Новые дробные интегральные неравенства Эрмита — Адамара для s -геометрии. Выпуклые функции

Х. Талеби, А. Неамати

Мазандаранский университет,
Иран, Бабольсер

Для цитирования: Талеби Х., Неамати А. Новые дробные интегральные неравенства Эрмита — Адамара для s -геометрии. Выпуклые функции // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2025. Т. 12 (70). Вып. 1. С. 129–143. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2025.110>

В статье обсуждаются некоторые типы дробного интегрального неравенства Эрмита — Адамара (Н-Н) с дробным интегралом Римана — Лиувилля для функций, у которых абсолютные значения первых производных положительных действительных степеней (AVFDPRP) являются s -геометрически выпуклыми. Это включает и функции с геометрически выпуклыми AVFDPRP. В качестве примера, с использованием специального среднего значения действительных чисел, неравенства Н-Н с обыкновенным интегралом были обобщены для функций, у которых AVFDPRP геометрически выпуклые или s -геометрически выпуклые. На следующем этапе эти неравенства могут быть проверены для других дробных интегральных операторов и других типов дробных интегральных неравенств. Формулы, полученные в статье, будут полезны при теоретическом исследовании других моделей дробного исчисления.

Ключевые слова: дробный интеграл, неравенство Эрмита — Адамара, s -геометрически выпуклая функция.

1. Введение. Прежде всего напомним основные определения выпуклого анализа. Множество $\chi \subseteq \mathbb{R}$ называется выпуклым, если

$$\eta u + (1 - \eta)v \in \chi$$

для любых $u, v \in \chi$ и $\eta \in [0, 1]$. Аналогично выпуклому множеству функция $f : \chi \rightarrow \mathbb{R}$ является выпуклой, если выполнено неравенство

$$f(\eta u + (1 - \eta)v) \leq \eta f(u) + (1 - \eta)f(v), \quad \eta \in [0, 1], \quad (1)$$

справедливое для всех $u, v \in \chi$. Если функция f выпукла, то мы говорим, что f вогнута.

Одним из захватывающих и перспективных методов анализа больших и важных проблем, возникающих в различных областях чистых и прикладных наук, является теория выпуклости. Фактически выпуклые отображения можно считать одними из основных и важных отображений в задачах о математических неравенствах из-за их широкого использования в статистике, чистой и прикладной математике, экономике и механике. Вышеупомянутая теория также считается важной частью развития

идеи о неравенствах. Неравенства являются привлекательной математической моделью благодаря их важным приложениям в классическом и дробном анализе [1], фрактальных множествах [2], квантовых вычислениях [3], теории вероятностей [4], интервальных вычислениях [5], вычислениях в реальном времени [6] и т. д.

Теория выпуклости и прикладные задачи, благодаря характеристикам и свойствам выпуклости, сыграли очень важную роль при рассмотрении дробных интегральных неравенств. Тесная связь между теорией выпуклости и теорией симметрии проявляется в том, что результаты любой из них переносятся на другую теорию.

В литературных источниках приведено много известных интегральных неравенств для выпуклых функций (1), например неравенства типа Олсена [7], Симпсона [8], Х-Х. Фейера [9], Островского [10], Розановой [11], Харди [12], Опиала [13] и Галлярдо — Ниренберга [14]. Однако интегральное неравенство Н-Н является одним из наиболее распространенных типов интегральных неравенств. Соответственно, для классических и дробных интегральных неравенств типа Н-Н [1, 15]:

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{1}{v-u} \int_u^v f(x)dx \leq \frac{f(u)+f(v)}{2} \quad (2)$$

и

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\ell+1)}{2(v-u)^\ell} [I_{u+}^\ell f(v) + I_{v-}^\ell f(u)] \leq \frac{f(u)+f(v)}{2}, \quad (3)$$

где $f: \chi \rightarrow \mathbb{R}$ — положительная выпуклая функция на χ , $f \in L^1(u, v)$ с $u < v$, I_{u+}^ℓ и I_{v-}^ℓ обозначают левосторонние и правосторонние дробные интегралы Римана — Лиувилля порядка $\ell > 0$ соответственно и определяются, согласно [16], следующим образом

$$I_{u+}^\ell f(x) = \frac{1}{\Gamma(\ell)} \int_u^x (x-\varepsilon)^{\ell-1} f(\varepsilon) d\varepsilon, \quad x > u, \quad (4)$$

$$I_{v-}^\ell f(x) = \frac{1}{\Gamma(\ell)} \int_x^v (\varepsilon-x)^{\ell-1} f(\varepsilon) d\varepsilon, \quad x < v. \quad (5)$$

Неравенство Н-Н (2) было получено для различных типов выпуклых функций, включая МТ-выпуклую функцию [17], (α, m) -выпуклые функции [18], s -геометрически выпуклую функцию [19], GA-выпуклую функцию [20], гармонические выпуклые функции [21], функцию с s -выпуклыми первыми производными, [22], выпуклую функция s -типа [23], функцию с экспоненциальной выпуклостью [24], n -полиномиальную выпуклую функцию [25], n -полиномиальную гармонически выпуклую функцию s -типа [26].

Кроме того, исследователи уточнили неравенство типа Н-Н (3) для многих выпуклых функций, включая (α, m) -выпуклую функцию [27], МТ-выпуклую функцию [28], λ_ψ -выпуклую функцию [29] и F-выпуклую функцию [30], новую категорию выпуклых функций [31] и многие другие типы, упомянутые в соответствующей литературе.

Дробные интегральные неравенства можно считать результатом развития традиционных неравенств. Поскольку неравенство Н-Н является геометрическим способом демонстрации выпуклости функции, многие математики изучали это неравенство с помощью различных операторов с дробным интегралом. Сарыкая [1] ввел

неравенства Н-Н для выпуклых функций с использованием дробного интегрального оператора Римана — Лиувилля. Позднее многие исследователи использовали это неравенство для разных выпуклых функций и дробных интегральных операторов, например для весовых дробных операторов [32], ψ -RL-дробных операторов [33], конформных дробных операторов [34], стандартных дробных RL-операторов [35], обобщенных дробных операторов [36] и дробных операторов АВ и Прабхакара [37].

