

Устойчивость цилиндрической оболочки с плоской крышкой под действием внешнего бокового давления*

С. Б. Филиппов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: Филиппов С. Б. Устойчивость цилиндрической оболочки с плоской крышкой под действием внешнего бокового давления // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2025. Т. 12 (70). Вып. 1. С. 186–196.
<https://doi.org/10.21638/spbu01.2025.114>

С помощью асимптотического метода исследована устойчивость под действием равномерного внешнего давления тонкой цилиндрической оболочки, сопряженной по краю с круговой пластиной. Выделены два типа потери устойчивости конструкции. Форма потери устойчивости первого типа является осесимметричной и локализована на поверхности пластины. Форма потери устойчивости второго типа близка к форме потери устойчивости неподкрепленной цилиндрической оболочки и имеет большое число волн по параллели.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, сопряженная с пластиной, устойчивость, асимптотический метод, краевая задача.

1. Введение. Одним из важных элементов проектирования тонкостенных оболочечных конструкций является расчет на устойчивость. В последнее время для решения задач устойчивости все чаще используются методы конечных элементов [1]. Однако аналитические методы в теории устойчивости оболочек и пластин по-прежнему играют большую роль. Знакомство с их результатами проясняет механизм потери устойчивости, в то время как расчет методом конечных элементов является всего лишь численным экспериментом.

Наличие в уравнениях устойчивости тонкой оболочки ее малой относительной толщины приводит к тому, что среди приближенных аналитических методов одно из ведущих мест занимают асимптотические методы [2]. В частности, в краевых задачах теории устойчивости встречается случай регулярного вырождения, исследованный впервые в работе М. И. Вишика и Л. А. Люстерника [3].

Медленно меняющиеся функции основного состояния описывают нулевое приближение для краевой задачи устойчивости и удовлетворяют системе дифференциальных уравнений, имеющей меньший порядок, чем исходная система уравнений устойчивости. Это, с одной стороны, облегчает построение нулевого приближения, а с другой стороны, усложняет его, так как решения системы нулевого приближения не могут удовлетворять всем граничным условиям исходной краевой задачи. Воз-

*Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда 23-21-00111, <https://rscf.ru/project/23-21-00111/>.

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2025

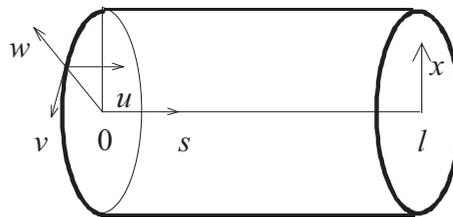
никает проблема разделения граничных условий на основные и дополнительные. Основные условия используются для решения краевой задачи нулевого приближения, а дополнительные — для уточнения этих решений [2].

Представление приближенных решений задач устойчивости и колебаний в виде суммы основного состояния и краевых эффектов особо эффективно при анализе тонкостенных конструкций, состоящих из сопряженных пластин и оболочек. Для некоторых конструкций, состоящих из оболочек, краевая задача нулевого приближения распадается на независимые краевые задачи, соответствующие устойчивости или колебаниям каждой из оболочек. Благодаря этому в ряде случаев приближенное решение весьма сложной с виду задачи находится в явном виде [4]. Построение асимптотических разложений для составных оболочечных конструкций осложняется необходимостью разделять на основные и дополнительные громоздкие условия на линиях сопряжения оболочек.

Для некоторых конструкций, состоящих из сопряженных оболочек и пластин, также возможно расщепление задачи нулевого приближения на ряд независимых задач, однако асимптотический анализ оказывается более сложным, так как формы колебаний и потери устойчивости оболочек и пластин заметно отличаются друг от друга [5–8].

В данной работе использование асимптотического метода Вишика и Люстерника для приближенного решения задачи об устойчивости цилиндрической оболочки, сопряженной с круговой пластиной, позволило для двух возможных типов потери устойчивости конструкции получить в явном виде формулы для критического давления.

2. Постановка задачи и основные уравнения. Рассмотрим задачу о потере устойчивости круговой цилиндрической оболочки, сопряженной по краю $s = l$ с круглой пластиной, под действием равномерного бокового внешнего давления p , приложенного к поверхности оболочки (см. рисунок).



Оболочка, сопряженная с пластиной.

Выберем за единицу длины радиус цилиндрической оболочки и запишем систему уравнений устойчивости оболочки в безразмерном виде [2]:

$$\begin{aligned}
 T_1' + mS &= 0, & S' - mT_2 + Q_2 + 2H' &= 0, & Q_1' + mQ_2 - T_2 + \lambda m\vartheta_2 &= 0, \\
 Q_1 &= M_1' + 2mH, & Q_2 &= -mM_2, & M_1 &= \mu^4(\vartheta_1' + \nu m\vartheta_2), \\
 M_2 &= \mu^4(m\vartheta_2 + \nu\vartheta_1'), & H &= \mu^4(1 - \nu)\vartheta_2', & 2S &= (1 - \nu)(v' - mu), \\
 T_1 &= u' + \nu(w + mv), & T_2 &= w + mv + \nu u', & \vartheta_1 &= -w', & \vartheta_2 &= mw + v,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где штрихом обозначена производная по безразмерной длине дуги меридиана $s \in [0, l]$; l — безразмерная длина оболочки; m — число волн по параллели; Q_1, Q_2, T_1, T_2, S — усилия; M_1, M_2, H — моменты; ϑ_1, ϑ_2 — углы поворота; u, v, w — проекции

перемещений точек срединной поверхности; $\lambda = \sigma p / (Eh)$ — искомый параметр нагружения; $\sigma = 1 - \nu^2$, E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; $\mu^4 = h^2 / 12$ — малый параметр; h — безразмерная толщина оболочки.

