, n = 1, 2, \dots$, с вероятностями (9). Хотелось бы для Z найти другие распределения $\{p_n\}$, при которых случайная величина Z оставалась бы экспоненциальной. Из формул (15) и (16) следует, что для этого нужно, чтобы сумма

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n \frac{x^{n-1}}{a^n (n-1)!}$$

была равна экспоненте. Отсюда, в частности, приходим к заключению, что вероятности p_n не должны содержать факториалов. Исключить приходится и логарифмическое распределение, так как

$$\frac{-1}{\log(q)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q)^n}{n} \frac{x^{n-1}}{a^n (n-1)!} = \frac{-1}{x \log(q)} e^{(1-q)x/a}.$$

Итак, из известных распределений только геометрическое приводит к нужному результату.

4. Вероятность разорения страховой компании в момент поступления второго страхового случая. Из (20) получаем, что вероятность разорения в момент поступления 2-го страхового случая

$$\Phi_2(u) = \int_{-\infty}^u f_Z(s) \Phi_1(u-s) ds.$$

Так как вероятность $\Phi_1(x)$ имеет разные значения на различных промежутках, то вероятность разорения $\Phi_2(u)$ можно представить в виде

$$\Phi_2(u) = \begin{cases} \Phi_{2,0}(u) = \Phi_2(u \mid u < x_o), \\ \Phi_{2,1}(u) = \Phi_2(u \mid x_o \leq u < 2x_o), \\ \Phi_{2,2}(u) = \Phi_2(u \mid u \geq 2x_o). \end{cases}$$

Найдем ее значения на каждом из промежутков, учитывая рекуррентные формулы (21).

$$1. \Phi_{2,0}(u) = \Phi_2(u \mid u < x_o) =$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{x_o} g_1(u-t) \Phi_{1,0}(t) dt + \int_{x_o}^{\infty} g_1(u-t) \Phi_{1,1}(t) dt = \\ &= -\frac{a^2(a+2\rho\mu)}{(a+\rho\mu)^3} e^{-\rho \frac{2x_o-u}{a}} - \frac{\rho a}{(a+\rho\mu)^2} x_o e^{-\rho \frac{2x_o-u}{a}} + \frac{a}{a+\rho\mu} e^{-\rho \frac{x_o-u}{a}}. \end{aligned}$$

$$2. \Phi_{2,1}(u) = \Phi_2(u \mid x_o \leq u < 2x_o) =$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{u-x_o} g_2(u-t) \Phi_{1,0}(t) dt + \int_{u-x_o}^{x_o} g_1(u-t) \Phi_{1,0}(t) dt + \\ &+ \int_{x_o}^{\infty} g_1(u-t) \Phi_{1,1}(t) dt = \\ &= 1 - \frac{a^2(a+3\rho\mu)}{(a+\rho\mu)^3} e^{-\rho \frac{2x_o-u}{a}} - \frac{\rho a}{(a+\rho\mu)^2} (2x_o-u) e^{-\rho \frac{2x_o-u}{a}} - \\ &- \frac{\rho\mu}{a+\rho\mu} e^{-\frac{u-x_o}{\mu}} + \frac{\rho a^2\mu}{(a+\rho\mu)^3} e^{-\frac{u-x_o}{\mu}} e^{-\rho \frac{x_o}{a}}. \end{aligned}$$

$$3. \Phi_{2,2}(u) = \Phi_2(u \mid u \geq 2x_o) =$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{x_o} g_2(u-t) \Phi_{1,0}(t) dt + \int_{x_o}^{u-x_o} g_2(u-t) \Phi_{1,1}(t) dt + \\ &+ \int_{u-x_o}^{\infty} g_1(u-t) \Phi_{1,1}(t) dt = \\ &= \frac{\rho^2\mu^2(\rho\mu+3a)}{(a+\rho\mu)^3} e^{-\frac{u-2x_o}{\mu}} + \frac{\rho^2\mu}{(a+\rho\mu)^2} (u-2x_o) e^{-\frac{u-2x_o}{\mu}} - \\ &- \frac{\rho\mu}{a+\rho\mu} e^{-\frac{u-x_o}{\mu}} + \frac{\rho a^2\mu}{(a+\rho\mu)^3} e^{-\frac{u-x_o}{\mu}} e^{-\rho \frac{x_o}{a}}. \end{aligned}$$

Итак, получены формулы для нахождения вероятности разорения в момент поступления второго страхового случая.