Определение 1 ([19]). *Функция $f : \chi \subset \mathbb{R}_0 = [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_0$ называется s -выпуклой, если*

$$f(\eta u + (1 - \eta)v) \leq \eta^s f(u) + (1 - \eta)^s f(v)$$

для некоторых $s \in (0, 1]$, где $u, v \in \chi$, $u \eta \in [0, 1]$.

Если $s = 1$, то s -выпуклая функция превращается в выпуклую функцию на $\mathbb{R}_0$.

С использованием s -выпуклости неравенство Н-Н обобщалось различными способами. Например, Хан [38] получил неравенство Н-Н для s -выпуклых и s -вогнутых функций с использованием дробных и классических интегралов. Мухамет и др. [39] доказали некоторые неравенства Н-Н с классическим интегралом для функций, абсолютная величина второй производной которых s -выпукла.

Целью данной статьи было ввести понятие « s -геометрически выпуклые функции» и найти некоторые дробные интегральные неравенства типа Н-Н для s -геометрически выпуклых функций.

2. Основной результат. Сначала мы дадим несколько определений и напомним некоторые известные результаты.

Определение 2 ([19]). *Говорят, что функция $f : \chi \subseteq \mathbb{R}_+ = (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ является геометрически выпуклой функцией на χ , если*

$$f(u^t v^{1-t}) \leq [f(u)]^t [f(v)]^{1-t}$$

для всех $u, v \in \chi$ и $t \in [0, 1]$.

Определение 3 ([19]). *Говорят, что функция $f : \chi \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ является s -геометрически выпуклой функцией на χ , если*

$$f(u^t v^{1-t}) \leq [f(u)]^{t^s} [f(v)]^{(1-t)^s}$$

для некоторого $s \in (0, 1]$, где $u, v \in \chi$ и $t \in [0, 1]$.

Если $s = 1$, s -геометрически выпуклая функция становится геометрически выпуклой функцией на χ .

Лемма 1 ([40]). *Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция на (a, b) при $a < b$. Если $f' \in L^1[a, b]$, то для любого $x \in [a, b]$ и $\alpha > 0$,*

$$\begin{aligned} & \left(\frac{(x-a)^\alpha + (b-x)^\alpha}{b-a} \right) f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a} [I_{x-}^\alpha f(a) + I_{x+}^\alpha f(b)] = \\ & = \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 t^\alpha f'(tx + (1-t)a) dt - \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 t^\alpha f'(tx + (1-t)b) dt. \end{aligned}$$

Основные результаты перечислены ниже.

Теорема 1. Пусть $f : \chi \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — дифференцируемая функция на (a, b) и $f' \in L^1[a, b]$. Здесь мы определяем три функции следующим образом:

$$\phi(x) = \left| \frac{f'(x)}{f'(a)} \right|^{qs}, \quad \psi(x) = \left| \frac{f'(x)}{f'(b)} \right|^{qs}, \quad H_1(\alpha, u) = \int_0^1 t^\alpha u^t dt.$$

Если $|f'(x)|^q$ является s -геометрически выпуклой и монотонно убывающей на $[a, b]$ с $0 \leq a < b$ и $q \in [1, +\infty)$, тогда для $\alpha > 0$

$$\left| \left(\frac{(x-a)^\alpha + (b-x)^\alpha}{b-a} \right) f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a} [I_{x^-}^\alpha f(a) + I_{x^+}^\alpha f(b)] \right| \leq \left(\frac{1}{\alpha+1} \right)^{1-\frac{1}{q}} G_1(x, \alpha, q, s),$$

где

$$G_1(x, \alpha, q, s) = \begin{cases} \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} |f'(a)|^s H_1(\alpha, \phi(x))^{\frac{1}{q}} + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} |f'(b)|^s H_1(\alpha, \psi(x))^{\frac{1}{q}}, & |f'(a)| < 1, \\ \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} |f'(a)| H_1(\alpha, \phi(x))^{\frac{1}{q}} + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} |f'(b)|^s H_1(\alpha, \psi(x))^{\frac{1}{q}}, & |f'(x)| < 1 < |f'(a)|, \\ \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} |f'(x)|^{1-s} |f'(a)| H_1(\alpha, \phi(x))^{\frac{1}{q}} + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} |f'(x)|^{1-s} |f'(b)| H_1(\alpha, \psi(x))^{\frac{1}{q}}, & 1 < |f'(b)|, \\ \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} |f'(x)|^{1-s} |f'(a)| H_1(\alpha, \phi(x))^{\frac{1}{q}} + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} |f'(x)|^{1-s} |f'(b)|^s H_1(\alpha, \psi(x))^{\frac{1}{q}}, & |f'(b)| < 1 < |f'(x)|. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 1 и неравенства Гёльдера, с учетом того, что $|f'(x)|^q$ s -геометрически выпукла и монотонно убывает на $[a, b]$, имеем

$$\begin{aligned} & \left| \left(\frac{(x-a)^\alpha + (b-x)^\alpha}{b-a} \right) f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a} [I_{x^-}^\alpha f(a) + I_{x^+}^\alpha f(b)] \right| \leq \\ & \leq \left| \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 t^\alpha f'(tx + (1-t)a) dt \right| + \left| \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 t^\alpha f'(tx + (1-t)b) dt \right| \leq \\ & \leq \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 t^\alpha |f'(tx + (1-t)a)| dt + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 t^\alpha |f'(tx + (1-t)b)| dt \leq \\ & \leq \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} \left(\int_0^1 t^\alpha dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 t^\alpha |f'(tx + (1-t)a)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} + \\ & + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \left(\int_0^1 t^\alpha dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 t^\alpha |f'(tx + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} \left(\int_0^1 t^\alpha |f'(tx+(1-t)a)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \left(\int_0^1 t^\alpha |f'(tx+(1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \leq \\
&\leq \left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} \left(\int_0^1 t^\alpha |f'(x^t a^{1-t})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \left(\int_0^1 t^\alpha |f'(x^t b^{1-t})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \leq \\
&\leq \left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} \left(\int_0^1 t^\alpha |f'(x)|^{qt^s} |f'(a)|^{q(1-t)^s} dt \right)^{\frac{1}{q}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \left(\int_0^1 t^\alpha |f'(x)|^{qt^s} |f'(b)|^{q(1-t)^s} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right].
\end{aligned}$$

