МЕХАНИКА

УДК 514.85
MSC 53Z05, 70F20

Силы трения в динамике сингулярного маятника

С. Н. Бурьян

Государственный научно-исследовательский институт прикладных проблем,
Российская Федерация, 191167, Санкт-Петербург, наб. Обводного канала, 29

Для цитирования: *Бурьян С. Н.* Силы трения в динамике сингулярного маятника // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2025. Т. 12 (70). Вып. 1. С. 144–159. https://doi.org/10.21638/spbu01.2025.111

В статье рассматривается поведение сил реакции и множителей Лагранжа для сингулярного маятника вблизи геометрических особых точек. Сингулярный маятник представляет собой плоский двойной математический маятник, свободная вершина которого движется по заданной кривой. Для критических параметров связи конфигурационное пространство сингулярного маятника является многообразием с особенностями. Вблизи особой точки конфигурационное пространство может быть представлено как две пересекающиеся или касающиеся кривые. Впервые рассматриваются свойства динамики сингулярного маятника для параметров системы, близких к критическим значениям. Также впервые изучается влияние силы трения по модели Амонтона — Кулона на движение системы вблизи особенностей. Для рассматриваемого типа возмущений уравнения связи конфигурационное пространство с особенностями распадается на несколько гладких одномерных многообразий. Динамика на гладких многообразиях описывается классическими уравнениями Лагранжа. Общие теоретические построения для двумерных систем с одной голономной связью были рассмотрены в предыдущей статье автора. Для применения этих построений конфигурационное пространство необходимо привести к «нормальной» форме. В данной статье получены соответствующие замены координат. Проверены свойства уравнений движения. Получено, что для особенности типа пересечения множители Лагранжа неограниченно возрастают вблизи особой точки, когда параметр возмущения связи стремится к нулю. Для особенности типа касания возможно несколько вариантов. Для одного типа возмущений множители Лагранжа являются ограниченными функциями, для другого типа — являются неограниченными. В зависимости от того, в какую сторону движется маятник, система уравнений для определения силы трения вблизи геометрической особой точки либо имеет два решения, либо не имеет решений.

Ключевые слова: реакция связей, сила трения, шарнирный механизм, особая точка, голономная связь, множители Лагранжа, многообразия с особенностями.

1. Введение. В механике систем с голономными связями в основном рассматривается случай независимых связей. Конфигурационное пространство механической системы с независимыми голономными связями является гладким многообразием. Структура гладкого многообразия позволяет определить основные дифференциально-геометрические понятия, такие как «касательный вектор» и «фазовое пространство». В результате можно записать уравнения движения в форме уравнений Лагранжа первого или второго рода. Если в конфигурационном пространстве механической системы есть геометрические особенности, то ее динамика становится неопределенной в окрестности особых точек. Например, силы реакции связей могут неограниченно возрастать при движении к особенности. Также система уравнений для сил реакции связей может не иметь решения в особых точках, или решений может быть бесконечно много.

Условие независимости голономных связей обеспечивает «устойчивость» типа конфигурационного пространства. При малом возмущении независимых связей конфигурационное пространство также является гладким многообразием. Это свойство не выполняется для случая зависимых связей. При малом возмущении зависимых связей конфигурационное пространство может распасться на несколько гладких многообразий. Примером является классическая перестройка множества, заданного в координатах (x, y) уравнением $x^2 - y^2 = \varepsilon$ при значениях параметра $\varepsilon \approx 0$. Интерес представляет динамика на гладких многообразиях вблизи особенностей, когда параметр связи стремится к критическому значению.

В общем случае силы реакции для механических систем определяются из системы уравнений движения и уравнений связей. Для некоторых механических систем с силой трения Амонтона — Кулона полученные уравнения для сил реакции или не имеют решений, или имеют сразу несколько решений. Примеры таких систем исследовались Пенлеве [1]. Для разрешения вопросов динамики в этом случае рассматривается несколько методов [2, с. 53–60]. Некоторые голономные связи заменяются на упругие звенья, которым соответствует дополнительный потенциал [3]. Для неголономных связей рассматривается модель с вязким трением [4].

Пример механизма с особенностями неголономных связей (балка с двумя коньками) описывается в [5]. Силы реакций анализируются для траекторий, которые трансверсально пересекают особое множество в фазовом пространстве системы. В работе [6] рассматриваются перестройки конфигурационного пространства при изменении параметров связи для особенностей типа двух пересекающихся кривых на плоскости. Изучаются бифуркации положения равновесия системы в зависимости от свойств потенциальной энергии.

Основной целью статьи является исследование поведения сил реакции и множителей Лагранжа на примере сингулярного маятника. Конфигурационное пространство сингулярного маятника для критических параметров связи представляет собой две пересекающиеся или две касающиеся кривые на плоскости. При малом возмущении уравнения связи конфигурационное пространство распадается на несколько одномерных многообразий, для которых применимы методы классической механики. Для составления уравнений движения систем с независимыми голономными связями, в том числе для перехода от уравнений Лагранжа первого рода к уравнениям Лагранжа с неопределенными множителями, применяются методы из [7, гл. 5]. Матричная форма уравнений Лагранжа приведена в [8, гл. 8].

Новизна данной работы заключается в том, что для сингулярного маятника впервые изучается движение для околокритических параметров связи. В предыдущих работах автора рассматривалась конструкция сингулярного маятника и особенности сил реакции связей только для критических параметров связи [9]. Также впервые изучается влияние силы трения по модели Амонтона — Кулона на движение сингулярного маятника вблизи особых точек.

Анализ поведения множителей Лагранжа для сингулярного маятника основан на предыдущей работе автора [10], в которой рассматриваются некоторые свойства динамики механических систем с параметрами, близкими к критическим значениям. Для применения результатов из этой статьи конфигурационное пространство сингулярного маятника нужно привести к «нормальной» форме. Построение соответствующей замены координат описывается далее.

2. Постановка задачи. Сначала рассмотрим невозмущенную механическую систему с обобщенными координатами $\mathbf{q} = (q_1, q_2)^T$ и одной голономной связью $f(\mathbf{q}) = 0$. Предполагается, что градиент связи f обращается в ноль в некоторой изолированной точке $\mathbf{s}$. Точка $\mathbf{s}$ является особой точкой конфигурационного пространства. Конфигурационное пространство механической системы является одномерным многообразием вне окрестности точки $\mathbf{s}$. На систему действует сила трения. Предполагается, что динамика системы вне особой точки описывается уравнениями Лагранжа с неопределенными множителями. Уравнения в матричной форме:

$$\begin{gathered}\mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \lambda \nabla f(\mathbf{q}) + |\lambda| \mathbf{W}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}});\\ \nabla f^T \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T f'' \dot{\mathbf{q}} = 0,\end{gathered} \tag{1}$$

где f'' соответствует матрице вторых производных (гессиану) функции f; $\mathbf{A}$ обозначает матрицу кинетической энергии в обобщенных координатах. Слагаемое $|\lambda|\mathbf{W}$ соответствует силе трения в обобщенных координатах. Градиент функции f обозначен как ∇f, транспонирование вектора или матрицы обозначено верхним индексом T. Векторы рассматриваются как векторы-столбцы. Вид функции $\mathbf{W}$ для сингулярного маятника будет показан в разделе 4.

