

Квазилинейная задача Коши — Дирихле для параболических уравнений с коэффициентами из класса VMO_x

Р. Рескиньо

Университет Салерно,
Италия, 84084, Фишиано, Виа Джованни Паоло II, 132

Для цитирования: Рескиньо Р. Квазилинейная задача Коши — Дирихле для параболических уравнений с коэффициентами из класса VMO_x // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2025. Т. 12 (70). Вып. 1. С. 117–128. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2025.109>

Исследуется сильная разрешимость задачи Коши — Дирихле для параболических квазилинейных уравнений с разрывными данными. Старшие коэффициенты зависят от точки (x, t) и от решения u , зависимость от x имеет тип VMO , в то время как по t от них требуется только измеримость. При подходящих структурных условиях на нелинейные члены доказывается существование и единственность сильного решения, которое оказывается также непрерывным по Гёльдеру.

Ключевые слова: квазилинейные параболические уравнения, задача Коши — Дирихле, коэффициенты VMO_x , теорема о неподвижной точке, сильные решения.

1. Введение. Пусть $Q = \Omega \times (0, T)$ — цилиндр в $\mathbb{R}^{n+1}$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n — $C^{1,1}$ — гладкая и ограниченная область, $T > 0$, и $\partial_p Q = \{\partial\Omega \times (0, T)\} \cup \{\overline{\Omega} \times \{0\}\}$ обозначает параболическую границу Q . Рассмотрим следующую задачу Коши — Дирихле:$

$$\begin{cases} \mathcal{P}u := D_t u - a^{ij}(x, t, u) D_{ij} u = f(x, t, u, Du) & \text{п. в. в } Q, \\ u(x, t) = 0 & \text{на } \partial_p Q. \end{cases} \quad (1)$$

Классическая теория квазилинейных эллиптических и параболических уравнений в частных производных хорошо разработана, и ее описание можно найти в различных книгах (ср. [1–3]). После плодотворного результата Кьяренцы, Фраски и Лонго [4], распространяющего теорию единственной разрешимости линейных эллиптических уравнений с гладкими коэффициентами на уравнения с разрывными коэффициентами из класса VMO , появилось множество исследований, посвященных линейным и квазилинейным уравнениям с такими коэффициентами (см. [5–9]) и нелинейным операторам с коэффициентами, близкими к VMO (см. [10–12] и ссылки в них). Что касается параболического случая, Крылов [13] ослабил условие VMO на коэффициенты $\{a^{ij}(x, t)\}$ до условия *частичного* VMO . Это означает, что разрыв имеет VMO -тип *только* по пространственным переменным x , в то время как коэффициенты могут быть *только измеримыми* по временной переменной t . Позже эти результаты использовались для изучения различных начально-краевых задач для линейных параболических операторов с частично- VMO старшими коэффициентами (см. [14–17]).

Как известно, теория существования и единственности решений различных линейных краевых задач является отправной точкой для изучения квазилинейных и нелинейных уравнений в частных производных при различных граничных условиях. В этом контексте можно упомянуть работу Палагачева [18], где впервые были изучены квазилинейные эллиптические уравнения с предположением о разрыве типа $ВМО$ на коэффициенты. В этой работе автор оценивает $ВМО$ -модуль непрерывности композиции $a^{ij}(\cdot, u(\cdot))$, что позволяет применить теорему Лере — Шаудера о неподвижной точке для получения сильной разрешимости квазилинейной задачи Дирихле. Аналогичный результат был получен позже в [19] для параболических квазилинейных операторов с условиями Дирихле и наклонной производной на границе.

Наша цель — распространить эти результаты на случай квазилинейных параболических операторов с частичным $ВМО$ старшими коэффициентами, опираясь на линейные результаты Крылова [13] и теорему Лере — Шаудера о неподвижной точке (ср. [18, 19]).

Проблемы, подобные (1), возникают в различных приложениях, таких как, например, теплообмен, математическое моделирование полупроводниковых приборов, моделирование фондового рынка и т. д. Многие эллиптические и параболические уравнения с разрывными коэффициентами часто предлагаются в моделях деформирования композитных материалов, в механике мембран и пленок из простых неоднородных материалов, образующих линейно-слоистую среду.

Далее мы используем стандартные обозначения: для любой измеримой функции $f \in L^p(Q)$ обозначим ее норму $\|f\|_{p,Q}$; через $D_i u$ обозначим частные производные $\partial u / \partial x_i$, $i = 1, \dots, n$; $Df = (D_1 f, \dots, D_n f)$ — градиент f , а $D^2 f = \{D_{ij} f\}_{i,j=1}^n$ — матрица Гессе для f ; пространство Соболева $W_p^{2,1}(Q)$ состоит из функций, имеющих обобщенные производные по x до второго порядка и одну производную по t , наделенную нормой

$$\|f\|_{W_p^{2,1}(Q)} = \|f\|_{p,Q} + \|Df\|_{p,Q} + \|D^2 f\|_{p,Q} + \|u_t\|_{p,Q};$$

буква C обозначает положительную константу, значение которой меняется в зависимости от контекста; принимается стандартное суммирование по повторяющимся нижнему и верхнему индексам.