Замечание 1. Если $0 < \mu \leq 1 \leq \eta$, $0 < t$ и $s < 1$, то $\mu^{t^s} \leq \mu^{ts}$ и $\eta^{t^s} \leq \eta^{ts-s+1}$.

Мы обозначаем

$$I_1 = \int_0^1 t^\alpha |f'(x)|^{qt^s} |f'(a)|^{q(1-t)^s} dt, \quad I_2 = \int_0^1 t^\alpha |f'(x)|^{qt^s} |f'(b)|^{q(1-t)^s} dt$$

и приходим к следующим утверждениям.

(а). Если $|f'(a)| < 1$, то

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \int_0^1 t^\alpha |f'(x)|^{qst} |f'(a)|^{qs(1-t)} dt = & I_2 &\leq \int_0^1 t^\alpha |f'(x)|^{qts} |f'(b)|^{qs(1-t)} dt = \\
&= \int_0^1 t^\alpha |f'(x)|^{qst} |f'(a)|^{-qst} |f'(a)|^{qs} dt = & &= \int_0^1 t^\alpha |f'(x)|^{qts} |f'(b)|^{-qst} |f'(b)|^{qs} dt = \\
&= |f'(a)|^{qs} \int_0^1 t^\alpha \left(\left| \frac{f'(x)}{f'(a)} \right|^{qs} \right)^t dt = & &= |f'(b)|^{qs} \int_0^1 t^\alpha \left(\left| \frac{f'(x)}{f'(b)} \right|^{qs} \right)^t dt = \\
&= |f'(a)|^{qs} \int_0^1 t^\alpha \phi^t(x) dt = & &= |f'(b)|^{qs} \int_0^1 t^\alpha \psi^t(x) dt = \\
&= |f'(a)|^{qs} H_1(\alpha, \phi(x)), & &= |f'(b)|^{qs} H_1(\alpha, \psi(x)).
\end{aligned}$$

(б). Если $|f'(x)| < 1 < |f'(a)|$, то

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \int_0^1 t^\alpha |f'(x)|^{qst} |f'(a)|^{q(s(1-t)+1-s)} dt = & I_2 &\leq \int_0^1 t^\alpha |f'(x)|^{qst} |f'(b)|^{qs(1-t)} dt = \\
&= \int_0^1 t^\alpha |f'(x)|^{qst} |f'(a)|^{q(1-st)} dt = & &= |f'(b)|^{qs} \int_0^1 t^\alpha \left(\left| \frac{f'(x)}{f'(b)} \right|^{qs} \right)^t dt = \\
&= \int_0^1 t^\alpha |f'(x)|^{qst} |f'(a)|^q |f'(a)|^{-qst} dt = & &= |f'(b)|^{qs} \int_0^1 t^\alpha \psi^t(x) dt = \\
&= |f'(a)|^q \int_0^1 t^\alpha \left(\left| \frac{f'(x)}{f'(a)} \right|^{qs} \right)^t dt = & &= |f'(b)|^{qs} H_1(\alpha, \psi(x)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |f'(a)|^q \int_0^1 t^\alpha \phi^t(x) dt = \\
&= |f'(a)|^q H_1(\alpha, \phi(x)).
\end{aligned}$$

(с). Если $1 < |f'(b)|$, то

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \int_0^1 t^\alpha |f'(x)|^{q(st-s+1)} |f'(a)|^{q(s(1-t)+1-s)} dt = \\
&= \int_0^1 t^\alpha |f'(x)|^{qst} |f'(x)|^{q(1-s)} |f'(a)|^q |f'(a)|^{-qst} dt = \\
&= \left(|f'(x)|^{1-s} |f'(a)| \right)^q \int_0^1 t^\alpha \left(\left| \frac{f'(x)}{f'(a)} \right|^{qs} \right)^t dt = \\
&= \left(|f'(x)|^{1-s} |f'(a)| \right)^q \int_0^1 t^\alpha \phi^t(x) dt = \\
&= \left(|f'(x)|^{1-s} |f'(a)| \right)^q H_1(\alpha, \phi(x))
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \int_0^1 t^\alpha |f'(x)|^{q(st-s+1)} |f'(b)|^{q(s(1-t)+1-s)} dt = \\
&= \int_0^1 t^\alpha |f'(x)|^{qst} |f'(x)|^{q(1-s)} |f'(b)|^q |f'(b)|^{-qst} dt = \\
&= \left(|f'(x)|^{1-s} |f'(b)| \right)^q \int_0^1 t^\alpha \left(\left| \frac{f'(x)}{f'(b)} \right|^{qs} \right)^t dt = \\
&= \left(|f'(x)|^{1-s} |f'(b)| \right)^q \int_0^1 t^\alpha \psi^t(x) dt = \\
&= \left(|f'(x)|^{1-s} |f'(b)| \right)^q H_1(\alpha, \psi(x)).
\end{aligned}$$

(d). Если $|f'(b)| < 1 < |f'(x)|$, поступаем так же, как и в случае с):

$$I_1 \leq \int_0^1 t^\alpha |f'(x)|^{q(st-s+1)} |f'(a)|^{q(s(1-t)+1-s)} dt = \left(|f'(x)|^{1-s} |f'(a)| \right)^q H_1(\alpha, \phi(x))$$