Второе уравнение системы (1) получается при дифференцировании уравнения связи $f(\mathbf{q}) = 0$ дважды по времени. После выражения $\ddot{\mathbf{q}}$ из первого уравнения (1) и подстановки во второе получаем:

$$-\nabla f^T \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} + |\lambda|(\nabla f^T \mathbf{A}^{-1}\mathbf{W}) + \lambda(\nabla f^T \mathbf{A}^{-1} \nabla f) + \dot{\mathbf{q}}^T f'' \dot{\mathbf{q}} = 0. \tag{2}$$

Без силы трения множитель Лагранжа λ находится однозначно при $\nabla f \neq 0$:

$$\lambda = \frac{\nabla f^T \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} - \dot{\mathbf{q}}^T f'' \dot{\mathbf{q}}}{\nabla f^T \mathbf{A}^{-1} \nabla f}.$$

Если учитывается сила трения, то в общем случае выражение (2) дает два значения для множителя λ, для которых нужно проверить соответствие знаков:

$$\begin{aligned}\lambda_+ &= \frac{\nabla f^T \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} - \dot{\mathbf{q}}^T f'' \dot{\mathbf{q}}}{\nabla f^T \mathbf{A}^{-1} \nabla f + \nabla f^T \mathbf{A}^{-1}\mathbf{W}}, \quad \text{если } \lambda \geqslant 0;\\ \lambda_- &= \frac{\nabla f^T \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} - \dot{\mathbf{q}}^T f'' \dot{\mathbf{q}}}{\nabla f^T \mathbf{A}^{-1} \nabla f - \nabla f^T \mathbf{A}^{-1}\mathbf{W}}, \quad \text{если } \lambda < 0.\end{aligned} \tag{3}$$

Теперь изучим множество динамических систем с возмущенной связью, в которых связь $f(\mathbf{q}) = 0$ заменяется на связь $f(\mathbf{q}) = \varepsilon$. Предполагается, что при $\varepsilon > 0$

связь $f(\mathbf{q}) = \varepsilon$ определяет одномерное конфигурационное пространство без геометрических особенностей. Выберем одно одномерное многообразие M_ε, которое задается связью $f(\mathbf{q}) = \varepsilon$. Для многообразия M_ε найдем точку $\mathbf{s}_\varepsilon$ такую, что $\mathbf{s}_\varepsilon \to \mathbf{s}$ при $\varepsilon \to 0$. В точке $\mathbf{s}_\varepsilon$ задается вектор скорости $\dot{\mathbf{s}}_\varepsilon$. Если на систему действуют только консервативные и диссипативные силы, то модуль скорости $|\dot{\mathbf{s}}_\varepsilon|$ в окрестности точки $\mathbf{s}$ ограничен начальным значением механической энергии системы. Вектор скорости $\dot{\mathbf{s}}_\varepsilon$ может иметь только два направления в силу одномерности конфигурационного пространства M_ε.

Рассматривается динамика множителей Лагранжа $\lambda(\mathbf{s}_\varepsilon, \dot{\mathbf{s}}_\varepsilon)$ на последовательности многообразий M_ε при $\varepsilon \to 0$. Основной интерес представляет следующий вопрос: является ли последовательность множителей Лагранжа $\lambda(\mathbf{s}_\varepsilon, \dot{\mathbf{s}}_\varepsilon)$ ограниченной функцией параметра ε? Если множители Лагранжа неограничены при $\varepsilon \to 0$, то возникает вопрос о применимости теоретической модели для описания динамики. Если учитывается сила трения, то в точках $(\mathbf{s}_\varepsilon, \dot{\mathbf{s}}_\varepsilon)$ может возникать «удар трением» при значениях параметра $\varepsilon \to 0$.

Для модельных типов особенностей конфигурационных пространств, таких как трансверсальное пересечение двух кривых или касание двух кривых на плоскости, получены следующие результаты [10]. Здесь приводятся только формулировки утверждений, доказательства есть в статье.

Утверждение 1. *Пусть есть диффеоморфизм $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, который соответствует замене координат $\mathbf{q} = X(\mathbf{p})$. Тогда система уравнений (1)*

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \lambda \nabla_q f(\mathbf{q}) + |\lambda| \mathbf{W}$$

переходит в аналогичную систему:

$$\widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{p})\ddot{\mathbf{p}} + \widetilde{\mathbf{B}}(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) = \lambda \nabla_p f(p) + |\lambda| \widetilde{\mathbf{W}}. \tag{4}$$

Функции $\widetilde{\mathbf{A}}$, $\widetilde{\mathbf{B}}$, $\widetilde{\mathbf{W}}$, где

$$\widetilde{\mathbf{A}} = (DX)^T \mathbf{A}(DX); \quad \widetilde{\mathbf{B}} = (DX)^T (\mathbf{B} + \mathbf{A}(DX\dot{\mathbf{p}})'_p \dot{\mathbf{p}}); \quad \widetilde{\mathbf{W}} = (DX)^T \mathbf{W},$$

вычислены в точках $\mathbf{q} = X(\mathbf{p})$, $\dot{\mathbf{q}} = DX(\mathbf{p})\dot{\mathbf{p}}$.

Утверждение 2. *Рассматривается механическая система с обобщенными координатами $\mathbf{q}^T = (x, y)$ и голономной связью $f(\mathbf{q}) = 0$. Особой точке $\mathbf{q}_* = \mathbf{s}$ конфигурационного пространства $f(x, y) = 0$ соответствуют координаты $(0, 0)^T$. Пусть динамика системы описывается уравнениями (1) для следующей связи f:*

$$f = (y - x)(y + x) = y^2 - x^2 = 0. \tag{5}$$

Для возмущенной связи $f(x, y) = \varepsilon$ при $\varepsilon \neq 0$ и $\varepsilon \to 0$ рассматривается движение по одной из гладких ветвей. Выполняются следующие свойства:

(1) Без учета силы трения множитель Лагранжа $\lambda(\mathbf{s}_\varepsilon, \dot{\mathbf{s}}_\varepsilon)$ становится неограниченным вблизи точки $(0, 0)$ при $\varepsilon \to 0$.

(2) С учетом силы трения возможны несколько вариантов. Если $\varepsilon > 0$ и вектор $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{W}(\mathbf{s})$ имеет ненулевую y-координату, то выражение (3) для множителя Лагранжа $\lambda(\mathbf{s}_\varepsilon, \dot{\mathbf{s}}_\varepsilon)$ (без проверки знаков) становится неограниченным при $\varepsilon \to 0+$. Если $\varepsilon < 0$ и вектор $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{W}(\mathbf{s})$ имеет ненулевую x-координату, то множитель Лагранжа $\lambda(\mathbf{s}_\varepsilon, \dot{\mathbf{s}}_\varepsilon)$ становится неограниченным при $\varepsilon \to 0-$.