Безразмерные уравнения устойчивости круглой пластины имеют вид [9]

$$\begin{aligned} (xQ_{1p})' + mQ_{2p} &= xT_{1p}w_p'' + T_{2p}(w_p' - x^{-1}m^2w_p), \\ xQ_{1p} &= (xM_{1p})' - M_{2p}, \quad xQ_{2p} = -mM_{2p} + 2H_p, \\ xM_{1p} &= \mu_p^4[x\vartheta_{1p}' + \nu(m\vartheta_{2p} + \vartheta_{1p})], \quad xM_{2p} = \mu_p^4(m\vartheta_{2p} + \vartheta_{1p} + \nu x\vartheta_{1p}'), \\ H_p &= \mu_p^4x(1 - \nu)\vartheta_{2p}', \quad \vartheta_{1p} = -w_p', \quad x\vartheta_{2p} = mw_p. \end{aligned} \quad (2)$$

Штрихом обозначена производная по радиальной координате $x \in [0, 1]$; w_p — прогиб пластины; Q_{1p} , Q_{2p} , M_{1p} , M_{2p} , H_p — безразмерные усилия и моменты; T_{1p} и T_{2p} — начальные усилия; ϑ_{1p} и ϑ_{2p} — углы поворота; $\mu_p^4 = a^2 / 12$ — малый параметр; a — безразмерная толщина пластины.

Деформацию круглой пластины в ее плоскости описывают безразмерные уравнения:

$$\begin{aligned} (xT_{1p})' - T_{2p} + S_px &= 0, \quad xS_p' + 2S_p - mT_{2p} = 0, \\ xT_{1p} &= xu_p' + \nu(mv_p + u_p), \quad xT_{2p} = u_p + mv_p + \nu xu_p', \\ 2xS_p &= (1 - \nu)(xv_p' - mu_p - v_p), \end{aligned} \quad (3)$$

где штрихом обозначена производная по радиальной координате; u_p и v_p — тангенциальные компоненты перемещения; T_{1p} , T_{2p} , S — безразмерные усилия.

Если пластина и оболочка изготовлены из одного материала, то на параллели $s = l$, $x = 1$ выполняются следующие условия их сопряжения:

$$\begin{aligned} u &= -w_p, \quad \vartheta_1 = \vartheta_{1p}, \quad hT_1 = aQ_{1p}, \quad hM_1 = -aM_{1p}, \\ w &= u_p, \quad v = v_p, \quad hQ_1 = -aT_{1p}, \quad hS = aS_p. \end{aligned} \quad (4)$$

Предположим, что второй край оболочки жестко защемлен. Тогда

$$u = v = w = \vartheta_1 = 0 \quad \text{при} \quad s = 0. \quad (5)$$

3. Начальное состояние. Чтобы решить краевую задачу (1–5), необходимо определить начальные усилия T_{1p} и T_{2p} , которые входят в уравнения (2). Для этого найдем осесимметричное напряженное состояние в плоскости пластины, возникающее под действием равномерного давления p , приложенного к сопряженной с ней цилиндрической оболочке.

Безразмерные уравнения осесимметричной деформации оболочки имеют вид

$$\begin{aligned} T_1' &= 0, \quad Q_1' - T_2 = \lambda, \quad Q_1 = M_1', \\ T_1 &= u' + \nu w, \quad T_2 = \nu u' + w, \quad M_1 = -\mu^4 w''. \end{aligned} \quad (6)$$

Осесимметричное напряженное состояние в плоскости пластины описывают уравнения

$$(xT_{1p})' - T_{2p} = 0, \quad xT_{1p} = xu_p' + \nu u_p, \quad xT_{2p} = u_p + \nu xu_p', \quad (7)$$

которые получаются из уравнений (3) при $m = 0$.

Пренебрежем жесткостью пластины на изгиб по сравнению с ее жесткостью на растяжение и сжатие. В этом случае условия сопряжения (4) приобретают вид

$$w(l) = 0, \quad M_1(l) = 0, \quad hQ_1(l) = -aT_{1p}(1), \quad T_1(l) = 0. \quad (8)$$

На заделанном крае оболочки $s = 0$ выполняются граничные условия

$$u(0) = w(0) = w'(0) = 0. \quad (9)$$

Решение уравнений (6) ищем в виде суммы безмоментного состояния и краевых эффектов:

$$y = \mu^{I(y)} y_0 + \mu^{I_1(y)} (y_1 + y_2), \quad (10)$$

где y обозначает любую неизвестную функцию, входящую в уравнения (6).