2. Определения и основные предположения. Пусть $\mathcal{B}_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$ — шар в $\mathbb{R}^n$ и $I_r(x, t) = \mathcal{B}_r(x) \times (t, t + r^2)$ — параболический цилиндр в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$. Для произвольной функции $a \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^{n+1})$ рассмотрим среднее колебание a относительно x в $I_r(x, t)$ (см. [13, 14]):

$$\text{osc}_x(a, I_r(x, t)) = \int_t^{t+r^2} \int_{\mathcal{B}_r(x)} \int_{\mathcal{B}_r(x)} |a(y, \tau) - a(z, \tau)| dy dz d\tau$$

и обозначим

$$a_R^{\#(x)} = \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}} \sup_{r \leq R} \text{osc}_x(a, I_r(x, t)).$$

Мы говорим, что $a \in VMO_x$, если $\lim_{R \rightarrow 0} a_R^{\#(x)} = 0$.

Определение 1. Функция $u(x, t)$ является сильным решением задачи (1), если она дважды слабо дифференцируема по x и один раз по t с производными, принадлежащими $L^{n+1}(Q)$, т. е. $u \in W_{n+1}^{2,1}(Q) \cap C(\overline{Q})$, $u|_{\partial_p Q} = 0$, и удовлетворяет $\mathcal{P}u = f$ почти везде (п. в.) в Q .

Для нашего удобства мы предполагаем, что значения a^{ij} и f равны 0 для $(x, t) \notin \overline{Q}$. Это позволяет распространить предположения о коэффициентах на все пространство. Пусть $Q_r(x, t) = I_r(x, t) \cap Q$ с $(x, t) \in Q$ и $\Omega_r = \mathcal{B}_r(x) \cap \Omega$. Мы изучаем сильную разрешимость (1), накладывая следующие условия.

1. $a^{ij}(x, t, u)$ и $f(x, t, u, p)$ являются функциями Каратеодори, т. е. они измеримы по $(x, t) \in Q$ для всех $(u, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ и непрерывны по остальным переменным для почти всех $(x, t) \in Q$;

2. Строгая параболичность оператора $\mathcal{P}$: существует положительная и невозрастающая функция λ такая, что

$$a^{ij}(x, t, u)\xi^i\xi^j \geq \lambda(|u|)|\xi|^2 \quad \text{п. в. в } Q, \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

и матрица $\mathcal{A} = \{a^{ij}\}$ симметрична.

3. $a^{ij}(\cdot, u) \in VMO_x(Q) \cap L^\infty(Q)$ локально равномерно по $u \in [-M, M]$ для любого $M > 0$, т. е., полагая

$$a_R^{ij\#(x)} := \sup_{|u| \leq M} \sup_{r \leq R} \sup_{(x, t) \in Q} \int_{Q_r(x, t)} \left(\int_{\Omega_r(x)} |a^{ij}(y, t, u) - a^{ij}(z, t, u)| dz \right) dy dt,$$

$$\gamma_M^{\#(x)}(R) := \max_{1 \leq i, j \leq n} a_R^{ij\#(x)},$$

мы требуем $\lim_{R \rightarrow 0} \gamma_M(R) \rightarrow 0$.

4. Локальная равномерная непрерывность $a^{ij}(x, t, u)$ по u , равномерно по (x, t) :

$$|a^{ij}(x, t, u) - a^{ij}(x, t, \bar{u})| \leq \mu_M(|u - \bar{u}|) \quad \text{п. в. в } Q$$

для любых $u, \bar{u} \in [-M, M]$. Функция $\mu_M(\cdot)$ не убывает и удовлетворяет условию $\mu_M(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Кроме того, $a^{ij}(x, t, 0) \in L^\infty(Q)$.

5. Квадратичный рост по градиенту:

$$|f(x, t, u, p)| \leq \nu(|u|)(f_1(x, t) + |p|^2) \quad \text{п. в. в } Q,$$

где $f_1 \in L^{n+1}(Q)$ и $\nu(\cdot)$ — положительная и неубывающая функция.

6. Условие знака на f относительно u :

$$\frac{\text{sign } u f(x, t, u, p)}{\lambda(|u|)} \leq \nu_1(x, t)|p| + \nu_2(x, t) \quad \text{п. в. в } Q,$$

где $|u| > 0$ и $\nu_1, \nu_2 \in L^{n+1}(Q)$ — неотрицательные функции.

Сформулируем основные результаты.

Теорема 1 (Существование). *Предположим, что условия 1–6 выполнены. Тогда задача (1) имеет сильное решение $u \in W_{n+1}^{2,1}(Q) \cap C(\overline{Q})$.*

Теорема 2 (Единственность). *Пусть коэффициенты a^{ij} не зависят от u и выполнены условия (1–6). Предположим, кроме того, что $f(x, t, u, p)$ не возрастает по u и непрерывна по Липшицу по p , т. е. для всех $p, p' \in \mathbb{R}^n$ она удовлетворяет неравенству*

$$|f(x, t, u, p) - f(x, t, u, p')| \leq f_2(x, t, u)|p - p'| \quad \text{п. в. в } Q, \quad (2)$$

с $\sup_{|u| \leq M} f_2(x, t, u) \in L^{n+1}(Q)$ для любой константы $M > 0$.

Тогда задача (1) не может иметь более одного решения.

3. Вспомогательные леммы. Первым шагом в наших рассуждениях является получение ограниченности решения, что важно для доказательства существования. Для этой цели мы используем принцип максимума для линейных параболических операторов, полученный Крыловым в [20] и развитый далее Назаровым и Уральцевой в [21] (см. также [22]).