(3) Если выполняются формальные условия (2), то при движении системы в одном направлении от точки $\mathbf{s}_\varepsilon$ есть два решения для множителей Лагранжа. При движении в другом направлении от точки $\mathbf{s}_\varepsilon$ нет решений. Если решение системы (3) существует, то множители Лагранжа возрастают со скоростью, обратно пропорциональной расстоянию от $\mathbf{s}_\varepsilon$ до $\mathbf{s}$.

Утверждение 3. *Рассматривается механическая система с обобщенными координатами $\mathbf{q}^T = (x, y)$ и голономной связью $f(\mathbf{q}) = 0$. Особой точке $\mathbf{q}_* = \mathbf{s}$ конфигурационного пространства $f(x, y) = 0$ соответствуют координаты $(0, 0)^T$. Пусть динамика системы описывается уравнениями (1) для следующей связи f:*

$$f = (y - x^2)(y + x^2) = y^2 - x^4 = 0. \tag{6}$$

Для возмущенной связи $f(x, y) = \varepsilon$ при $\varepsilon \neq 0$ и $\varepsilon \to 0$ рассматривается движение по одной из гладких ветвей в конфигурационном пространстве. Тогда при $|\dot{\mathbf{s}}_\varepsilon| \geqslant const > 0$ выполняются свойства:

(1) Пусть $\varepsilon > 0$. Без учета силы трения при $(\mathbf{A}^{-1})_{(2,2)}(\mathbf{s}) \neq 0$ и $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{W}(\mathbf{s}))_{[y]} \neq 0$ множители Лагранжа являются неограниченными и возрастают со скоростью, обратно пропорциональной расстоянию от $\mathbf{s}_\varepsilon$ до $\mathbf{s}$.

(2) Пусть $\varepsilon > 0$. Если вектор $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{W}(\mathbf{s}))$ имеет ненулевую y-координату и решение системы (3) существует, то множители Лагранжа $\lambda(\mathbf{s}_\varepsilon, \dot{\mathbf{s}}_\varepsilon)$ являются ограниченными при $\varepsilon \to 0+$.

(3) Пусть $\varepsilon < 0$. Без учета силы трения множители Лагранжа $\lambda(\mathbf{s}_\varepsilon, \dot{\mathbf{s}}_\varepsilon)$ являются неограниченными при $\varepsilon \to 0-$. Если учитывается сила трения и решение системы (3) существует, то множители Лагранжа $\lambda(\mathbf{s}_\varepsilon, \dot{\mathbf{s}}_\varepsilon)$ являются неограниченным при $\varepsilon \to 0-$.

Замечание 1. Условия в утверждениях 2 и 3 формулируются через вектор

$$(\widetilde{\mathbf{A}}^{-1}\widetilde{\mathbf{W}})(X(\mathbf{p}_*)).$$

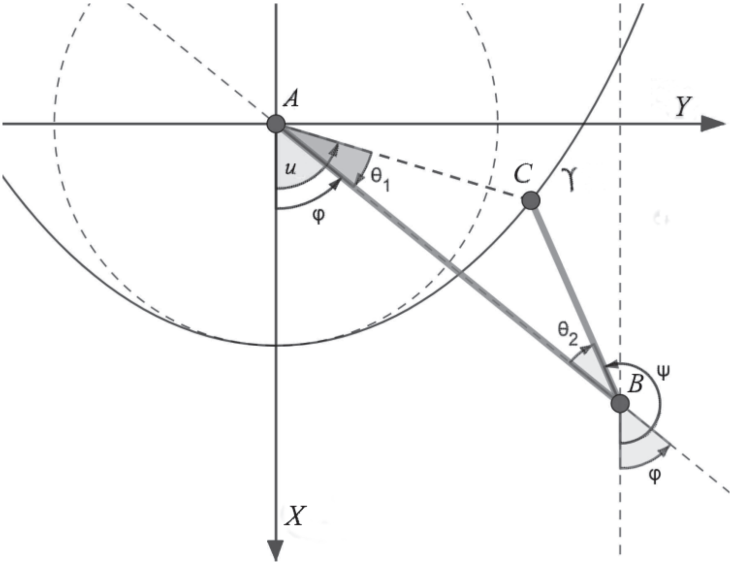
При замене координат по утверждению 1 получаем вектор:

$$(\widetilde{\mathbf{A}}^{-1}\widetilde{\mathbf{W}}) = [(DX)^T\mathbf{A}(DX)]^{-1}[(DX)^T\mathbf{W}] = (DX)^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{W}.$$

Матрица масс $\mathbf{A}$ и вектор силы трения $\mathbf{W}$ известны по условию задачи. Если также известен дифференциал DX замены координат, то можно проверить условия утверждений 2 и 3 в исходных координатах.

Замечание 2. В утверждениях 2 и 3 рассматривались конкретные виды возмущений: связь $f(\mathbf{q}) = 0$ имела возмущение вида $f(\mathbf{q}) = \varepsilon$. В данной работе рассматриваются только возмущения после приведения конфигурационного пространства сингулярного маятника к «нормальной» форме.

3. Сингулярный маятник. В этом разделе конфигурационное пространство сингулярного маятника приводится к «нормальной» форме для применения утверждений 2 и 3. Сингулярный маятник представляет собой плоский двойной математический маятник ABC с дополнительной голономной связью (см. рисунок). Двойной маятник расположен в фиксированной вертикальной плоскости относительно поверхности Земли. Вершина A неподвижна, к ней шарнирно крепится стержень AB, а к вершине B шарнирно крепится стержень BC. Длина стержня AB равна



Сингулярный маятник.

l_1, и длина стержня BC равна l_2. Стержни AB и BC предполагаются невесомыми и нерастяжимыми, в вершинах B и C сосредоточены точечные массы m_1 и m_2. Точка C движется по заданной кривой γ. Содержательные свойства конфигурационного пространства можно получить в относительно простом случае, когда кривая γ является эллипсом. В зависимости от параметров эллипса меняются свойства конфигурационного пространства сингулярного маятника.

Введем систему координат для параметризаци движения сингулярного маятника. Начало отсчета находится в неподвижном шарнире A, ось AX направлена вертикально вниз, ось AY — горизонтально (см. рисунок). Положение маятника определяется координатами точек $B(x_1, y_1)$ и $C(x_2, y_2)$. Обозначим угол XAC как u, угол CAB как θ_1 и угол ABC как θ_2. Углы берутся с учетом знака, положительное направление отсчета углов соответствует направлению движению против часовой стрелки. Будем предполагать, что расстояние $d = |AC|$ является функцией угла u в окрестности некоторой точки, т. е. $d = d(u)$.

В конфигурационном пространстве сингулярного маятника возникают геометрические особенности, когда в некотором положении расстояние $|AC|$ достигает минимума $l_1 - l_2$ или максимума $l_1 + l_2$. Маятник может выйти из особых конфигураций двумя способами, что приводит к появлению точки ветвления (особой точки) конфигурационного пространства. В одном случае маятник ABC находится справа от прямой AC, в другом случае — слева от прямой AC. Предполагается, что расстояние $|AC|$ имеет изолированный минимум или максимум.