Также можно сделать вывод, что вероятность разорения в момент поступления n -го страхового случая можно представить в виде

$$\Phi_n(u) = \begin{cases} \Phi_{n,0}(u) = \Phi_n(u \mid u < x_o), \\ \Phi_{n,j}(u) = \Phi_n(u \mid jx_o \leq u < (j+1)x_o, \quad j = 1, \dots, n-1), \\ \Phi_{n,n}(u) = \Phi_n(u \mid u \geq nx_o). \end{cases} \quad (22)$$

5. Вероятность разорения страховой компании в момент поступления третьего страхового случая. Для вычисления вероятности разорения $\Phi_3(u)$ следует, согласно (22), с помощью рекуррентных соотношений (21) найти четыре формулы на каждом из интервалов.

$$1. \Phi_{3,0}(u) = \Phi_3(u \mid u < x_o) =$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^u g_1(s) \Phi_2(u-s) ds = \int_0^{\infty} g_1(u-t) \Phi_2(t) dt = \\ &= \int_0^{x_o} g_1(u-t) \Phi_{2,0}(t) dt + \int_{x_o}^{2x_o} g_1(u-t) \Phi_{2,1}(t) dt + \int_{2x_o}^{\infty} g_1(u-t) \Phi_{2,2}(t) dt = \\ &= -\frac{a^3(a^2 + 4a\rho\mu + 5\rho^2\mu^2)}{(a + \rho\mu)^5} e^{-\rho\frac{3x_o-u}{a}} - \frac{a^2\rho(2a + 5\rho\mu)}{(a + \rho\mu)^4} x_o e^{-\rho\frac{3x_o-u}{a}} - \\ &- \frac{3\rho^2 a}{(a + \rho\mu)^3} \frac{x_o^2}{2} e^{-\rho\frac{3x_o-u}{a}} + \frac{a^2(a + 2\rho\mu)}{(a + \rho\mu)^3} e^{-\rho\frac{2x_o-u}{a}} + \frac{a\rho}{(a + \rho\mu)^2} x_o e^{-\rho\frac{2x_o-u}{a}}. \end{aligned}$$