Лемма 1. Пусть $u \in W_{n+1}^{2,1}(Q) \cap C(\overline{Q})$ является решением (1) и выполнены условия 1, 2 и 6. Тогда u существенно ограничено и

$$\|u\|_{\infty, Q} \leq C(n)d^{\frac{n}{n+1}} \left(1 + \frac{1}{d} \|\nu_1\|_{n+1, Q}^{n+1}\right) \|\nu_2\|_{n+1, Q}, \quad (3)$$

где $d = \text{diam } \Omega$.

Доказательство. Обозначим $Q^+ = \{(x, t) \in Q : u(x, t) > 0\}$ как подмножество Q , где решение u положительно. Чтобы применить принцип максимума [21, 22], нам необходимо линеаризовать оператор $\mathcal{P}$. Разделив обе части уравнения на $\lambda(|u|)$ и применив условия 2 и 6, мы получаем

$$\frac{u_t}{\lambda(|u|)} - \frac{a^{ij}(x, t, u)D_{ij}u}{\lambda(|u|)} \leq |Du|\nu_1(x, t) + \nu_2(x, t) \leq \nu_1(x, t)\text{sign } D_i u \cdot D_i u + \nu_2(x, t),$$

где мы использовали тот факт, что $|Du| \leq \sum_{i=1}^n |D_i u| = \sum_{i=1}^n \text{sign } D_i u \cdot D_i u$.

Рассмотрим теперь линейный оператор:

$$\overline{\mathcal{P}}u := \sigma u_t - \overline{a}^{ij}(x, t)D_{ij}u - \overline{b}^i(x, t)D_i u \leq \nu_2(x, t),$$

где $\sigma = 1/\lambda(|u|)$, $\overline{a}^{ij} = a^{ij}(x, t, u)/\lambda(|u|)$ и $\overline{b}^i = \nu_1 \cdot \text{sign } D_i u \in L^{n+1}(Q)$. Этот оператор строго параболический. Обозначив $\overline{\mathcal{A}} = \{\overline{a}^{ij}\}$, имеем $\det \overline{\mathcal{A}} \geq 1$, откуда следует $\text{Tr } \overline{\mathcal{A}} + \sigma > 0$. Прямое применение принципа максимума [21] дает

$$\sup_{Q^+} \leq C(n)d^{\frac{n}{n+1}} \left(1 + \frac{1}{d} \|\nu_1\|_{n+1, Q^+}^{n+1}\right) \|\nu_2\|_{n+1, Q^+}.$$

Рассматривая подмножество точек $Q^- \subset Q$, в которых $u(x, t) < 0$, мы можем аналогичным образом оценить $\sup_{Q^-}(-u)$. Объединив обе оценки, получим (3). $\square$

Внутреннее и граничное неравенства Харнака (ср. [23, 24]) влекут гёльдеровскую непрерывность решения (1) и дают для гёльдеровской нормы априорную оценку. Эта оценка позволяет контролировать для u модуль непрерывности $\omega(r)$ в Q , т. е.

$$|\omega(r)| \leq Cr^\alpha, \quad (4)$$

где константы C и α зависят от известных величин, но не от u .

Предположение 3 допускает разрывы коэффициентов a^{ij} по x и t . Чтобы описать разрывы композиции $a^{ij}(\cdot, \cdot, u(\cdot, \cdot))$, нам нужно оценить ее VMO_x -модуль непрерывности. Для этой цели мы используем идеи, развитые в [18] (см. также [9, 19]).

Лемма 2. Пусть выполнены условия 1, 3, 4 и пусть $u \in C^0(\overline{Q})$. Тогда

$$a^{ij}(x, t, u(x, t)) \in VMO_x \cap L^\infty(Q),$$

причем VMO_x -модуль непрерывности $\eta(r)$ ограничен величиной, определяемой $\|u\|_{\infty, Q}$, и модулем непрерывности $\omega(r)$ для u .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(x_0, t_0) \in Q$. Обозначим $M_u = \|u\|_{\infty, Q}$. По условию 3 имеем

$$\begin{aligned} J^{ij} &:= \int_{Q_r(x_0, t_0)} \int_{\Omega_r(x_0)} |a^{ij}(y, t, u(y, t)) - a^{ij}(z, t, u(z, t))| dz dy dt \leq \\ &\leq \int_{Q_r(x_0, t_0)} \int_{\Omega_r(x_0)} |a^{ij}(y, t, u(y, t)) - a^{ij}(y, t, u(x_0, t))| + \\ &+ |a^{ij}(y, t, u(x_0, t)) - a^{ij}(z, t, u(x_0, t))| + \\ &+ |a^{ij}(z, t, u(z, t)) - a^{ij}(z, t, u(x_0, t))| dz dy dt := J_1 + J_2 + J_3, \end{aligned}$$

после прибавления и вычитания подходящих членов. Заметим, что J_1 не зависит от z , и из (4), используя также условие 4, получим

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{Q_r(x_0, t_0)} |a^{ij}(y, t, u(x, t)) - a^{ij}(y, t, u(x_0, t))| dy dt \leq \\ &\leq \int_{Q_r(x_0, t_0)} \mu_M(|u(y, t) - u(x_0, t)|) dy dt \leq \mu_M(\omega(r)). \end{aligned}$$