и

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \int_0^1 t^\alpha |f'(x)|^{q(st-s+1)} |f'(b)|^{qs(1-t)} dt = |f'(x)|^{q(1-s)} |f'(b)|^{qs} \int_0^1 t^\alpha \left(\left| \frac{f'(x)}{f'(b)} \right|^{qs} \right)^t dt = \\
&= \left(|f'(x)|^{1-s} |f'(b)|^s \right)^q \int_0^1 t^\alpha \psi^t(x) dt = \left(|f'(x)|^{1-s} |f'(b)|^s \right)^q H_1(\alpha, \psi(x)).
\end{aligned}$$

□

Следствие 1. Предположим, что все условия теоремы 1 выполнены, тогда

$$\left| \left(\frac{b-a}{2} \right)^{\alpha-1} f\left(\frac{b+a}{2}\right) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a} \left[I_{\left(\frac{b+a}{2}\right)^-}^\alpha f(a) + I_{\left(\frac{b+a}{2}\right)^+}^\alpha f(b) \right] \right| \leq G_1 \left(\frac{b+a}{2}, \alpha, 1, s \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагаем $x = \frac{a+b}{2}$ и $q = 1$ в теореме 1.

Теорема 2. Пусть $f : \chi \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — дифференцируемая функция на (a, b) и $f' \in L^1[a, b]$. Если $|f'(x)|^q$ является s -геометрически выпуклой и монотонно убывающей на $[a, b]$ при $0 \leq a < b$ и $q \in (1, +\infty)$, тогда

$$\left| \frac{(x-a)^\alpha + (b-x)^\alpha}{b-a} f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a} [I_{x^-}^\alpha f(a) + I_{x^+}^\alpha f(b)] \right| \leq \left(\frac{q-1}{(\alpha+1)q-1} \right)^{1-\frac{1}{q}} G_2(x, \alpha, q, s),$$

где $H_2(u) = H_1(0, u)$ и

$$G_2(x, \alpha, q, s) = \begin{cases} \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} |f'(a)|^s H_2(\phi(x))^{\frac{1}{q}} + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} |f'(b)|^s H_2(\psi(x))^{\frac{1}{q}}, & |f'(a)| < 1, \\ \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} |f'(a)| H_2(\phi(x))^{\frac{1}{q}} + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} |f'(b)|^s H_2(\psi(x))^{\frac{1}{q}}, & |f'(x)| < 1 < |f'(a)|, \\ \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} |f'(x)|^{1-s} |f'(a)| H_2(\phi(x))^{\frac{1}{q}} + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} |f'(x)|^{1-s} |f'(b)| H_2(\psi(x))^{\frac{1}{q}}, & 1 < |f'(b)|, \\ \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} |f'(x)|^{1-s} |f'(a)| H_2(\phi(x))^{\frac{1}{q}} + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} |f'(x)|^{1-s} |f'(b)|^s H_2(\psi(x))^{\frac{1}{q}}, & |f'(b)| < 1 < |f'(x)|. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1 и неравенству Гёльдера для монотонно убывающей и s -геометрически выпуклой функции $|f'|^q$ имеем

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(x-a)^\alpha + (b-x)^\alpha}{b-a} f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a} [I_{x^-}^\alpha f(a) + I_{x^+}^\alpha f(b)] \right| \leq \\ & \leq \left| \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 t^\alpha f'(tx + (1-t)a) dt \right| + \left| \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 t^\alpha f'(tx + (1-t)b) dt \right| \leq \\ & \leq \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 t^\alpha |f'(tx + (1-t)a)| dt + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 t^\alpha |f'(tx + (1-t)b)| dt \leq \\ & \leq \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} \left(\int_0^1 t^{\frac{q\alpha}{q-1}} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |f'(tx + (1-t)a)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} + \\ & + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \left(\int_0^1 t^{\frac{q\alpha}{q-1}} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |f'(tx + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} = \\ & = \left(\frac{q-1}{(\alpha+1)q-1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} \left(\int_0^1 |f'(tx + (1-t)a)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \left(\int_0^1 |f'(tx + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{q-1}{(\alpha+1)q-1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} \left(\int_0^1 |f'(x^t a^{1-t})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \left(\int_0^1 |f'(x^t b^{1-t})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \leq \\
&\leq \left(\frac{q-1}{(\alpha+1)q-1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} \left(\int_0^1 |f'(x)|^{qt^s} |f'(a)|^{q(1-t)^s} dt \right)^{\frac{1}{q}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \left(\int_0^1 |f'(x)|^{qt^s} |f'(b)|^{q(1-t)^s} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right].
\end{aligned}$$

Используя обозначения

$$I_3 = \left(\int_0^1 |f'(x)|^{qt^s} |f'(a)|^{q(1-t)^s} dt \right)^{\frac{1}{q}}, \quad I_4 = \left(\int_0^1 |f'(x)|^{qt^s} |f'(b)|^{q(1-t)^s} dt \right)^{\frac{1}{q}},$$

получаем следующие утверждения.

(а). Если $|f'(a)| < 1$, то

$$I_3 \leq \left(\int_0^1 |f'(x)|^{qst} |f'(a)|^{qs(1-t)} dt \right)^{\frac{1}{q}} = |f'(a)|^s \left(\int_0^1 \phi^t(x) dt \right)^{\frac{1}{q}} = |f'(a)|^s H_2^{\frac{1}{q}}(\phi(x))$$

и

$$I_4 \leq \left(\int_0^1 |f'(x)|^{qst} |f'(b)|^{qs(1-t)} dt \right)^{\frac{1}{q}} = |f'(b)|^s H_2^{\frac{1}{q}}(\psi(x)). \quad (6)$$

(б). Если $|f'(x)| < 1 < |f'(a)|$, то

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq \left(\int_0^1 |f'(x)|^{qst} |f'(a)|^{q(s(1-t)+1-s)} dt \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_0^1 |f'(x)|^{qst} |f'(a)|^q |f'(a)|^{-qst} dt \right)^{\frac{1}{q}} = \\
&= |f'(a)| \left(\int_0^1 \phi^t(x) dt \right)^{\frac{1}{q}} = |f'(a)| H_2^{\frac{1}{q}}(\phi(x)),
\end{aligned}$$

и поскольку $|f'(b)| < |f'(x)| < 1$, то I_4 удовлетворяет неравенству (6).