$$2. \Phi_{3,1}(u) = \Phi_3(u \mid x_o \leq u < 2x_o) =$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{x_o} g_1(s) \Phi_2(u-s) ds + \int_{x_o}^u g_2(s) \Phi_2(u-s) ds = \\ &= \int_0^{u-x_o} g_2(u-t) \Phi_{2,0}(t) dt + \int_{u-x_o}^{x_o} g_1(u-t) \Phi_{2,0}(t) dt + \\ &+ \int_{x_o}^{2x_o} g_1(u-t) \Phi_{2,1}(t) dt + \int_{2x_o}^{\infty} g_1(u-t) \Phi_{2,2}(t) dt = \\ &= -\frac{a^3(a^2 + 5a\rho\mu + 7\rho^2\mu^2)}{(a + \rho\mu)^5} e^{-\rho\frac{3x_o-u}{a}} - \frac{a^2\rho(a + 4\rho\mu)}{(a + \rho\mu)^4} x_o e^{-\rho\frac{3x_o-u}{a}} - \\ &- \frac{a^2\rho(a + 2\rho\mu)}{(a + \rho\mu)^4} (2x_o - u) e^{-\rho\frac{3x_o-u}{a}} - \frac{\rho^2 a}{(a + \rho\mu)^3} x_o (2x_o - u) e^{-\rho\frac{3x_o-u}{a}} - \\ &- \frac{\rho^2 a}{(a + \rho\mu)^3} \frac{x_o^2}{2} e^{-\rho\frac{3x_o-u}{a}} + \\ &+ \frac{a^2(a + 3\rho\mu)}{(a + \rho\mu)^3} e^{-\rho\frac{2x_o-u}{a}} + \frac{a\rho}{(a + \rho\mu)^3} (2x_o - u) e^{-\rho\frac{2x_o-u}{a}} + \\ &+ \frac{a^3\rho\mu(a + 2\rho\mu)}{(a + \rho\mu)^5} e^{-\frac{u-x_o}{\mu}} e^{-\rho\frac{2x_o}{a}} + \frac{a^2\rho^2\mu}{(a + \rho\mu)^4} x_o e^{-\frac{u-x_o}{\mu}} e^{-\rho\frac{2x_o}{a}} - \\ &- \frac{a^2\rho\mu}{(a + \rho\mu)^3} e^{-\frac{u-x_o}{\mu}} e^{-\rho\frac{x_o}{a}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \Phi_{3,2}(u) &= \Phi_3(u \mid 2x_0 \leq u < 3x_0) = \\
&= \int_0^{x_0} g_2(u-t)\Phi_{2,0}(t)dt + \int_{x_0}^{u-x_0} g_2(u-t)\Phi_{2,1}(t)dt + \\
&+ \int_{u-x_0}^{2x_0} g_1(u-t)\Phi_{2,1}(t)dt + \int_{2x_0}^{\infty} g_1(u-t)\Phi_{2,2}(t)dt = \\
&= 1 - \frac{a^3(a^2 + 5a\rho\mu + 10\rho^2\mu^2)}{(a + \rho\mu)^5} e^{-\rho\frac{3x_0-u}{a}} - \frac{a^2\rho(a + 4\rho\mu)}{(a + \rho\mu)^4} (3x_0 - u) e^{-\rho\frac{3x_0-u}{a}} - \\
&- \frac{\rho^2 a}{(a + \rho\mu)^3} \frac{(3x_0 - u)^2}{2} e^{-\rho\frac{3x_0-u}{a}} - \\
&- \frac{\rho^2\mu^2(3a + \rho\mu)}{(a + \rho\mu)^3} e^{-\frac{u-2x_0}{\mu}} - \frac{\rho^2\mu}{(a + \rho\mu)^2} (u - 2x_0) e^{-\frac{u-2x_0}{\mu}} + \\
&+ \frac{3a^3\rho^2\mu^2}{(a + \rho\mu)^5} e^{-\frac{u-2x_0}{\mu}} e^{-\rho\frac{x_0}{a}} + \frac{a^2\rho^2\mu}{(a + \rho\mu)^4} (u - 2x_0) e^{-\frac{u-2x_0}{\mu}} e^{-\rho\frac{x_0}{a}} + \\
&+ \frac{a^3\rho\mu(a + 2\rho\mu)}{(a + \rho\mu)^5} e^{-\frac{u-x_0}{\mu}} e^{-\rho\frac{2x_0}{a}} + \frac{a^2\rho^2\mu}{(a + \rho\mu)^4} x_0 e^{-\frac{u-x_0}{\mu}} e^{-\rho\frac{2x_0}{a}} - \\
&- \frac{a^2\rho\mu}{(a + \rho\mu)^3} e^{-\frac{u-x_0}{\mu}} e^{-\rho\frac{x_0}{a}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \Phi_{3,3}(u) &= \Phi_3(u \mid u \geq 3x_0) = \\
&= \int_0^{x_0} g_2(u-t)\Phi_{2,0}(t)dt + \int_{x_0}^{2x_0} g_2(u-t)\Phi_{2,1}(t)dt + \\
&+ \int_{2x_0}^{u-x_0} g_2(u-t)\Phi_{2,2}(t)dt + \int_{u-x_0}^{\infty} g_1(u-t)\Phi_{2,2}(t)dt = \\
&= \frac{\rho^3\mu^3(\rho^2\mu^2 + 5a\rho\mu + 10a^2)}{(a + \rho\mu)^5} e^{-\frac{u-3x_0}{\mu}} + \frac{\rho^3\mu^2(\rho\mu + 4a)}{(a + \rho\mu)^4} (u - 3x_0) e^{-\frac{u-3x_0}{\mu}} - \\
&- \frac{\rho^3\mu}{(a + \rho\mu)^3} \frac{(u - 3x_0)^2}{2} e^{-\frac{u-3x_0}{\mu}} + \\
&+ \frac{\rho^2\mu^2(3a + \rho\mu)}{(a + \rho\mu)^3} e^{-\frac{u-2x_0}{\mu}} - \frac{\rho^2\mu}{(a + \rho\mu)^2} (u - 2x_0) e^{-\frac{u-2x_0}{\mu}} - \\
&+ \frac{3a^3\rho^2\mu^2}{(a + \rho\mu)^5} e^{-\frac{u-2x_0}{\mu}} e^{-\rho\frac{x_0}{a}} + \frac{a^2\rho^2\mu}{(a + \rho\mu)^4} (u - 2x_0) e^{-\frac{u-2x_0}{\mu}} e^{-\rho\frac{x_0}{a}} + \\
&+ \frac{a^3\rho\mu(a + 2\rho\mu)}{(a + \rho\mu)^5} e^{-\frac{u-x_0}{\mu}} e^{-\rho\frac{2x_0}{a}} + \frac{a^2\rho^2\mu}{(a + \rho\mu)^4} x_0 e^{-\frac{u-x_0}{\mu}} e^{-\rho\frac{2x_0}{a}} - \\
&- \frac{a^2\rho\mu}{(a + \rho\mu)^3} e^{-\frac{u-x_0}{\mu}} e^{-\rho\frac{x_0}{a}}.
\end{aligned}$$