Выпишем формулы для голономных связей сингулярного маятника в декартовых координатах. Уравнение голономной связи f_1 соответствует условию $|AB| = l_1$, уравнение голономной связи f_2 — условию $|BC| = l_2$:

$$f_1(x_1, y_1, x_2, y_2) = x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 = 0;$$
$$f_2(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l_2^2 = 0. \tag{7}$$

Вершина C может двигаться только по заданной кривой γ. Для эллипса получается следующее уравнение связи f_3:

$$f_3(x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{(x_2 - c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{8}$$

В формуле (8) параметры a и b обозначают большую и малую полуось эллипса соответственно, параметр c определяет положение центра эллипса $(c, 0)$ на оси Ax. В общем случае кривая γ может быть произвольной, но у функции $d(u)$ должен быть изолированный максимум или минимум.

Для параметризации конфигурационного пространства сингулярного маятника вводится пара углов (φ, ψ). Угол φ соответствует отклонению стержня AB от вертикальной оси AX, угол ψ — отклонению стержня BC от вертикальной оси (см. рисунок). Углы (φ, ψ) параметризуют двумерный тор $\mathbb{T}^2$, который является конфигурационным пространством двойного маятника ABC, без учета связи f_3. Вершины двойного маятника имеют координаты:

$$\begin{gathered} x_1 = l_1 \cos\varphi;\ \ y_1 = l_1 \sin\varphi; \\ x_2 = l_1 \cos\varphi + l_2 \cos\psi;\ \ y_2 = l_1 \sin\varphi + l_2 \sin\psi. \end{gathered} \tag{9}$$

Уравнение голономной связи $f_3(x_1, y_1, x_2, y_2)$ записывается в координатах на торе $\mathbb{T}^2$:

$$f_3(\varphi, \psi) = \frac{(l_1 \cos\varphi + l_2 \cos\psi - c)^2}{a^2} + \frac{(l_1 \sin\varphi + l_2 \sin\psi)^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{10}$$

Связь (10) имеет особенность в точке $(\varphi, \psi) = (0, \pi)$, в которой градиент связи обращается в ноль. Геометрически углы φ и ψ выражаются через угол u, образуя две возможные ветви движения (φ_+, ψ_+) и (φ_-, ψ_-):

$$\varphi_\pm(u) = u \pm \theta_1(u); \quad \psi_\pm(u) = \varphi_\pm(u) + \pi \pm \theta_2(u). \tag{11}$$

Для «положительной» ветви (11) точка C находится справа от прямой AB, для «отрицательной» ветви — слева от прямой AB.

Для дальнейшего анализа необходимы некоторые свойства конфигурационного пространства сингулярного маятника [9]. Здесь они приводятся без доказательств. Утверждение 4 описывает особенность типа пересечения кривых, утверждение 5 — особую точку типа касания первого порядка.

Утверждение 4. *Пусть $d(0) = l_1 - l_2$, $d'(0) = 0$ и $d''(0) \neq 0$. Тогда конфигурационное пространство сингулярного маятника представляет собой две гладкие кривые на торе $\mathbb{T}^2$, которые трансверсально пересекаются в общей точке. Гладким кривым соответствуют нечетные функции $\theta_1(u)$ и $\theta_2(u)$. Значение $\theta_1'(0) \neq 0$, $\theta_2'(0) \neq 0$, $\theta_1''(0) = 0$, $\theta_2''(0) = 0$.*

Утверждение 5. *Пусть $d(0) = l_1 - l_2$, $d'(0) = d''(0) = d'''(0) = 0$ и $d^{(4)}(0) \neq 0$. Тогда конфигурационное пространство сингулярного маятника представляет собой две гладкие кривые (ветви движения) Γ_1 и Γ_2, которые имеют касание первого порядка в общей точке. Гладким кривым соответствуют четные функции $\theta_1(u)$ и $\theta_2(u)$. Значение $\theta_1'(0) = 0$, $\theta_2'(0) = 0$, $\theta_1''(0) \neq 0$, $\theta_2''(0) \neq 0$.*

Покажем, что из формулы (11) можно получить симметричную параметризацию для двух кривых, которые составляют конфигурационное пространство сингулярного маятника. Эта параметризация позволит упростить уравнение связи (10) и привести его к «нормальной» форме (5) или (6). Сначала рассмотрим более сложный случай с особенностью типа касания. Доказательство для особенности типа пересечения аналогичное.

Лемма 1. *Конфигурационное пространство сингулярного маятника для особенности типа касания может быть представлено как объединение двух графиков функций:*

$$\psi = \pm\psi(\varphi); \quad \psi(0) = \psi'(0) = 0; \quad \psi''(0) \neq 0. \tag{12}$$

Графики симметричны относительно оси абсцисс.

Доказательство. Для особенности типа касания ветви движения (11) являются гладкими функциями по утверждению 5. Из выражений (11) и по свойству $\theta_1'(0) = 0$ получаем, что $d\varphi/du = 1 \neq 0$ при $u = 0$. Значит, существует обратная функция $u = u(\varphi)$ в окрестности $u = 0$ (или $\varphi = 0$). Следовательно, функцию $\psi_\pm = \varphi + \pi \pm \theta_2(u(\varphi))$ можно рассматривать как функцию $\psi = \psi(\varphi)$ в окрестности точки $\varphi = 0$. Найдем первую и вторую производные функции $u = u(\varphi)$ из дифференцирования соотношения $u(\varphi(u)) \equiv u$:

$$\frac{du}{d\varphi} = \left(\frac{d\varphi}{du}\right)^{-1}; \quad \frac{d^2u}{d\varphi^2} = -\frac{du}{d\varphi}\left(\frac{d^2\varphi}{du^2}\right)\left(\frac{d\varphi}{du}\right)^{-2}.$$

Первая и вторая производные угла $\theta_2(\varphi)$ находятся как функции угла φ:

$$\frac{d\theta_2}{d\varphi} = \frac{d\theta_2}{du}\cdot\frac{du}{d\varphi}; \quad \frac{d^2\theta_2}{d\varphi^2} = \frac{d^2\theta_2}{du^2}\cdot\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + \frac{d\theta_2}{du}\cdot\frac{d^2u}{d\varphi^2}.$$

По утверждению 5 для угла θ_2 выполняется: $(d\theta_2/du)(0) = 0$ и $(d^2\theta_2/du^2)(0) \neq 0$. Тогда получаются следующие значения производных θ_2 по углу φ:

$$\frac{d\theta_2}{d\varphi}\Big|_{\varphi=0} = 0; \quad \frac{d^2\theta_2}{d\varphi^2}\Big|_{\varphi=0} \neq 0. \tag{13}$$

По свойствам (13) получаем

$$\psi_\pm(0) = \pi; \quad \frac{d\psi_\pm}{d\varphi}\Big|_{\varphi=0} = 1; \quad \frac{d^2\psi_\pm}{d\varphi^2}\Big|_{\varphi=0} = \pm\frac{d^2\theta_2}{d\varphi^2}\Big|_{\varphi=0} \neq 0.$$

Вычтем слагаемое $\pi+\varphi$ из выражения для функции $\psi_\pm$. Получим новые координаты $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$. Замене координат $\tilde{\varphi} = \varphi$, $\tilde{\psi} = \psi - \pi - \varphi$ соответствует дифференциал:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В результате получаем графики типа (12). □

Лемма 2. *Если* $(d\theta_1/du)(0) \neq \pm 1$, *то конфигурационное пространство сингулярного маятника для особенности типа пересечения является объединением двух графиков функций:*

$$\psi = \pm\psi(\varphi); \quad \psi(0) = 0; \quad \psi'(0) \neq 0. \tag{14}$$

Графики симметричны относительно оси абсцисс.