(с). Если $1 < |f'(b)|$, то

$$I_3 \leq \left(\int_0^1 |f'(x)|^{q(st-s+1)} |f'(a)|^{q(s(1-t)+1-s)} dt \right)^{\frac{1}{q}} = |f'(x)|^{1-s} |f'(a)| H_2^{\frac{1}{q}}(\phi(x)) \quad (7)$$

и

$$I_4 \leq \left(\int_0^1 |f'(x)|^{q(st-s+1)} |f'(b)|^{q(s(1-t)+1-s)} dt \right)^{\frac{1}{q}} = |f'(x)|^{1-s} |f'(b)| H_2^{\frac{1}{q}}(\psi(x)).$$

(д). Если $|f'(b)| < 1 < |f'(x)|$, то I_3 удовлетворяет неравенству (7), поскольку $1 < |f'(x)| < |f'(a)|$ и

$$I_4 \leq \left(\int_0^1 |f'(x)|^{q(st-s+1)} |f'(b)|^{qs(1-t)} dt \right)^{\frac{1}{q}} = |f'(x)|^{1-s} |f'(b)|^s H_2^{\frac{1}{q}}(\psi(x)).$$

Следствие 2. Предположим, что все условия теоремы 2 выполнены, тогда

$$\left| \left(\frac{b-a}{2} \right)^{\alpha-1} f\left(\frac{b+a}{2}\right) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a} \left[I_{\left(\frac{b+a}{2}\right)^-}^{\alpha} f(a) + I_{\left(\frac{b+a}{2}\right)^+}^{\alpha} f(b) \right] \right| \leq \left(\frac{1}{2\alpha+1} \right)^{\frac{1}{2}} G_2 \left(\frac{b+a}{2}, \alpha, 2, s \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Примените $x = \frac{a+b}{2}$ и $q = 2$ в теореме 2.

Следствие 3. Пусть $f : \chi \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — дифференцируемая функция на (a, b) и $f' \in L^1[a, b]$. Если $|f'(x)|^q$ геометрически выпукла и монотонно убывает на $[a, b]$ с $0 \leq a < b$ и $q \in (1, +\infty)$, также $|\psi(x)| \leq M^q$, где M — положительное действительное число, тогда

$$\left| \frac{(x-a)^{\alpha} + (b-x)^{\alpha}}{b-a} f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a} [I_{x^-}^{\alpha} f(a) + I_{x^+}^{\alpha} f(b)] \right| \leq \left(\frac{q-1}{(\alpha+1)q-1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} |f'(a)| + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} M |f'(b)| \right].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\phi(x) < 1$ и $1 < \psi(x) < M^q$, то $H_2^{\frac{1}{q}}(\phi(x)) < 1$ и $H_2^{\frac{1}{q}}(\psi(x)) < \left(\frac{M^q - 1}{\ln(M^q)} \right)^{\frac{1}{q}} < M$ соответственно. Поэтому

$$G_2(x, \alpha, q, 1) \leq \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} |f'(a)| + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} M |f'(b)|.$$

3. Примеры. В этом разделе, используя теоремы 1 и 2, мы получаем некоторые интегральные неравенства для обыкновенного интеграла Н-Н для функций, у которых (AVFDP RP) геометрически выпуклые или s -геометрически выпуклые. Кроме того, наши результаты обобщают неравенства Н-Н, полученные ранее Тианом и др. [19].

Если $\alpha = 1$ в теореме 1, то мы получаем следующее интегральное неравенство Н-Н для s -геометрически выпуклой функции.

Теорема 3. Пусть $f : \chi \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — дифференцируемая функция на (a, b) и $f' \in L^1[a, b]$. Если $|f'(x)|^q$ является s -геометрически выпуклой и монотонно убывающей на $[a, b]$ при $0 \leq a < b$ и $q \in [1, +\infty)$, тогда

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{1-\frac{1}{q}} G_3(x, q, s),$$

где

$$G_3(x, q, s) = \begin{cases} \frac{(x-a)^2}{b-a} |f'(a)|^s H_3^{\frac{1}{q}}(\phi(x)) + \frac{(b-x)^2}{b-a} |f'(b)|^s H_3^{\frac{1}{q}}(\psi(x)), & |f'(a)| < 1, \\ \frac{(x-a)^2}{b-a} |f'(a)| H_3^{\frac{1}{q}}(\phi(x)) + \frac{(b-x)^2}{b-a} |f'(b)|^s H_3^{\frac{1}{q}}(\psi(x)), & |f'(x)| < 1 < |f'(a)|, \\ \frac{(x-a)^2}{b-a} |f'(x)|^{1-s} |f'(a)| H_3^{\frac{1}{q}}(\phi(x)) + \frac{(b-x)^2}{b-a} |f'(x)|^{1-s} |f'(b)| H_3^{\frac{1}{q}}(\psi(x)), & 1 < |f'(b)|, \\ \frac{(x-a)^2}{b-a} |f'(x)|^{1-s} |f'(a)| H_3^{\frac{1}{q}}(\phi(x)) + \frac{(b-x)^2}{b-a} |f'(x)|^{1-s} |f'(b)|^s H_3^{\frac{1}{q}}(\psi(x)), & |f'(b)| < 1 < |f'(x)|, \end{cases}$$

$$u H_3(u) = H_1(1, u).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Результат получается в силу леммы 1 после подстановки $\alpha = 1$ в теореме 1.