Получены формулы для вычисления вероятности разорения при поступлении третьего страхового случая. Данный результат докладывался на студенческой конференции СПбГУ. Опубликовано тезисы [10].

6. Вероятность разорения в момент выплаты n -го ($n \geq 3$) иска. Как и прежде, $\Phi_n(u)$, в зависимости от области изменения аргумента, задается $(n + 1)$ -й

формулой. Вероятности $\Phi_{n,0}(u)$ и $\Phi_{n,n}(u)$ вычисляются индивидуально, а остальные по общей схеме.

1. Пусть $u < x_o$, тогда в (20) $f_Z(y) = g_1(y)$ и, следовательно,

$$\begin{aligned}\Phi_{n,0}(u) &= \Phi_n(u|u < x_o) = \int_{-\infty}^u g_1(y)\Phi_{n-1}(u-y)dy = \int_0^{\infty} g_1(u-t)\Phi_{n-1}(t)dt = \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} \int_{jx_o}^{(j+1)x_o} g_1(u-t)\Phi_{n-1,j}(t)dt + \int_{(n-1)x_o}^{\infty} g_1(u-t)\Phi_{n-1,n-1}(t)dt.\end{aligned}$$

2. В остальных вариантах $u > x_o$, и при интегрировании в (20) $f_Z(y) = g_1(y)$ в области $(-\infty, x_o)$ и $f_Z(y) = g_2(y)$ в области (x_o, u) :

$$\begin{aligned}\Phi_{n,n}(u) &= \Phi_n(u|u > nx_o) = \int_{-\infty}^{x_o} g_1(y)\Phi_{n-1}(u-y)dy + \int_{x_o}^u g_2(u-t)\Phi_{n-1}(t)dt = \\ &= \int_{u-x_o}^{\infty} g_1(u-t)\Phi_{n-1}(t)dt + \int_0^{u-x_o} g_2(u-t)\Phi_{n-1}(t)dt = \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} \int_{jx_o}^{(j+1)x_o} g_2(u-t)\Phi_{n-1,j}(t)dt + \int_{(n-1)x_o}^{u-x_o} g_2(u-t)\Phi_{n-1,n-1}(t)dt + \\ &\quad + \int_{u-x_o}^{\infty} g_1(u-t)\Phi_{n-1,n-1}(t)dt.\end{aligned}$$