Аналогично J_3 не зависит от y , и мы можем оценить его так же, как и J_1 , т.е. $J_3 \leq \mu_M(\omega(r))$, в то время как J_2 можно оценить с помощью условия 3, получая $J_2 \leq a_R^{ij\#(x)}$. Объединив все эти оценки, имеем

$$\eta(R) = \max_{1 \leq i, j \leq n} \sup_{|u| \leq M_u} \sup_{(x_0, t_0) \in Q_r} \sup_{r \leq R} J^{ij} \leq \mu_M(\omega(R)) + a_R^{ij\#(x)},$$

где правая часть стремится к 0 при $R \rightarrow 0$. □

Следующая важная априорная оценка позволяет определить пространство, в котором мы можем применить теорему Лере — Шаудера о неподвижной точке (см. [9, 18, 19] и ссылки в них).

Лемма 3. *Предположим, что выполнены условия 1–6. Тогда существует константа C , не зависящая от u , такая, что*

$$\|Du\|_{2(n+1), Q} \leq C \tag{5}$$

для любого решения $u \in W_{n+1}^{2,1}(Q) \cap C(\overline{Q})$ задачи (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя условие 5 и леммы 1 и 2, преобразуем уравнение $\mathcal{P}u = f$ к виду

$$u_t - A^{ij}(x, t) D_{ij} u + B(x, t) |Du|^2 + f_1(x, t) u = G(x, t),$$

где

$$\begin{aligned}
 A^{ij}(x, t) &= a^{ij}(x, t, u(x, t)), \quad A^{ij} \in VMO_x \cap L^\infty(Q), \\
 B(x, t) &= -\frac{f(x, t, u, Du)}{f_1(x, t) + |Du|^2}, \quad \|B\|_{\infty, Q} \leq \nu(M_u) < \infty, \\
 G(x, t) &= f_1(x, t)u + \frac{f(x, t, u, Du)}{f_1(x, t) + |Du|^2} f_1(x, t), \\
 \|G\|_{n+1, Q} &\leq \|f_1\|_{n+1, Q}(M_u + \nu(M_u)).
 \end{aligned} \tag{6}$$

Зафиксировав $u \in W_{n+1}^{2,1}(Q) \cap C(\overline{Q})$ в (6), можно рассмотреть однопараметрическое семейство задач:

$$\begin{cases} D_t v_\sigma - A^{ij}(x, t) D_{ij} v_\sigma + B(x, t) |Dv_\sigma|^2 + \\ \quad + f_1(x, t) v_\sigma = \sigma G(x, t) & \text{п. в. в } Q, \\ v_\sigma(x, t) = 0 & \text{на } \partial_p Q \end{cases} \quad (\mathcal{F}_\sigma)$$

с $\sigma \in [0, 1]$. Предположим, что существует решение $v_\sigma \in W_{n+1}^{2,1}(Q) \cap C(\overline{Q})$ задачи $(\mathcal{F}_\sigma)$, и формально запишем $v_\sigma = \mathcal{F}(\sigma)$, чтобы это обозначить.

Тогда естественным образом возникает вопрос о единственности этого решения для любого $\sigma \in [0, 1]$.

Предложение 1. Пусть $0 \leq \sigma_1 < \sigma_2 \leq 1$, $v_1 = \mathcal{F}(\sigma_1)$, u $v_2 = \mathcal{F}(\sigma_2)$. Далее

$$\|v_2 - v_1\|_{\infty, Q} \leq (\sigma_2 - \sigma_1)(M_u + \nu(M_u)). \tag{7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $w = v_2 - v_1 = \mathcal{F}(\sigma_2) - \mathcal{F}(\sigma_1)$, т. е.

$$\begin{cases} w_t - A^{ij}(x, t) D_{ij} w + B(x, t) (|Dv_2|^2 - |Dv_1|^2) + \\ \quad + f_1(x, t) w = (\sigma_2 - \sigma_1) G(x, t) & \text{п. в. в } Q, \\ w(x, t) = 0 & \text{на } \partial_p Q. \end{cases}$$

Теперь линеаризуем уравнение, преобразуя нелинейный член следующим образом:

$$B(x, t) (|Dv_2|^2 - |Dv_1|^2) = B(x, t) \sum_{i=1}^n (D_i v_2 + D_i v_1) D_i w =: B^i(x, t) D_i w, \tag{8}$$

где $B^i(x, t) = B(x, t) D_i (v_2 + v_1) \in L^{n+1}(Q)$. Далее рассмотрим линейную задачу:

$$\begin{cases} \mathcal{P}_1 w := w_t - A^{ij}(x, t) D_{ij} w + B^i(x, t) D_i w + \\ \quad + f_1(x, t) w = (\sigma_2 - \sigma_1) G(x, t) & \text{п. в. в } Q, \\ w(x, t) = 0 & \text{на } \partial_p Q. \end{cases}$$

Используя (6), мы делаем вывод, что

$$G(x, t) \leq f_1(x, t) (M_u + \nu(M_u)).$$

Полагая $M = (\sigma_2 - \sigma_1)(M_u + \nu(M_u))$, сразу получаем, что

$$\begin{cases} \mathcal{P}_1(w - M) \leq 0 & \text{п. в. в } Q, \\ w - M \leq 0 & \text{на } \partial_p Q \end{cases} \quad (9)$$

и, следовательно, принцип максимума (ср. [21]) дает $w \leq M$ почти везде в Q .