Полагая $x = \frac{a+b}{2}$ в теореме 3, получаем следующее интегральное неравенство Н-Н.

Следствие 4. Если все предположения теоремы 3 справедливы, то

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{b-a}{4}\right) G_5(q, s),$$

где

$$G_5(q, s) = \frac{G_3\left(\frac{a+b}{2}, q, s\right)}{\frac{b-a}{4}} = \begin{cases} |f'(a)|^s H_3^{\frac{1}{q}}\left(\phi\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) + |f'(b)|^s H_3^{\frac{1}{q}}\left(\psi\left(\frac{a+b}{2}\right)\right), & |f'(a)| < 1, \\ |f'(a)| H_3^{\frac{1}{q}}\left(\phi\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) + |f'(b)|^s H_3^{\frac{1}{q}}\left(\psi\left(\frac{a+b}{2}\right)\right), & |f'\left(\frac{a+b}{2}\right)| < 1 < |f'(a)|, \\ |f'\left(\frac{a+b}{2}\right)|^{1-s} |f'(a)| H_3^{\frac{1}{q}}\left(\phi\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) + |f'\left(\frac{a+b}{2}\right)|^{1-s} |f'(b)| H_3^{\frac{1}{q}}\left(\psi\left(\frac{a+b}{2}\right)\right), & 1 < |f'(b)|, \\ |f'\left(\frac{a+b}{2}\right)|^{1-s} |f'(a)| H_3^{\frac{1}{q}}\left(\phi\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) + |f'\left(\frac{a+b}{2}\right)|^{1-s} |f'(b)|^s H_3^{\frac{1}{q}}\left(\psi\left(\frac{a+b}{2}\right)\right), & |f'(b)| < 1 < |f'\left(\frac{a+b}{2}\right)|. \end{cases}$$

Теорема 4. Пусть $f : \chi \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — дифференцируемая функция на (a, b) и $f' \in L^1[a, b]$. Если $|f'(x)|^q$ является s -геометрически выпуклой и монотонно убывающей на $[a, b]$ при $0 \leq a < b, q \in (1, +\infty)$, тогда

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \leq \left(\frac{q-1}{2q-1}\right)^{1-\frac{1}{q}} G_4(x, q, s),$$

$$\text{где } G_4(x, q, s) = G_2(x, 1, q, s).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагаем $\alpha = 1$ в теореме 2.

Следствие 5. Предположим, что все условия теоремы 4 выполнены, тогда

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \right| \leq \left(\frac{q-1}{2q-1}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{b-a}{4}\right) G_6(q, s),$$

где

$$G_6(q, s) = \frac{G_4\left(\frac{a+b}{2}, q, s\right)}{\frac{b-a}{4}} = \begin{cases} |f'(a)|^s H_2^{\frac{1}{q}}\left(\phi\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) + |f'(b)|^s H_2^{\frac{1}{q}}\left(\psi\left(\frac{a+b}{2}\right)\right), & |f'(a)| < 1, \\ |f'(a)| H_2^{\frac{1}{q}}\left(\phi\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) + |f'(b)|^s H_2^{\frac{1}{q}}\left(\psi\left(\frac{a+b}{2}\right)\right), & |f'\left(\frac{a+b}{2}\right)| < 1 < |f'(a)|, \\ |f'\left(\frac{a+b}{2}\right)|^{1-s} |f'(a)| H_2^{\frac{1}{q}}\left(\phi\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) + |f'\left(\frac{a+b}{2}\right)|^{1-s} |f'(b)| H_2^{\frac{1}{q}}\left(\psi\left(\frac{a+b}{2}\right)\right), & 1 < |f'(b)|, \\ |f'\left(\frac{a+b}{2}\right)|^{1-s} |f'(a)| H_2^{\frac{1}{q}}\left(\phi\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) + |f'\left(\frac{a+b}{2}\right)|^{1-s} |f'(b)|^s H_2^{\frac{1}{q}}\left(\psi\left(\frac{a+b}{2}\right)\right), & |f'(b)| < 1 < |f'\left(\frac{a+b}{2}\right)|. \end{cases}$$

Следующая теорема вытекает из теоремы 1 при $\alpha = 1$ и $s = 1$.

Теорема 5. Пусть $f : \chi \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — дифференцируемая функция на (a, b) и $f' \in L^1[a, b]$. Если $|f'(x)|^q$ геометрически выпукла и монотонно убывает на $[a, b]$ при $0 \leq a < b$ и $q \in [1, +\infty)$, тогда

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\frac{(x-a)^2}{b-a} |f'(a)| H_3^{\frac{1}{q}}(\phi_1(x)) + \frac{(b-x)^2}{b-a} |f'(b)| H_3^{\frac{1}{q}}(\psi_1(x)) \right],$$

где

$$\phi_1(x) = \left| \frac{f'(x)}{f'(a)} \right|^q, \quad \psi_1(x) = \left| \frac{f'(x)}{f'(b)} \right|^q.$$

Если положить $x = \frac{a+b}{2}$ в теореме 5, мы можем получить следующую интегральную формулу Н-Н.

Следствие 6. Если условия теоремы 5 выполнены, то

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{b-a}{4}\right) \left[|f'(a)| H_3^{\frac{1}{q}}\left(\phi_1\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) + |f'(b)| H_3^{\frac{1}{q}}\left(\psi_1\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \right].$$

Если положить $\alpha = 1$ и $s = 1$ в теореме 2, то будет выполнено следующее неравенство.