3. Найдем вероятность разорения, если $kx_o < u < (k+1)x_o$, $k \geq 1$, $k+1 \leq n$, следовательно, $1 \leq k \leq n-1$. Заметим, что в этом случае $u > x_o$:

$$\begin{aligned}\Phi_{n,k}(u) &= \Phi_{n,k}(u|1 \leq k \leq n-1) = \Phi_n(u|kx_o < u < (k+1)x_o) = \\ &= \int_{-\infty}^{x_o} g_1(y)\Phi_{n-1}(u-y)dy + \int_{x_o}^u g_2(y)\Phi_{n-1}(u-y)dy = \\ &= \int_0^{u-x_o} g_2(u-t)\Phi_{n-1}(t)dt + \int_{u-x_o}^{\infty} g_1(u-t)\Phi_{n-1}(t)dt = \\ &= \sum_{j=0}^{k-2} \int_{jx_o}^{(j+1)x_o} g_2(u-t)\Phi_{n-1,j}(t)dt + \int_{(k-1)x_o}^{u-x_o} g_2(u-t)\Phi_{n-1,k-1}(t)dt + \\ &\quad + \int_{u-x_o}^{kx_o} g_1(u-t)\Phi_{n-1,k-1}(t)dt + \\ &\quad + \sum_{j=k}^{n-2} \int_{jx_o}^{(j+1)x_o} g_1(u-t)\Phi_{n-1,j}(t)dt + \int_{(n-1)x_o}^{\infty} g_1(u-t)\Phi_{n-1,n-1}(t)dt.\end{aligned}$$

Если в сумме верхний предел меньше нижнего, то эту сумму опускаем.

7. Примеры. Во всех примерах исходные данные, кроме начального капитала, будут одинаковые, зададим их: $a = 1.5$, $\mu = 5$, $x_0 = 8$, $\rho = 0.1$.

Пример 1. Рассмотрим пример, в котором разорение происходит при поступлении первого страхового иска при условии $u > x_0$.

$$\Psi_1^{(n)}(u) = \sum_{i=1}^n P_i(u)$$

определяют вероятности разорения при наступлении первого страхового случая в момент, когда число поступивших премий не превосходит n .

На рис. 1 приведены вероятности разорения компании при $8 \leq u \leq 20$ для $\Psi_1^{(1)}(u)$, $\Psi_1^{(5)}(u)$, $\Psi_1^{(10)}(u)$, а также $\Phi_1(u)$.

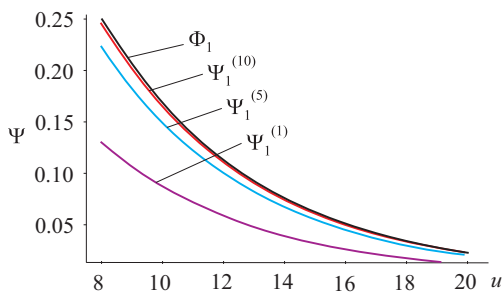


Рис. 1. Вероятность разорения компании в момент выплаты первого иска.

Из рис. 1 видно, что при увеличении капитала u вероятность разорения стремится к нулю. Для данного примера вероятность $\Psi_1^{(10)}(u)$ практически совпадает с вероятностью $\Phi_1(u)$, оправдывая предельное равенство (12).

Таблица 1. Вероятности разорения при выплате первого иска

u	8	10	12	14	16	18	20
$\Phi_1(u)$	0.25	0.16758	0.11233	0.07529	0.05047	0.03383	0.02267

В табл. 1 для некоторых значений начального капитала приведены вероятности разорения при выплате первого страхового возмещения при условии $u > x_0$.

Так как $\mathbf{E}\xi_k = \theta + x_0 = 13$, $\mathbf{E}\eta_k = \lambda = 1.5$, условие платежеспособности (6) в данном примере будет иметь вид

$$1.5\mu_1 > 13\mu_2.$$

В рассматриваемых условиях, когда страховые случаи происходят в те же моменты, в которые поступают премии, но их интенсивность меньше, имеет место соотношение $\mu_2 = \rho\mu_1$. Условие платежеспособности (6) при заданных начальных данных выполнено.

Пример 2. Рассмотрим вероятность разорения при выплате первого страхового возмещения для различных значений начального капитала u .

Таблица 2. Вероятности разорения при выплате первого иска

Величина	$u < x_0$			$u \geq x_0$		
u	1	4	7	10	18	30
$\Phi_1(u)$	0.5297	0.4256	0.2984	0.1676	0.0338	0.0031
MC	0.5390	0.4204	0.2996	0.1639	0.0351	0.0034

В табл. 2 представлены вероятности разорения при наступлении первого страхового случая с помощью полученных формул и моделировании методом Монте-Карло при количестве итераций $N = 10^4$.