Доказательство. По утверждению 4, для особенности типа пересечения гладкими являются такие функции $\theta_{1,2}(u)$, которые меняют знак после прохождения угла $u = 0$. Рассмотрим именно такие функции $\theta_{1,2}(u)$. Если $\theta_1'(0) \neq \pm 1$, то $(d\varphi/du)(0) = 1 \pm \theta_1(0) \neq 0$. Поэтому для функции $\varphi = \varphi(u)$ существует обратная функция $u = u(\varphi)$. Тогда функцию $\psi(u)$ можно представить как функцию угла φ, т. е. $\psi = \psi(u(\varphi))$.

По свойствам угла θ_2 из утверждения 4 получается, что $(d\theta_2/d\varphi)(0) \neq 0$. Поэтому для функции $\psi = \psi_\pm(\varphi) = \pi + \varphi \pm \theta_2(\varphi)$ выполняется условие:

$$\psi_\pm(0) = \pi; \quad \psi_\pm'(0) = 1 \pm \theta_2'(0).$$

Вычтем слагаемое $\pi+\varphi$ из выражения для функции $\psi_\pm$. Получим новые координаты $(\tilde\varphi, \tilde\psi)$. Замене координат $\tilde\varphi = \varphi$, $\tilde\psi = \psi - \pi - \varphi$ соответствует дифференциал:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В результате получаем графики типа (14). □

Лемма 3. *Пусть конфигурационное пространство является объединением графиков двух симметричных функций $y = f(x)$ и $y = -f(x)$, которые пересекаются в единственной общей точке $(0,0)$. Уравнение связи записывается как $y^2 - f^2(x) = 0$. Если для производных функции f выполняются следующие соотношения:*

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{N-1}(0) = 0; \quad f^N(0) \neq 0, \tag{15}$$

то объединение графиков гладкой заменой координат можно привести к виду

$$y^2 - x^{2N} = (y - x^N)(y + x^N) = 0. \tag{16}$$

Дифференциал замены координат в точке $(0,0)$ является диагональной матрицей, при этом ее диагональные элементы отличны от нуля.

Доказательство. Разложим функцию f в ряд Адамара с учетом условий (15):

$$f(x) = c_N x^N + x^{N+1} g(x); \quad c_N \neq 0; \quad g \in C^\infty(\mathbb{R}). \tag{17}$$

Тогда получаем следующее выражение по (17):

$$y^2 - (f(x))^2 = y^2 - c_N^2\, x^{2N} - 2c_N\, x^{2N+1} g(x) - x^{2N+2} g^2(x).$$

После группировки:

$$y^2 - (f(x))^2 = y^2 - x^{2N}(c_N^2 + 2c_N x g(x) + x^2 g^2(x)).$$

Выражение

$$c_N^2 + 2c_N x g(x) + x^2 g^2(x)$$

является положительным в окрестности $x = 0$, так как $c_N^2 > 0$. При $x \approx 0$ можно сделать гладкую и обратимую замену координат $(x, y) \to (\tilde x, \tilde y)$:

$$\tilde y = y; \quad \tilde x = x\,(c_N^2 + 2c_N x g(x) + x^2 g^2(x))^{1/(2N)}. \tag{18}$$

После замены координат (18) уравнение связи (15) записывается в виде

$$\tilde{y}^2 - \tilde{x}^{2N} = 0 \quad \text{или} \quad (\tilde{y} - \tilde{x}^N)(\tilde{y} + \tilde{x}^N) = 0.$$

Из формулировки леммы получается формула (16). Дифференциал замены координат $(x, y) \to (\tilde{x}, \tilde{y})$ в точке $(0, 0)$:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{pmatrix} |c_N|^{1/N} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} = \begin{pmatrix} |c_N|^{-1/N} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

является диагональной матрицей с ненулевыми диагональными элементами. □

4. Сила трения скольжения в задаче о движении сингулярного маятника. Составим систему уравнений для нахождения сил реакции голономной связи f_3 в (8). Предположим, что эллипс γ, задаваемый уравнением (8), является шероховатым. Тогда на точку C, движущуюся по эллипсу γ, действует сила трения. Для формирования уравнений Лагранжа первого рода введем несколько обозначений. Матрица масс $\mathbf{M}$ и вектор изображающей точки $\mathbf{r}$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Обозначим модуль вектора скорости точки C как v_2, т. е. $v_2 = \sqrt{(\dot{x}_2)^2 + (\dot{y}_2)^2}$. Вектор силы тяжести $\mathbf{F}_1$ и вектор силы трения $\mathbf{F}_2$ в декартовых координатах:

$$\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} m_1 g \\ 0 \\ m_2 g \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F}_2 = -\mu|\lambda_3||\nabla f_3| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{x}_2/v_2 \\ \dot{y}_2/v_2 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Уравнения Лагранжа первого рода для идеальных голономных связей f_1, f_2, f_3 с обозначениями (19) и (20) запишутся в виде

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}} = \lambda_1 \nabla f_1 + \lambda_2 \nabla f_2 + \lambda_3 \nabla f_3 + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2. \tag{21}$$

Особой точке конфигурационного пространства сингулярного маятника соответствует изображающая точка $\mathbf{r}_* = (l_1, 0, l_1 - l_2, 0)^T$. В точке $\mathbf{r}_*$ градиенты голономных связей (7) и (8) становятся зависимыми:

$$\nabla f_1(\mathbf{r}_*) = (2l_1, 0, 0, 0)^T; \quad \nabla f_2(\mathbf{r}_*) = (2l_2, 0, -2l_2, 0)^T;$$
$$\nabla f_3(\mathbf{r}_*) = (0, 0, 2(l_1 - l_2 - c)/a^2, 0)^T.$$

Ранг градиентов равен 2, а не 3. Тем не менее градиенты связей ∇f_1, ∇f_2 и ∇f_3 не обращаются в ноль в особой точке $\mathbf{r}_*$. Сила реакции $\mathbf{N} = \lambda_3 \nabla f_3$ соответствует реакции от движения точки C по заданной кривой (эллипсу). Предполагается, что центр эллипса γ на оси Ax имеет координату $c < 0$, поэтому выражение $l_1 - l_2 - c$ не обращается в ноль.