Теорема 6. Пусть $f : \chi \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — дифференцируемая функция на (a, b) и $f' \in L^1[a, b]$. Если $|f'(x)|^q$ геометрически выпукла и монотонно убывает на $[a, b]$, для $0 \leq a < b$ и $q \in (1, +\infty)$, тогда

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \leq \left(\frac{q-1}{2q-1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\frac{(x-a)^2}{b-a} |f'(a)| H_2^{\frac{1}{q}}(\phi_1(x)) + \frac{(b-x)^2}{b-a} |f'(b)| H_2^{\frac{1}{q}}(\psi_1(x)) \right].$$

Полагая $x = \frac{a+b}{2}$ в теореме 6, получаем интегральное неравенство Н-Н.

Следствие 7. Согласно предположениям теоремы 6, имеет место следующее неравенство:

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \leq \left(\frac{q-1}{2q-1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{b-a}{4} \right) \left[|f'(a)| H_2^{\frac{1}{q}}\left(\phi_1\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) + |f'(b)| H_2^{\frac{1}{q}}\left(\psi_1\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \right].$$

Следствие 8. Предположим, что все условия теоремы 6 выполнены, причем $|\psi(x)| < M^q$, $M \in \mathbb{R}_+$ и $q \in (1, +\infty)$, тогда

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \leq \left(\frac{q-1}{2q-1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\frac{(x-a)^2}{b-a} |f'(a)| + \frac{(b-x)^2}{b-a} |f'(b)| M \right].$$

Действительно, при подстановке $x = \frac{a+b}{2}$ в следствие 8 интегральное неравенство Н-Н преобразуется следующим образом.

Следствие 9. При выполнении условий следствия 8.

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \leq \left(\frac{q-1}{2q-1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{b-a}{4} \right) [|f'(a)| + |f'(b)| M].$$

4. Заключение. В настоящей работе рассматривается s -геометрически выпуклая функция. В рамках этой концепции доказано дробное интегральное неравенство типа Эрмита — Адамара, включая дробный интеграл Римана — Лиувилля. Результаты исследований уточняют неравенства Эрмита — Адамара для обыкновенного интеграла в различных случаях для функций, у которых AVFDP RP геометрически выпуклые или s -геометрически выпуклые. На следующем этапе эти неравенства могут быть проверены для других дробных интегральных операторов и других типов дробных интегральных неравенств. Формулы, полученные в статье, будут полезны при теоретическом исследовании других моделей дробного исчисления.

Литература/References

1. Mehmet Z. S., Erhan S., Hatice Y., Nagihan B. Hermite — Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities. *Mathematical and Computer Modelling* **57** (9), 2403–2407 (2013).
2. Almutairi O., Kılıçman A. Generalized integral inequalities for Hermite—Hadamard type inequalities via s -convexity on fractal sets. *Mathematics* **7** (11), 1065 (2019).
3. Bermudo S., Kórus P., Nápoles Valdés J. E. On q -Hermite—Hadamard inequalities for general convex functions. *Acta Mathematica Hungarica* **162** (1), 364–374 (2020).

4. Kotrys D. Hermite—Hadamard inequality for convex stochastic processes. *Aequationes Mathematicae* **83** (1), 143–151 (2012).
5. Zhao D., An T., Ye G., Liu W. New Jensen and Hermite—Hadamard type inequalities for h -convex interval-valued functions. *Journal of Inequalities and Applications* **2018** (1), 1–14 (2018).
6. Rashid S., Noor M. A., Noor K. I., Safdar F., Chu Y.-M. Hermite—Hadamard type inequalities for the class of convex functions on time scale. *Mathematics* **7** (10), 956 (2019).
7. Gunawan H. Fractional integrals and generalized Olsen inequalities. *Kyungpook mathematical journal* **49** (1), 31–39 (2009).
8. Vivas-Cortez M., Abdeljawad T., Mohammed P. O., Rangel-Oliveros Y. Simpson's integral inequalities for twice differentiable convex functions. *Mathematical Problems in Engineering* **2020** (2020).
9. Kunt M., İşcan İ. Hermite—Hadamard—Fejér type inequalities for p -convex functions. *Arab Journal of Mathematical Sciences* **23** (2), 215–230 (2017).
10. Gavrea B., Gavrea I. On some Ostrowski type inequalities. *Gen. Math.* **18** (1), 33–44 (2010).
11. Zhao C.-J., Cheung W.-S. On improvements of the Rozanova's inequality. *Journal of Inequalities and Applications* **2011** (1), 1–7 (2011).
12. Kaijser S., Nikolova L., Persson L.-E., Wedestig A. Hardy-type inequalities via convexity. *Mathematical Inequalities & Applications* **8** (3), 403–417 (2005).
13. Mohammed P. O., Abdeljawad T. Opial integral inequalities for generalized fractional operators with nonsingular kernel. *Journal of Inequalities and Applications* **2020** (1), 1–12 (2020).
14. Sawano Y., Wade H. On the Gagliardo—Nirenberg type inequality in the critical Sobolev—Morrey space. *Journal of Fourier Analysis and Applications* **19** (1), 20–47 (2013).
15. Hadamard J. Etude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 171–216 (1893).
16. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and applications of fractional differential equations* **204**. Elsevier (2006).
17. Mohammed P. O. Some new Hermite—Hadamard type inequalities for MT-convex functions on differentiable coordinates. *Journal of King Saud University-Science* **30** (2), 258–262 (2018).
18. Shi D.-P., Xi B.-Y., Qi F. Hermite—Hadamard type inequalities for Riemann—Liouville fractional integrals of (α, m) -convex functions. *Fract. Differ. Calc* **4**, 31–43 (2014).
19. Zhang T.-Y., Ji A.-P., Qi F. On integral inequalities of Hermite—Hadamard type for s -geometrically convex functions. In: *Abstract and Applied Analysis* **2012**, Hindawi (2012).
20. Zhang T.-Y., Ji A.-P., Qi F. Some inequalities of Hermite—Hadamard type for GA-convex functions with applications to means. *Le Matematiche* **68** (1), 229–239 (2013).
21. İşcan İ. Hermite—Hadamard type inequalities for harmonically convex functions. *Hacettepe Journal of Mathematics and statistics* **43** (6), 935–942 (2014).
22. Avci M., Kavurmasi H., Özdemir M. E. New inequalities of Hermite—Hadamard-type via s -convex functions in the second sense with applications. *Applied Mathematics and Computation* **217** (12), 5171–5176 (2011).
23. Tunc M., Gov E., Şanal Ü. On tgs-convex function and their inequalities. *Facta Universitatis. Series: Mathematics and Informatics* **30** (5), 679–691 (2015).
24. Kadakal M., İşcan İ. Exponential type convexity and some related inequalities. *Journal of Inequalities and Applications* **2020** (1), 1–9 (2020).
25. Toplu T., Kadakal M., İşcan İ. On n -polynomial convexity and some related inequalities. *AIMS Math.* **5** (2), 1304–1318 (2020).
26. Butt S. I., Rashid S., Tariq M., Wang M.-K. Novel refinements via n -polynomial harmonically s -type convex functions and application in special functions. *Journal of Function Spaces* **2021** (2021).
27. Qi F., Mohammed P. O., Yao J.-C., Yao Y.-H. Generalized fractional integral inequalities of Hermite—Hadamard type for (α, m) -convex functions. *Journal of Inequalities and Applications* **2019** (1), 1–17 (2019).
28. Han J., Mohammed P. O., Zeng H. Generalized fractional integral inequalities of Hermite—Hadamard type for a convex function. *Open Mathematics* **18** (1), 794–806 (2020).
29. Baleanu D., Mohammed P. O., Zeng S. Inequalities of trapezoidal type involving generalized fractional integrals. *Alexandria Engineering Journal* **59** (5), 2975–2984 (2020).
30. Mohammed P. O., Sarikaya M. Z. Hermite—Hadamard type inequalities for F -convex function involving fractional integrals. *Journal of inequalities and applications* **2018** (1), 1–33 (2018).
31. Mohammed P. O., Abdeljawad T., Zeng S., Kashuri A. Fractional Hermite—Hadamard integral inequalities for a new class of convex functions. *Symmetry* **12** (9), 1485 (2020).
32. Mohammed P. O., Sarikaya M. Z., Baleanu D. On the generalized Hermite—Hadamard inequalities via the tempered fractional integrals. *Symmetry* **12** (4), 595 (2020).