Результаты, полученные с помощью явных формул и посредством моделирования, очень близки, что подтверждает верность формул, полученных аналитически.

Пример 3. Пусть разорение происходит в момент поступления второго страхового иска.

Таблица 3. Вероятности разорения при выплате второго иска

Величина	$u < x_0$			$x_0 \leq u < 2x_0$			$u \geq 2x_0$		
u	1	4	7	10	11	15	22	30	40
$\Phi_2(u)$	0.1013	0.1237	0.1511	0.1713	0.1691	0.1342	0.0594	0.018	0.0035
MC	0.1007	0.1311	0.1513	0.1710	0.1689	0.1347	0.0547	0.019	0.0036
χ	0.5427	0.5310	0.5201	0.4975	0.4810	0.3927	0.2211	0.0995	0.0332

В табл. 3 представлены значения вероятности разорения на различных промежутках для начального капитала u с использованием точных формул и моделирования методом Монте-Карло при количестве итераций $N = 10^4$. Также заметим, что значения, полученные обоими методами, близки, т. е. формулы вычислены верно.

Можем наблюдать увеличение вероятности разорения в момент появления второго страхового случая при увеличении капитала при $u < \mathbf{E}(\xi - \eta)$, где правая часть неравенства есть среднее значение изменения капитала при одновременном поступлении первой премии и первого страхового иска. Этот феномен возникает за счет того, что при указанных u очень большая вероятность разорения при появлении первого страхового случая и мало шансов у компании дожить до второго страхового случая.

Оценку вероятности $\Phi(u) = \sum_1^\infty \Phi_i(u)$, полученную методом Монте-Карло с числом реализаций $N = 10^6$, обозначим $\hat{\Phi}(u)$. Величина

$$\chi = \Phi_2(u) / (\hat{\Phi}(u) - \Phi_1(u))$$

показывает, какая доля от общего разорения $\hat{\Phi}(u)$ приходится на разорение при втором страховом случае, если на первом оно не произошло. Эта величина убывает с ростом капитала u . Изменения χ представлены в табл. 3.

Пример 4. Пусть разорение происходит при выплате третьего страхового возмещения.

Таблица 4. Вероятности разорения при выплате третьего иска

Величина	$u < x_0$			$x_0 \leq u < 2x_0$		
u	1	4	7	9	13	15
$\Phi_3(u)$	0.0487	0.0595	0.0726	0.0824	0.0935	0.0949
MC	0.0485	0.0597	0.0713	0.0835	0.0901	0.0976
	$2x_0 \leq u < 3x_0$			$u \geq 3x_0$		
u	17	20	22	25	30	40
$\Phi_3(u)$	0.0932	0.0851	0.0767	0.0621	0.0389	0.0115
MC	0.0950	0.0861	0.0781	0.0616	0.0366	0.0116

В табл. 4 представлены вероятности разорения при поступлении третьего страхового возмещения для различных u с помощью выведенных формул, а также моделированием методом Монте-Карло с количеством итераций $N = 10^4$.

Можно заметить повышение вероятности разорения на интервалах $u < x_0$ и $x_0 \leq u < 2x_0$, на следующих она уменьшается. Пояснение этого эффекта такое же, как в предыдущем примере.

Пример 5. На рис. 2 для $1 \leq u \leq 50$ приведены вероятности $\Phi_1(u)$, $\Phi_2(u)$, $\Phi_3(u)$, $\Phi(3, u) = \sum_1^3 \Phi_i(u)$, $\hat{\Phi}(u)$.

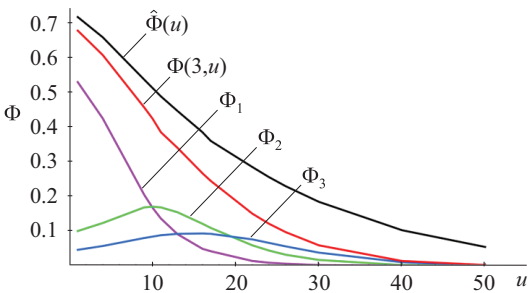


Рис. 2. Вероятность разорения компании.