Полагая теперь $\bar{w} = v_1 - v_2 = \mathcal{F}(\sigma_1) - \mathcal{F}(\sigma_2)$ и повторив приведенные выше рассуждения, получим

$$\begin{cases} \mathcal{P}_1 \bar{w} = -(\sigma_2 - \sigma_1)G(x, t) \leq (\sigma_2 - \sigma_1)f_1(M_u + \nu(M_u)) = \mathcal{P}_1 M, \\ \bar{w} - M \leq 0 & \text{на } \partial_p Q, \end{cases}$$

и из принципа максимума следует $\bar{w} \leq M$ почти везде в Q , что дает (7). $\square$

Непосредственным следствием предложения 1 является единственность решения $(\mathcal{F}_\sigma)$ при условии, что оно существует. Действительно, подставив $\sigma_1 = \sigma_2$ в (7), мы сразу получим $v_1 = v_2$. Более того, неравенство (7) дает оценку нормы $\|v_\sigma\|_{\infty, Q}$ любого решения задачи $(\mathcal{F}_\sigma)$. Действительно, полагая $\sigma_1 = 0$ в (7), сразу получаем

$$\|v_\sigma\|_{\infty, Q} \leq M_u + \nu(M_u) \quad \forall \sigma \in (0, 1]. \quad (10)$$

Также можно заметить, что $v_0 = \mathcal{F}(0) = 0$ и $v_1 = \mathcal{F}(1) = u$.

Наша цель теперь — оценить норму градиента решения $(\mathcal{F}_\sigma)$ при условии, что оно существует.

Рассмотрим снова два решения $v_1 = \mathcal{F}(\sigma_1)$ и $v_2 = \mathcal{F}(\sigma_2)$ задачи $(\mathcal{F}_\sigma)$ такие, что $0 \leq \sigma_1 < \sigma_2 \leq 1$. Их разность $w = v_2 - v_1$ дает решение линейной задачи

$$\begin{cases} w_t - A^{ij}(x, t)D_{ij}w + f_1(x, t)w = F(x, t) & \text{п. в. в } Q, \\ w(x, 0) = 0 & \text{на } \partial_p Q, \end{cases} \quad (11)$$

где

$$F(x, t) = (\sigma_2 - \sigma_1)G(x, t) - B(x, t)(|Dv_2|^2 - |Dv_1|^2),$$

причем

$$\|F\|_{n+1, Q} \leq (\sigma_2 - \sigma_1)\|G\|_{n+1, Q} + \|B\|_{\infty, Q}(\|Dw\|_{2(n+1), Q}^2 + 2\|Dv_1\|_{2(n+1), Q}^2).$$

Выбирая $\sigma_2 - \sigma_1 = \tau$ достаточно малым и используя (6) и (7), получаем

$$\begin{aligned} \|F\|_{n+1, Q} &\leq \tau\|f_1\|_{n+1, Q}(M_u + \nu(M_u)) + \nu(M_u)(\|Dw\|_{2(n+1), Q}^2 + 2\|Dv_1\|_{2(n+1), Q}^2) \leq \\ &\leq C_1(1 + \|Dw\|_{2(n+1), Q}^2 + 2\|Dv_1\|_{2(n+1), Q}^2), \end{aligned}$$

где $C_1 := \max\{\tau\|f_1\|_{n+1, Q}(M_u + \nu(M_u)), \nu(M_u)\}$. Как уже было показано, коэффициенты $A^{ij}(x, t)$ принадлежат $VMO_x \cap L^\infty(Q)$, и поэтому задача (11) имеет единственное решение, удовлетворяющее априорной оценке

$$\|w\|_{W_{n+1}^{2,1}(Q)} \leq C\|F\|_{n+1, Q} \leq C_2(1 + \|Dw\|_{2(n+1), Q}^2 + 2\|Dv_1\|_{2(n+1), Q}^2)$$

с константой C_2 , зависящей от данных задачи, но не от решения. Чтобы оценить норму градиента, мы используем неравенство Солонникова, которое представляет собой анизотропную версию интерполяционного неравенства Гальярдо — Ниренберга (ср. [25, 26]) для параболического случая, и получаем

$$\begin{aligned}\|Dw\|_{2(n+1),Q}^2 &\leq C\|w\|_{\infty,Q}\|D^2w\|_{n+1,Q} \leq C\tau(M_u + \nu(M_u))\|D^2w\|_{n+1,Q} \leq \\ &\leq C_2\tau\|w\|_{W_{n+1}^{2,1}(Q)} \leq C_3\tau(1 + \|Dw\|_{2(n+1),Q}^2 + \|Dv_1\|_{2(n+1),Q}^2)\end{aligned}$$

с константой C_3 , зависящей от известных величин.