Теперь опишем динамику сингулярного маятника с силой трения скольжения в угловых координатах (φ, ψ). Особой точке $\mathbf{r}_*$ в декартовых координатах соответствует точка $\mathbf{q}_* = (0, \pi)^T$ в угловых координатах. В угловых координатах уравнения связей f_1 и f_2 всегда выполняются, остается только связь f_3. Обобщенная сила

$\mathbf{Q} = (Q_\varphi, Q_\psi)^T$, которая соответствует силе трения $\mathbf{F}_2$ (20) в декартовых координатах, может быть записана в следующем виде:

$$Q_\varphi = \mathbf{F}_2 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = -\mu|\lambda_3||\nabla f_3| \left(\frac{-\, l_1 \sin\varphi\, \dot{x}_2 + l_1 \cos\varphi\, \dot{y}_2}{v_2} \right);$$
$$Q_\psi = \mathbf{F}_2 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \psi} = -\mu|\lambda_3||\nabla f_3| \left(\frac{-\, l_2 \sin\psi\, \dot{x}_2 + l_2 \cos\psi\, \dot{y}_2}{v_2} \right). \quad (22)$$

Векторы $\partial\mathbf{r}/\partial\varphi$ и $\partial\mathbf{r}/\partial\psi$ находятся из формул (9). Также из формул (9) следует, что вектор скорости $\mathbf{v}_2 = (\dot{x}_2, \dot{y}_2)^T$ вершины C в особой точке $(\varphi, \phi)^T = (0, \pi)^T$ имеет направление $(0, v)^T$, $v \in \mathbb{R}$, параллельное оси Ay (см. рисунок). В особой точке с координатами $\mathbf{q}_* = (0, \pi)^T \in \mathbb{T}^2$ получаем следующее выражение для силы трения (22):

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}_*) = -\mathrm{sign}(\dot{y}_2)\, \mu|\lambda_3||\nabla f_3(\mathbf{r}_*))| \cdot (l_1, -l_2)^T. \quad (23)$$

Координаты вектора $\mathbf{W}$, где $\mathbf{Q} = |\lambda_3|\mathbf{W}$, являются ненулевыми в особой точке $\mathbf{q}_*$.

Уравнения Лагранжа второго рода для движения двойного математического маятника в координатах (φ, ψ) могут быть записаны в матричной форме:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0.$$

Здесь применяются следующие векторно-матричные обозначения:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} l_1^2(m_1+m_2) & m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi-\psi) \\ m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi-\psi) & l_2^2 m_2 \end{pmatrix};$$
$$\mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{pmatrix} m_2 l_1 l_2 \sin(\varphi-\psi)\dot{\psi}^2 + l_1(m_1+m_2) g \sin\varphi \\ -m_2 l_1 l_2 \sin(\varphi-\psi)\dot{\varphi}^2 + l_2 m_2 g \sin\psi \end{pmatrix}, \quad (24)$$

где g — ускорение свободного падения. Уравнения движения сингулярного маятника с трением могут быть записаны как уравнения движения двойного математического маятника (24) с дополнительной голономной связью f_3 и обобщенной силой трения $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{R} + \mathbf{Q}, \quad (25)$$

где сила реакции опоры

$$\mathbf{R} = \lambda_3 \left(\frac{\partial f_3}{\partial \varphi}, \frac{\partial f_3}{\partial \psi} \right)^T.$$

В особой точке $\mathbf{q}_* = (0, \pi)^T$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}_*) = \begin{pmatrix} l_1^2(m_1+m_2) & -m_2 l_1 l_2 \\ -m_2 l_1 l_2 & l_2^2 m_2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{q}_*) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{l_1^2 m_1} & \dfrac{1}{l_1 l_2 m_1} \\ \dfrac{1}{l_1 l_2 m_1} & \dfrac{m_1+m_2}{l_2^2 m_1 m_2} \end{pmatrix};$$

Также заметим, что

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}_*, \dot{\mathbf{q}}_*) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{q}_*)\mathbf{W}(\mathbf{q}_*, \dot{\mathbf{q}}_*) = sign(\dot{y}_2)\, K \begin{pmatrix} 0 \\ l_2 m_2 \end{pmatrix},$$

где константа $K = \mu|\nabla f_3(\mathbf{r}_*)| > 0$.

Теорема 1. *Для особенности типа пересечения величина множителя Лагранжа $\lambda(\mathbf{s}_\varepsilon, \dot{\mathbf{s}}_\varepsilon)$ без учета силы трения является неограниченной величиной при $\varepsilon \to 0$. С учетом силы трения величина $\lambda(\mathbf{s}_\varepsilon, \dot{\mathbf{s}}_\varepsilon)$ неограничена при $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon \to 0+$.*

Доказательство. Сделаем несколько замен координат, чтобы привести конфигурационное пространство сингулярного маятника к «нормальной» форме (5) и применить утверждение 2. Для этого последовательно рассмотрим несколько замен координат и их дифференциалы. В угловых координатах $\mathbf{q} = (\varphi, \psi)^T$ конфигурационное пространство сингулярного маятника для особенности типа пересечения задается как две параметрические кривые от параметра u. По лемме 2 можно сделать замену координат $\mathbf{q} = X_1(\mathbf{q}^{[1]})$, где $\varphi^{[1]} = \varphi$, $\psi^{[1]} = \psi - \pi - \varphi$. В координатах $\mathbf{q}^{[1]}$ конфигурационное пространство сингулярного маятника может быть представлено как объединение двух графиков:

$$\psi = \pm\psi^{[1]}(\varphi^{[1]}); \quad \psi^{[1]}(0) = 0; \quad \frac{d\psi^{[1]}}{d\varphi^{[1]}}\Big|_{\varphi^{[1]}=0} \neq 0.$$

Дифференциал замены координат $\mathbf{q} = X_1(\mathbf{q}^{[1]})$ в особой точке $(0,0)^T$:

$$(DX_1)(0) = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}^{[1]}}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

По лемме 3 объединение графиков $\psi = \pm\psi^{[1]}$ гладкой заменой координат $\mathbf{q}^{[1]} = X_2(\mathbf{q}^{[2]})$ может быть приведено к виду

$$(\psi^{[2]} - \varphi^{[2]})(\psi^{[2]} + \varphi^{[2]}) = (\psi^{[2]})^2 - (\varphi^{[2]})^2 = 0.$$

Дифференциал замены координат $\mathbf{q}^{[1]} = X_2(\mathbf{q}^{[2]})$ в особой точке $(0,0)^T$

$$(DX)_2(0) = \frac{\partial \mathbf{q}^{[1]}}{\partial \mathbf{q}^{[2]}}(0) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где константа $k > 0$. В координатах $\mathbf{q}^{[2]}$ получаем «нормальную» форму связи (5) для конфигурационного пространства. По утверждению 2, случай 1, получаем, что без учета силы трения множители Лагранжа становятся неограниченными при $\varepsilon \to 0$.