Какую долю от вероятности разорения $\Phi(u)$ составляет сумма $\Phi(3, u)$, которую можно получить с помощью явных формул, показано в табл. 5. Заметим, что вероятности разорения $\Phi(3, u)$ убывают с ростом u , начиная с $u = 1$.

Таблица 5. Доля вероятности разорения $\Phi(3, u)$ к вероятности разорения $\hat{\Phi}(u)$

Величина	$u < x_0$			$x_0 \leq u < 2x_0$		
u	1	4	7	9	13	15
$\Phi(3, u)$	0.6775	0.6069	0.5210	0.4556	0.3403	0.2907
$\hat{\Phi}(u)$	0.7159	0.6582	0.5889	0.5365	0.4457	0.4045
$(\Phi(3, u)/\hat{\Phi}(u))\%$	94.66	92.20	88.47	84.92	76.54	71.86
	$2x_0 \leq u < 3x_0$			$u \geq 3x_0$		
u	17	20	22	25	30	50
$\Phi(3, u)$	0.2448	0.1822	0.1513	0.1093	0.0603	0.0034
$\hat{\Phi}(u)$	0.3667	0.3157	0.2847	0.2432	0.1849	0.0553
$(\Phi(3, u)/\hat{\Phi}(u))\%$	66.76	58.68	53.13	44.96	32.00	6.10

Ориентировочный выбор u , по крайней мере для данного примера, таков. Для исходных данных находим u , при котором $\Phi(3, u) \approx 0.05q$, где q — приемлемая для данной компании вероятность разорения. Мы не можем утверждать, что так нужно поступать всегда, так как для этого нужны дополнительные исследования.

Заключение. Использование для плотности страховых возмещений экспоненты со сдвигом (2) вместо экспоненты вида (1) существенно усложняет вычисление вероятности разорения страховой компании. Найдены формулы, которые помогают оценить нижнюю границу начального капитала страховой компании. Кроме того, можно воспользоваться предложенным алгоритмом и, преодолевая громоздкие вычисления, уточнить границу и оценить вероятность разорения.

Авторы выражают благодарность В. В. Некруткину за ценные замечания.

Литература

1. Lundberg F. Approximations of the probability function. *Reinsurance of collection risk* (1903).
2. Cramer H. Collective risk theory: *Reprint from the Skandia jubilee volume* (1955).
3. Бойков А. В. Модель Крамера — Лундберга со стохастическими премиями. *Теория вероятностей и ее применения* **47** (3), 549–553 (2002). <https://doi.org/10.4213/tvp3693>
4. Товстик Т. М. Вероятности разорения страховой компании для некоторых стохастических моделей риска. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. Сер. 1*, **1**, 45–54 (2014).
5. Лившиц К. И., Сухотина Л. Ю. Вероятность разорения страховой компании при гиперэкспоненциальных распределениях страховых премий и страховых выплат для различных моделей страхования. *Вестник Томского университета* **2** (47), 37–45 (2016). <https://doi.org/10.17223/19988605/35/4>
6. Муромская А. А. Вероятность разорения в моделях со стохастическими премиями. *Вестник Московского университета* **1** (4), 57–61 (2020).
7. Luo Jian-hua. Survival probability and ruin probability of a risk model. *Appl. Math. J. Chinese Univ.* **23** (3), 256–264 (2008).
8. Товстик Т. М., Богдан В. Ю. Рекуррентные уравнения для вероятностей разорения страховой компании для некоторых моделей риска. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. Сер. 1. Вып. 4*, 69–79 (2013).
9. Капустин Е. В. Вычисление вероятности разорения страховой компании в случае выплат, имеющих экспоненциальное распределение со сдвигом. *Вестник Томского университета* **4** (21), 47–52 (2012).
10. Булгакова Д. С., Товстик Т. М. Вероятность разорения страховой компании для некоторой стохастической модели риска. *Весенняя науч.-практ. конференция по вопросам информатики, математики, механики и астрономии «Мат-мех. Наука 2024»* (2024). Доступно на: <https://events.spbu.ru/events/math-mech> (дата обращения: 24.01.2024).