Уменьшив, если необходимо, τ так, чтобы $C_3\tau < 1$, получаем

$$\|Dw\|_{2(n+1),Q}^2 \leq C_4(1 + \|Dv_1\|_{2(n+1),Q}^2).$$

Поскольку $v_2 = w + v_1$, приходим к выводу, что

$$\|Dv_2\|_{2(n+1),Q}^2 \leq \|Dw\|_{2(n+1),Q}^2 + \|Dv_1\|_{2(n+1),Q}^2 \leq C_5(1 + \|Dv_1\|_{2(n+1),Q}^2). \quad (12)$$

Взяв $\sigma_1 = 0$ и $\sigma_2 = \tau$, т. е. $v_1 = 0$ и $v_2 = v_\tau$, получим априорную оценку

$$\|Dv_\tau\|_{2(n+1),Q}^2 \leq C_5. \quad (13)$$

Чтобы доказать разрешимость $(\mathcal{F}_\sigma)$ при $\sigma = \tau$, рассмотрим оператор

$$\mathfrak{F} : \mathcal{S}(Q) \longrightarrow W_{n+1}^{2,1}(Q) \cap C(\overline{Q}),$$

который сопоставляет любой функции $z \in \mathcal{S}(Q) = \{z \in C^0(\overline{Q}) : Dz \in L^{2(n+1)}(Q)\}$ единственное решение $v \in W_{n+1}^{2,1}(Q) \cap C(\overline{Q})$ линейной задачи

$$\begin{cases} v_t - A^{ij}(x, t)D_{ij}v = \tau G(x, t) - B(x, t)|Dz|^2 - f_1(x, t)z & \text{п. в. в } Q, \\ v(x, t) = 0 & \text{на } \partial_p Q, \end{cases} \quad (\mathfrak{F})$$

и введем обозначение $\mathfrak{F}(z) = v$ для этого решения. Существование последнего следует из (6) и [13].

Из теоремы вложения Соболева следует компактность вложения пространства $W_{n+1}^{2,1}(Q) \cap C(\overline{Q})$ в $\mathcal{S}(Q)$, что дает компактность оператора $\mathfrak{F}$, рассматриваемого как отображение банахова пространства $\mathcal{S}(Q)$ в себя. Рассмотрим теперь однопараметрическое семейство задач $\mathfrak{F}_\rho : \mathcal{S}(Q) \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}(Q)$:

$$\begin{cases} v_t - A^{ij}(x, t)D_{ij}v = \\ = \rho(\tau G(x, t) - B(x, t)|Dv|^2 - f_1(x, t)v) & \text{п. в. в } Q, \\ v(x, t) = 0 & \text{на } \partial_p Q. \end{cases} \quad (\mathfrak{F}_\rho)$$

Если мы сможем показать, что для любого $\rho \in [0, 1]$ норму решения уравнения $\mathfrak{F}_\rho(v) = v$ можно оценить через константу, не зависящую от ρ , то сможем применить теорему Лере — Шаудера, которая гарантирует существование неподвижной точки $\mathfrak{F}_1(v) = v$, которая в точности является решением $(\mathcal{F}_\sigma)$ с $\sigma = \tau$.

Фактически искомая оценка следует из (10) и (13), т. е. $\|v\|_{\mathcal{S}(Q)} \leq C$ с константой, не зависящей от v и $\rho \in [0, 1]$.

Чтобы завершить доказательство леммы 3, покроем интервал $[0, 1]$ конечным числом подынтервалов, каждый из которых имеет длину $\delta \leq \tau$. Затем, повторяя описанную выше процедуру и используя (12), мы оцениваем $\|Dv_{k+1}\|_{2(n+1),Q}$ через $\|Dv_k\|_{2(n+1),Q}$ для $k = 0, 1, \dots, m-1$, где $m\delta = 1$. Поскольку $(\mathcal{F}_\sigma)$ с $\sigma = 1$ совпадает с исходной задачей (1), учитывая уже доказанную единственность решения $(\mathcal{F}_\sigma)$, получаем искомую оценку (5). $\square$

4. Основные результаты.

Теорема 1 (Существование). Чтобы доказать существование задачи (1), мы еще раз воспользуемся теоремой Лере — Шаудера. Подставляя произвольную функцию $v \in \mathcal{S}(Q)$ в $a^{ij}(x, t, v)$ и $f(x, t, v, Dv)$, мы линеаризуем задачу (1) и получаем

$$\begin{cases} D_t u - a^{ij}(x, t, v) D_{ij} u = f(x, t, v, Dv) & \text{п. в. в } Q, \\ u(x, t) = 0 & \text{на } \partial_p Q. \end{cases} \quad (\mathfrak{F}_2)$$

Тогда мы имеем линейное строго параболическое уравнение с ограниченными старшими коэффициентами из VMO_x и правой частью, принадлежащей $L^{n+1}(Q)$. Следовательно, согласно [13] существует единственное сильное решение $u \in W_{n+1}^{2,1}(Q) \cap C(\overline{Q})$, которое мы обозначаем как $u = \mathfrak{F}_2(v)$.

Компактность $\mathfrak{F}_2$, действующего из $\mathcal{S}(Q)$ в себя, доказывается тем же образом, как и компактность $\mathfrak{F}$ выше.