33. Mohammed P.O., Abdeljawad T. Integral inequalities for a fractional operator of a function with respect to another function with nonsingular kernel. *Advances in Difference Equations* **2020** (1), 1–19 (2020).
34. Baleanu D., Mohammed P.O., Vivas-Cortez M., Oliveros Y.R.C. Some modifications in conformable fractional integral inequalities. *Advances in Difference Equations* **2020** (1), 1–25 (2020).
35. Mohammed P.O., Abdeljawad T. Modification of certain fractional integral inequalities for convex functions. *Advances in Difference Equations* **2020** (1), 1–22 (2020).
36. Mohammed P.O., Sarikaya M.Z. On generalized fractional integral inequalities for twice differentiable convex functions. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **372**, 112740 (2020).
37. Fernandez A., Mohammed P. Hermite—Hadamard inequalities in fractional calculus defined using Mittag—Leffler kernels. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* **44** (10), 8414–8431 (2021).
38. Khan M.A., Chu Y., Khan T.U., Khan J. Some new inequalities of Hermite—Hadamard type for s -convex functions with applications. *Open Mathematics* **15** (1), 1414–1430 (2017).
39. Özdemir M.E., YıldızÇ., Akdemir A.O., Set E. On some inequalities for s -convex functions and applications. *Journal of Inequalities and Applications* **2013** (1), 1–11 (2013).
40. Wang W., Iscan I., Zhou H. Fractional integral inequalities of Hermite—Hadamard type for m - HH -convex functions with applications. *Advanced Studies in Contemporary Mathematics (Kyungshang)* **26** (3), 501–512 (2016).

Статья поступила в редакцию 24 октября 2023 г.;
доработана 2 июня 2024 г.;
рекомендована к печати 29 августа 2024 г.

Контактная информация:

Талеби Хесам — проф.; <https://orcid.org/0009-0000-5922-6344>, talebi.hmta@gmail.com, h.talebi102@umail.umz.ac.ir

Неамати Абдолали — канд. наук, доц.; <https://orcid.org/0000-0002-0870-6011>, abdolali.nemati1962@gmail.com, namaty@umz.ac.ir

New Hermite—Hadamard fractional integral inequalities for s -geometry convex functions

H. Talebi, A. Neamaty

University of Mazandaran, Babolsar, Iran

For citation: Talebi H., Neamaty A. New Hermite—Hadamard fractional integral inequalities for s -geometry convex functions. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2025, vol. 12 (70), issue 1, pp. 129–143. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2025.110> (In Russian)

In the present study, we discuss some types of the Hermite—Hadamard (H-H) fractional integral inequality, with Riemann—Liouville fractional integral for functions whose absolute values of the first derivatives to positive real powers (AVFDPRP) are s -geometrically convex. That was concluded for geometrically convex as well. As an application, by using special mean of real numbers, H-H inequalities with ordinary integral were generalized for functions whose (AVFDPRP) are geometrically convex or s -geometrically convex.

Keywords: fractional integral, Hermite—Hadamard inequality, s -geometrically convex function.

Received: October 24, 2023

Revised: June 2, 2024

Accepted: August 29, 2024

Authors' information:

Hesam Talebi — <https://orcid.org/0009-0000-5922-6344>, talebi.hmta@gmail.com,
h.talebi102@umail.umz.ac.ir

Abdolali Neamaty — <https://orcid.org/0000-0002-0870-6011>, abdolali.nemati1962@gmail.com,
namaty@umz.ac.ir