Статья поступила в редакцию 4 июля 2024 г.;
доработана 27 августа 2024 г.;
рекомендована к печати 29 августа 2024 г.

Контактная информация:

Товстик Татьяна Михайловна — канд. физ.-мат. наук, доц.;
<https://orcid.org/0000-0002-0250-2392>, peter.tovstik@mail.ru
Булгакова Дарья Сергеевна — студент; <https://orcid.org/0009-0004-0311-5919>,
da.bulgakova@gmail.com

Insurance company model with random premiums and claims

T. M. Tovstik, D. S. Bulgakova

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Tovstik T. M., Bulgakova D. S. Insurance company model with random premiums and claims. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2025, vol. 12 (70), issue 1, pp. 102–116. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2025.108> (In Russian)

The article discusses the stochastic Cramer — Lundberg model, in which premiums and insurance claims (claims) are random and independent. The bonuses are equally distributed and obey the exponential law. The claims are also equally distributed according to the exponential law, which has a positive shift from the origin. A homogeneous Poisson process is introduced, the jumps of which are interpreted as the moments of receipt of premiums, and the intensity corresponds to the average number of premiums per year. The Poisson process does not depend on random variables representing premiums and claims. Insurance cases occur at the same moments at which premiums are received, but with less intensity.

The probabilities of the company's ruin in the first three moments of the occurrence of claims are found, and a scheme is given for sequentially calculating the probabilities of ruin at the moments of insured claims. Examples are given.

Keywords: ruin probability, risk model, stochastic model of an insurance company, exponential distribution with loss shift.

References

1. Lundberg F. Approximations of the probability function. *Reinsurance of collection risk* (1903).
2. Cramer H. Collective Risk Theory. *Reprint from the Skandia Juilee Volume* (1955).
3. Boykov A.V. Cramer—Lundberg model with stochastic prizes. *Teoriia veroiatnostei i ee primeneniia* **47** (3), 549–553 (2002). <https://doi.org/10.4213/tvp3693> (In Russian) [Eng. transl.: *Theory probably and her note* **47**, iss. 3, 489–493. <https://doi.org/10.1137/S0040585X9797987>].
4. Tovstik T.M. Probabilities of bankruptcy of an insurance company for some stochastic risk models. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy. Ser. 1.* **1**, 45–54 (2014). (In Russian)
5. Livshits K.I., Sukhotina L.Yu. Probability of bankruptcy of the insurance company companies with hyper-exponential distributions of insurance premiums and insurance payments for various insurance models. *Vestnik Tomsk University* **2** (47), 37–45 (2016). (In Russian)
6. Muromskaia A.A. Probability of ruin in models with stochastic premiums. *Vestnik Moscow University* **1** (4), 57–61 (2020). (In Russian)
7. Luo Jian-hua. Survival probability and ruin probability of a risk model. *Appl. Math. J. Chinese Univ.* **23** (3), 256–264 (2008).
8. Tovstik T.M., Bogdan V.Yu. Recurrence equations for probabilities of bankruptcy of an insurance company for some models risk. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy. Ser. 1.* **4**, 69–79 (2013). (In Russian)
9. Kapustin E.V. Calculation of the probability of bankruptcy of an insurance company companies in case of payments having an exponential distribution with a shift. *Vestnik Tomsk University* **4** (21), 47–52 (2012). (In Russian)
10. Bulgakova D.S., Tovstik T.M. Probability of bankruptcy of the insurance company companies for some stochastic risk model. *Spring scientific-practical conference on computer science, mathematics, mechanics and astronomy “Mat-mech. Science 2024”*. (2024). (In Russian) Available at: <https://events.spbu.ru/events/math-mech> (accessed: January 24, 2024).

Received: June 4, 2024

Revised: August 27, 2024

Accepted: August 29, 2024

Authors' information:

Tatiana M. Tovstik — <https://orcid.org/0000-0002-0250-2392>, peter.tovstik@mail.ru

Darya S. Bulgakova — <https://orcid.org/0009-0004-0311-5919>, da.bulgakova@gmail.com