Для доказательства непрерывности $\mathfrak{F}_2$ рассмотрим последовательность $\{v_h\}_{h=1}^\infty \in \mathcal{S}(Q)$ такую, что $\|v_h - v\|_{\mathcal{S}(Q)} \rightarrow 0$, и положим $u_h = \mathfrak{F}_2(v_h)$. Далее рассмотрим разность $u_h - u$, которая является решением задачи

$$\begin{cases} D_t(u_h - u) - a^{ij}(x, t, v_h) D_{ij}(u_h - u) = \\ \quad = (a^{ij}(x, t, v_h) - a^{ij}(x, t, v)) D_{ij} u + \\ \quad + f(x, t, v_h, Dv_h) - f(x, t, v, Dv) & \text{п. в. в } Q, \\ u_h(x, t) - u(x, t) = 0 & \text{на } \partial_p Q. \end{cases}$$

Теперь [13, теорема 2.1] дают априорную оценку решения

$$\begin{aligned} \|u_h - u\|_{W_{n+1}^{2,1}(Q)} &\leq C \left[\|(a^{ij}(\cdot, v_h) - a^{ij}(\cdot, v)) D_{ij} u\|_{n+1, Q} + \right. \\ &\quad \left. + \|f(\cdot, v_h, Dv_h) - f(\cdot, v, Dv)\|_{n+1, Q} \right] \leq \\ &\leq \left[\|\mu(|v_h - v|) D_{ij} u\|_{n+1, Q} + \|f(\cdot, v_h, Dv_h) - f(\cdot, v, Dv)\|_{n+1, Q} \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Условие 4 обеспечивает сходимость первого слагаемого, а условие 5 обеспечивает непрерывность оператора Немыцкого:

$$\mathcal{S}(Q) \ni v \mapsto f(x, t, v, Dv) \in L^{n+1}(Q).$$

Следовательно, правая часть в (14) стремится к нулю при $h \rightarrow \infty$, что обеспечивает непрерывность $\mathfrak{F}_2$. Наконец, из оценок (3) и (5) следует $\|u\|_{\mathcal{S}(Q)} \leq C$ с константой, не зависящей от u и $\rho \in [0, 1]$. Этим обеспечивается существование неподвижной

точки $u \in \mathcal{S}(Q)$ оператора $\mathfrak{F}_2$, принадлежащей $W_{n+1}^{2,1}(Q) \cap C(\overline{Q})$ по определению $\mathfrak{F}_2$, а это означает существование решения задачи (1). $\square$

Теорема 2 (Единственность). Мы рассуждаем от противного. Предположим, что $u, v \in W_{n+1}^{2,1}(Q) \cap C(\overline{Q})$ являются двумя решениями задачи (1), тогда

$$\begin{cases} D_t(u-v) - a^{ij}(x,t)D_{ij}(u-v) = f(x,t,u,Du) - f(x,t,v,Dv) & \text{п. в. в } Q, \\ u-v=0 & \text{на } \partial_p Q. \end{cases}$$

Пусть $Q^+ = \{(x,t) \in Q : u(x,t) > v(x,t)\}$. Так как $f(x,t,z,p)$ не возрастает по z , имеем $f(x,t,u,Du) - f(x,t,v,Du) \leq 0$ для почти всех $(x,t) \in Q^+$. Далее, используя условие (2) и обозначая $M_v = \|v\|_{\infty,Q}$, можно переписать приведенное выше уравнение следующим образом:

$$\begin{aligned} D_t(u-v) - a^{ij}(x,t)D_{ij}(u-v) &= \\ &= f(x,t,u,Du) - f(x,t,v,Du) + f(x,t,v,Du) - f(x,t,v,Dv) \leq \\ &\leq \sup_{|v| \leq M_v} f_2(x,t,v)|Du - Dv| = \sup_{|v| \leq M_v} f_2(x,t,v) \sum_{i=1}^n (\text{sign } D_i(u-v))D_i(u-v). \end{aligned}$$

Поэтому, положив $b^i = -\sup_{|v| \leq M_v} f_2(x,t,v) \cdot \text{sign } D_i(u-v)$, приходим к задаче

$$\begin{cases} D_t(u-v) - a^{ij}(x,t)D_{ij}(u-v) + b^i D_i(u-v) \leq 0 & \text{п. в. в } Q, \\ u-v=0 & \text{на } \partial_p Q. \end{cases}$$

Принцип максимума дает $\max_{Q^+}(u-v) \leq 0$. Аналогично, рассмотрев множество $Q^- = \{(x,t) \in Q : v > u\}$, получим $\max_{Q^-}(v-u) \leq 0$, что дает $u = v$ в Q и, следовательно, утверждение теоремы 2. $\square$

Благодарность. Автор признателен рецензенту за многогранный отзыв, способствующий улучшению статьи. Автор является членом INDAM-GNAMPA.

Литература/References

1. Gilbarg D., Trudinger N.S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. 2nd ed. Berlin, Springer (1983).
2. Ladyženskaja O. A., Solonnikov V. A., Ural'tseva N. N. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. *Amer. Math. Soc.* **23** (1968).
3. Ladyženskaja O. A., Ural'tseva N. N. *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*. New York; London, Academic Press. (1968).
4. Chiarenza F., Frasca M., Longo P. $W^{2,p}$ solvability of the Dirichlet problem for nondivergence form elliptic equations with VMO coefficients. *Trans. Amer. Math. Soc.* **336**, 841–853 (1993).
5. Alfano E. A., Fattorusso L., Softova L. Boundedness of the solutions of a kind of nonlinear parabolic systems. *J. Differ. Equ.* **360**, 51–66 (2023).
6. Apushkinskaya D. E., Nazarov A. I., Palagachev D. K., Softova L. G. Venttsel boundary value problems with discontinuous data. *SIAM J. Math. Anal.* **53**, 221–252 (2021).
7. Byun S.-S., Palagachev D. K., Softova L. G. Survey on gradient estimates for nonlinear elliptic equations in various function spaces. *St. Petersburg. Math. J.* **31** (3), 401–419 (2020) *Algebra Anal.* **31** (3), 10–35 (2019).
8. Krylov N. V. Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Sobolev Spaces. *Amer. Math. Soc. Grad. Stud. Math.* **96** (2008).
9. Maugeri A., Palagachev D. K., Softova L. G. Elliptic and Parabolic Equations with Discontinuous Coefficients. *Mathematical Research* **109**. Wiley-VCH Verlag, Berlin, GmbH (2000).