Далее рассмотрим случай с трением. Замена координат

$$\mathbf{q} = X(\mathbf{q}^{[2]}) = (X_1 \circ X_2)(\mathbf{q}^{[2]})$$

имеет дифференциал

$$DX = (DX_1)(DX_2).$$

Прямо проверяется, что в соответствующих точках

$$(DX)(0) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}; \quad (DX)^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1/k & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из выражений (24) и (25) следует, что

$$\widetilde{\mathbf{A}}^{-1}\widetilde{\mathbf{W}}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}^{[2]}) = ((DX)^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{W})(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}) = \operatorname{sign}(\dot{y}_2)\, K \cdot (0, 1/(l_2 m_2))^T.$$

Значит, вектор $\widetilde{\mathbf{A}}^{-1}\widetilde{\mathbf{W}}$ в координатах $\mathbf{q}^{[2]}$ имеет ненулевую ψ-координату. Так как $K > 0$, $l_2 > 0$ и $m_2 > 0$, то разрешимость системы (3) для множителей Лагранжа зависит от знака $\mathrm{sign}(\dot{y}_2)$. Эта величина положительна или отрицательна в зависимости от направления вектора скорости вершины C в особой точке. По утверждению 2, случай 2 (когда $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon \to 0+$), при движении в одну сторону есть два решения для множителей Лагранжа, а при движении в другую сторону — нет решений для множителей Лагранжа. Также по утверждению 2 множители Лагранжа $\lambda(\mathbf{s}_\varepsilon, \dot{\mathbf{s}}_\varepsilon)$ являются неограниченными при $\varepsilon \to 0+$.

Теорема 2. *Для особенности типа касания с учетом сил трения скольжения множитель Лагранжа $\lambda(\mathbf{s}_\varepsilon, \dot{\mathbf{s}}_\varepsilon)$ является ограниченной величиной при $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon \to 0+$. При действии силы трения величина $\lambda(\mathbf{s}_\varepsilon, \dot{\mathbf{s}}_\varepsilon)$ неограничена при $\varepsilon < 0$ и $\varepsilon \to 0-$.*

Доказательство. Сделаем несколько замен координат, чтобы привести конфигурационное пространство сингулярного маятника к «нормальной» форме (6) и применить утверждение 3. Также будем учитывать дифференциалы замен координат. По лемме 1 конфигурационное пространство сингулярного маятника для особенности типа касания первого порядка с помощью замены координат $\mathbf{q} = X_1(\mathbf{q}^{[1]})$ может быть представлено как объединение двух графиков, симметричных относительно оси абсцисс:

$$\pm\psi^{[1]}(\varphi^{[1]}); \quad \frac{d\psi^{[1]}}{d\varphi^{[1]}}\Big|_{\varphi^{[1]}=0} = 0; \quad \frac{d^2(\psi^{[1]})}{d(\varphi^{[1]})^2}\Big|_{\varphi^{[1]}=0} \neq 0.$$

Дифференциал замены координат $\mathbf{q} = X_1(\mathbf{q}^{[1]})$ в особой точке $(0,0)^T$:

$$(DX_1)(0) = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}^{[1]}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

По лемме 3 данный тип связей заменой координат $\mathbf{q}^{[1]} = X_2(\mathbf{q}^{[2]})$ приводится к виду

$$(\psi^{[2]} - (\varphi^{[2]})^2)(\psi^{[2]} + (\varphi^{[2]})^2) = (\psi^{[2]})^2 - (\varphi^{[2]})^4 = 0.$$

Дифференциал замены координат $\mathbf{q}^{[1]} = X_2(\mathbf{q}^{[2]})$ в особой точке

$$(DX_2)(0) = \frac{\partial \mathbf{q}^{[1]}}{\partial \mathbf{q}^{[2]}} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В координатах $\mathbf{q}^{[2]}$ получаем «нормальную» форму (5) для уравнения связи. Замена координат

$$\mathbf{q} = X(\mathbf{q}^{[2]}) = (X_1 \circ X_2)(\mathbf{q}^{[2]})$$

имеет дифференциал

$$DX = (DX_1)(DX_2).$$

Прямо проверяется, что

$$(DX)(0) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}; \quad (DX)^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1/k & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

При замене координат $\mathbf{q} = X(\mathbf{q}^{[2]})$ матрица $\mathbf{A}$ переходит в матрицу $\tilde{\mathbf{A}} = (DX)^T\mathbf{A}(DX)$, причем

$$(\tilde{\mathbf{A}})^{-1}_{(2,2)} = \frac{l_1^2 m_1 + l_1^2 m_2 - 2\, m_2 l_1 l_2 + l_2^2 m_2}{l_2^2 m_2 l_1^2 m_1} = \frac{m_1 l_1^2 + m_2(l_1 - l_2)^2}{m_1 m_2 l_1^2 l_2^2} > 0\,.$$

Из выражений (24) и (25) следует, что

$$((DX)^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{W})(\mathbf{q}_*, \dot{\mathbf{q}}_*) = sign(\dot{y}_2)\, K \cdot (0, 1/(l_2 m_2))^T.$$

Значит, вектор $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}\tilde{\mathbf{W}}$ в новых координатах $\mathbf{q}^{[2]}$ имеет ненулевую ψ-координату в особой точке $(0,0)^T$. По утверждению 3, случай 2 ($\varepsilon > 0$, $\varepsilon \to 0+$), получаем, что формальные выражения для множителей Лагранжа $\lambda(\mathbf{s}, \mathbf{s}_\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$ являются ограниченными.

Для случая $\varepsilon < 0$ и $\varepsilon \to 0-$ в утверждении 3, случай 3, получаем, что формальные выражения для множителей Лагранжа $\lambda(\mathbf{s}, \mathbf{s}_\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ являются неограниченными. □

5. Заключение. В предыдущей статье [10] была рассмотрена общая теория для анализа сил реакций и сил трения при возмущении связей механической системы с двумя степенями свободы и одной голономной связью. Градиент этой связи равен нулю в некоторой изолированной точке (особой точке), поэтому конфигурационное пространство является многообразием с особенностью. В этой статье полученные результаты применяются для механической системы сингулярного маятника. Конфигурационное пространство этой механической системы может иметь особенности типа пересечения двух кривых или касания двух кривых на плоскости. Для сингулярного маятника построены замены координат, которые приводят его конфигурационное пространство к «нормальной» форме. Вектор сил трения и матрица кинетической энергии удовлетворяют условиям в [10]. Поэтому для особенности типа пересечения множители Лагранжа для возмущенной системы становятся неограниченными в окрестности особой точки, когда параметр возмущения стремится к нулю (критическому значению). Для особенности типа касания с учетом силы трения возможно несколько вариантов. Для одного типа возмущений ($\varepsilon \to 0+$) множители Лагранжа являются ограниченными функциями, для другого типа возмущений ($\varepsilon \to 0-$) — неограниченными. Возникают неоднозначности, похожие на парадоксы Пенлеве. При движении сингулярного маятника в одном направлении вблизи особой точки существует два решения для силы трения, а при движении в противоположном направлении нет решений. Возможно, что для разрешения этих неоднозначностей необходимо рассмотреть другую модель реализации голономных связей для механических систем с особенностями. Этот вопрос представляет интерес для дальнейших исследований.

Литература

1. Пенлеве П. *Лекции о трении*, пер. с фр. Москва, Гостехиздат (1954).

2. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. *Математические аспекты классической и небесной механики.* Москва, ВИНИТИ (1985).

3. Козлов В. В., Нейштадт А. И. О реализации голономных связей. *Прикладная математика и механика* **54** (5), 858–861 (1990).

4. Карапетян А. В. О реализации неголономных связей и устойчивости кельтских камней. *Прикладная математика и механика* **45** (1), 42–51 (1981).

5. Закалюкин И. В. Особенности вырождения неголономных связей и управляемость. *Электронный журнал «Труды МАИ»* **39**, 1–18 (2010).

6. Самсонов В. А., Михалев А. А. Перестройка пространства положений механической системы. *Проблемы машиностроения и надежности машин* **4**, 13–16 (2005).

7. Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П., Товстик П. Е., Солтаханов Ш. Х., Филиппов С. Б., Петрова В. И. *Теоретическая и прикладная механика.* Т. 1. Санкт-Петербург, Изд-во С.-Петерб. ун-та (2022).

8. Журавлев В. Ф. *Основы теоретической механики.* Москва, Физматлит (2001).

9. Бурьян С. Н. Силы реакции сингулярного маятника. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **9** (67), вып. 2, 278–293 (2022). https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.209

10. Бурьян С. Н. Силы реакции и силы трения в динамике систем с геометрическими особенностями. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **11** (69), вып. 4, 755–771 (2024). https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.411

Статья поступила в редакцию 14 января 2024 г.;
доработана 25 июня 2024 г.;
рекомендована к печати 29 августа 2024 г.

Контактная информация:

Бурьян Сергей Николаевич — канд. физ.-мат. наук, науч. сотр.;
https://orcid.org/0000-0002-7795-6735, burianserg@yandex.ru

Friction forces in the dynamics of singular pendulum

S. N. Burian

State Research Institute of Applied Problems,
29, nab. Obvodnogo kanala, St. Petersburg, 191167, Russian Federation

For citation: Burian S. N. Friction forces in the dynamics of singular pendulum. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2025, vol. 12 (70), issue 1, pp. 144–159. https://doi.org/10.21638/spbu01.2025.111 (In Russian)

The behavior of reaction forces and Lagrange multipliers for singular pendulum is studied. This mechanism is a flat double mathematical pendulum, which the free vertex moves along a given curve. For critical parameters of this mechanical system, the configuration space of a singular pendulum is a manifold with singularities. Near a singular point, the configuration space could be represented as two intersecting or tangent curves. For the first time, the properties of singular pendulum dynamics are considered for system parameters close to critical values. In addition, for the first time, the influence of the friction force using the Amonton — Coulomb model on the system motion near singularities is studied. For the considered type of perturbations of the constraint equation, the configuration space with singularities splits into several smooth one-dimensional manifolds. Dynamics on smooth manifolds is described by the classical Lagrange equations. General theoretical constructions for two-dimensional systems with one holonomic constraint were considered in the author's previous article. To apply these constructions, the configuration space must be brought to a "normal" form. In this article, the corresponding coordinate changes are obtained. The conditions for the properties of the motion equations were checked. It is found that for a singularity of the intersection type, the Lagrange multipliers increase without limit near the singular point when the coupling perturbation parameter tends to zero. For a tangency singularity type, several variants are possible. For first perturbation type, the Lagrange multipliers are limited near the singular point taking into account the friction force. For second perturbation type, the Lagrange multipliers are unlimited near the singular point. The system of equations for determining reaction forces near a singularity has two solutions when the singular pendulum moves in one direction and has no solutions when the pendulum moves in the opposite direction.

Keywords: constraint reaction, friction force, hinge mechanism, singular point, holonomic constraint, Lagrange multipliers, manifolds with singularities.

References

1. Painlevé P. *Cours de la faculté des sciences de Paris, cours complémentaire de mécanique rationnelle* (1895). [Rus. ed.: Lektsii o trenii. Moscow, Gostekhizdat Publ. (1954)].

2. Arnold V. I., Kozlov V. V., Neyshtadt A. I. *Matematicheskiye aspekty klassicheskoy i nebesnoy mekhaniki*. Moscow, VINITI Publ. (1985). (In Rusian) [Eng. transl.: Arnold V. I., Kozlov V. *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*. Heidelberg, Springer Berlin (2010)].

3. Kozlov V. V., Neistadt A. I. On the implementation of holonomic constraints. *Applied Mathematics and Mechanics* **54** (5), 858–861 (1990). (In Russian)

4. Karapetyan A. V. On the implementation of nonholonomic connections and the stability of Celtic stones. *Applied mathematics and mechanics* **45**, iss. 1, 42–51 (1981). (In Russian) [Eng. transl.: *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **45**, iss. 1, 30–36 (1981). https://doi.org/10.1016/0021-8928(81)90006-X].

5. Zakalyukin I. V. Peculiarities of the degeneracy of nonholonomic constraints and controllability. *Electronic journal "Proceedings of MAI"* **39**, 1–18 (2010). (In Russian)

6. Samsonov V. A., Mikhalev A. A. Restructuring of the position space of a mechanical system. *Problems of mechanical engineering and reliability of machines* **4**, 13–16 (2005). (In Russian)

7. Polyakhov N. N., Zegzhda S. A., Yushkov M. P., Tovstik P. E., Soltakhanov Sh. Kh., Filippov S. B., Petrova V. I. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika*. Vol. 1. St. Peterburg, St. Petersburg University Press (2022). (In Russian) [Eng. transl.: Polyakhov N. N., Yushkov M. P., Zegzhda S. A., Tovstik P. E. *Rational and Applied Mechanics*. Vol. 1. Springer Cham (2021)].

8. Zhuravlev V. F. *Fundamentals of theoretical mechanics*. Moscow, Fizmatlit Publ. (2001). (In Russian)

9. Burian S. N. Reaction forces of a singular pendulum. *Vestnik of St. Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **9** (67), iss. 2, 278–293 (2022). https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.209 (In Russian) [Engl. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **55**, iss. 2, 192–202 (2022). https://doi.org/10.1134/S1063454122020054].

10. Burian S. N. Reaction forces and friction forces in the dynamics of systems with geometric singularities. *Vestnik of St. Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **11** (69), iss. 4, 755–771 (2024). https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.411 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics* **57**, iss. 4, 562–574 (2024). https://doi.org/10.1134/S1063454124700377].

Received: January 14, 2024
Revised: June 25, 2024
Accepted: August 29, 2024

Author's information:

Sergey N. Burian — https://orcid.org/0000-0002-7795-6735, burianserg@yandex.ru