10. Byun S.-S., Softova L. G. Asymptotically regular operators in generalized Morrey spaces. *Bull. Lond. Math. Soc.* **52** (1), 64–76 (2020).
11. Palagachev D. K., Recke L., Softova L. G. Applications of the differential calculus to nonlinear elliptic operators with discontinuous coefficients. *Math. Ann.* **336** (3), 617–637 (2006).
12. Recke L., Softova L. G. Nonlinear parabolic operators with perturbed coefficients. *Comm. Math. Appl.* **9** (3), 277–292 (2018).
13. Krylov N. V. Parabolic and elliptic equations with VMO coefficients. *Commun. Partial Differ. Equations* **32** (3), 453–475 (2007).
14. Apushkinskaya D. E., Nazarov A. I., Palagachev D. K., Softova L. G. Nonstationary Venttsel problems with discontinuous data. *J. Differ. Equ.* **375**, 538–566 (2023).
15. Apushkinskaya D. E., Nazarov A. I., Palagachev D. K., Softova L. G. Nonstationary Venttsel problem with VMO_x leading coefficients. *Dokl. Math.* **107** (2), 97–100 (2023); *Transl. Dokl. Ross. akad. nauk. Mat. inform. protsessy upr.* **510**, 13–17 (2023).
16. Dong H., Kim D. On the L_p -solvability of higher order parabolic and elliptic systems with BMO coefficients. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **199**, 889–941 (2011).
17. Kim D., Krylov N. V. Parabolic equations with measurable coefficients. *Potential Anal.* **26** (4), 345–361 (2007).
18. Palagachev D. K. Quasilinear elliptic equations with VMO coefficients. *Trans. Amer. Math. Soc.* **347**, 2481–2493 (1995).
19. Softova G. L. Quasilinear parabolic operators with discontinuous ingredients. *Nonlin. anal., theory meth. appl. Ser. A* **52**, 1079–1093 (2003).
20. Krylov N. V. On the maximum principle for nonlinear parabolic and elliptic equations. *Mathem. of the USSR-Izvestiya* **13** (2), 335–347 (1979).
21. Nazarov A. I., Ural'tseva N. N. Convex monotone hulls and estimation of the maximum of a solution of a parabolic equation. *Soviet Math.* **37**, 851–859 (1987).
22. Tso K. On an Aleksandrov-Bakel'man type maximum principle for second-order parabolic equations. *Commun. Partial Differ. Equ.* **10**, 543–553 (1985).
23. Krylov N. V., Safonov M. V. A property of the solutions of parabolic equations with measurable coefficients. *Math. USSR-Izvestiya* **16** (1), 151–164 (1981).
24. Ladyženskaja O. A., Ural'tseva N. N. A survey of results on the solubility of boundary-value problems for second-order uniformly elliptic and parabolic quasi-linear equations having unbounded singularities. *Russian Math. Surveys* **41** (5), 1–31 (1986).
25. Nirenberg L. On elliptic partial differential equations. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **13** (3), 115–162 (1959).
26. Solonnikov V. A. Inequalities for functions of the classes $W_p^{\vec{m}}(\mathbb{R}^n)$. *J. Sov. Math.* **3**, 549–564 (1975).

Статья поступила в редакцию 6 октября 2023 г.;
доработана 26 августа 2024 г.;
рекомендована к печати 29 августа 2024 г.

Контактная информация:

Рескинью Розамария — аспирант; <https://orcid.org/0009-0004-1706-9052>, rorescigno@unisa.it

Quasilinear Cauchy — Dirichlet problem for parabolic equations with VMO_x coefficients

R. Rescigno

University of Salerno, 132, Via Giovanni Paolo II, Fisciano, 84084 (SA), Italy

For citation: Rescigno R. Quasilinear Cauchy — Dirichlet problem for parabolic equations with VMO_x coefficients. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2025, vol. 12 (70), issue 1, pp. 117–128. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2025.109> (In Russian)

We study the strong solvability of the Cauchy — Dirichlet problem for parabolic quasilinear equations with discontinuous data. The principal coefficients depend on the point (x, t) and

on the solution u , the dependence on x is of VMO type while these are only measurable with respect to t . Assuming suitable structural conditions on the nonlinear terms, we prove existence and uniqueness of the strong solution, which turns out to be also Hölder continuous.

Keywords: quasilinear parabolic equations, Cauchy — Dirichlet problem, VMO_x coefficients, fixed point theorem, strong solutions.

Received: October 6, 2023

Revised: August 26, 2024

Accepted: August 29, 2024

Author's information:

Rosamaria Rescigno — <https://orcid.org/0009-0004-1706-9052>, rorescigno@unisa.it