Значения показателей интенсивности $I(y)$ и $I_1(y)$ приведены в табл. 1.

Таблица 1. Показатели интенсивности для решения (10)

Показатель	u	w	ϑ	T_1	M_1	Q_1
I_0	0	0	0	0	4	4
I_1	1	0	-1	2	2	1

Решение безмоментной системы, которая получается из системы (6) при $\mu = 0$

$$T_1' = 0, \quad T_2 + \lambda = 0, \quad T_1 = u' + \nu w, \quad T_2 = \nu u' + w,$$

удовлетворяющее граничным условиям $u(0) = 0$ и $T_1(l) = 0$, имеет вид

$$w_0 = -\frac{\lambda}{\sigma}, \quad u_0 = \frac{\nu \lambda s}{\sigma}, \quad T_{10} = 0.$$

Функции краевого эффекта определяются по формулам

$$y_1 = \sum_{j=1}^2 \hat{D}_j \hat{y}_j \exp(r_j s / \mu), \quad y_2 = \sum_{j=3}^4 \hat{D}_j \hat{y}_j \exp[r_j (s - l) / \mu]. \quad (11)$$

Здесь $\hat{D}_j \sim 1$ — произвольные постоянные,

$$r_{1,2} = g(-1 \pm i), \quad r_{3,4} = g(1 \pm i), \quad g = \sigma^{1/4} / \sqrt{2}, \quad i^2 = -1.$$

В частности, $\hat{w}_j = 1$, $j = 1, 2, 3, 4$. Функции y_1 быстро убывают при удалении от края оболочки $s = 0$, а функции y_2 малы при всех значениях s за исключением окрестности края оболочки $s = l$.

Предположим, что оболочка имеет среднюю длину $l \sim 1$. Тогда справедливы приближенные равенства

$$y(0) \simeq y_0(0) + y_1(0), \quad y(l) \simeq y_0(l) + y_2(l).$$

Решение системы уравнений (7) для круглой пластины имеет вид

$$u = C_1 x, \quad T_{1p} = T_{2p} = (1 + \nu) C_1, \quad (12)$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Подставив решение (12) и приближенные равенства

$$w(l) = w_0(l) + w_2(l) = -\frac{\lambda}{\sigma} + \hat{D}_3 + \hat{D}_4, \\ M_1(l) = \mu^2 M_{12}(l) = -\mu^2 (r_3^2 \hat{D}_3 + r_4^2 \hat{D}_4), \quad Q_1(l) = \mu Q_{12}(l) = -\mu (r_3^3 \hat{D}_3 + r_4^3 \hat{D}_4)$$

в первые три условия (8), получим

$$\hat{D}_3 + \hat{D}_4 - \frac{\lambda}{\sigma} = C_1, \quad r_3^2 \hat{D}_3 + r_4^2 \hat{D}_4 = 0, \quad \mu h(r_3^3 \hat{D}_3 + r_4^3 \hat{D}_4) = a[(1 + \nu)C_1]. \quad (13)$$

Из второго равенства (13) следует, что $\hat{D}_4 = \hat{D}_3$. Исключив \hat{D}_3 из двух остальных равенств (13), найдем

$$C_1 = -\frac{\lambda}{A}, \quad A = \sigma + \frac{2ga(1 + \nu)}{\mu h}. \quad (14)$$

Формулы для определения начальных усилий дает подстановка (14) в (12):

$$T_{1p} = T_{2p} = -(1 + \nu) \frac{\lambda}{A}. \quad (15)$$

4. Асимптотический анализ потери устойчивости первого типа. Решение системы уравнений (1) ищем в виде суммы безмоментного состояния и краевых эффектов

$$y = \mu^{I(y)} y_0 + \mu^{I_1(y)} y_1 + \mu^{I_2(y)} y_2. \quad (16)$$

Показатели интенсивности приведены в табл. 2.

Таблица 2. Показатели интенсивности для решения (16)

Показатель	u	v	w	ϑ	T_1	S	M_1	Q_1
I	4	4	4	4	4	4	8	8
I_1	5	6	4	3	6	5	6	5
I_2	3	4	2	1	4	3	4	3

Функции u_0 , v_0 , T_{10} и S_0 удовлетворяют безмоментным уравнениям

$$T'_{10} + mS_0 = 0, \quad S'_0 = 0, \quad 2S_0 = (1 - \nu)(v'_0 - mu_0), \quad T_{10} = \sigma u'_0. \quad (17)$$

Безмоментные уравнения (16) получаются из уравнений (1), если положить $\mu = 0$ и пренебречь малым слагаемым $\lambda m \vartheta_2$. Функции y_1 и y_2 имеют вид (11).

Предположим, что

$$w_p \sim \vartheta_{1p} \sim 1, \quad M_{1p} \sim Q_{1p} \sim \mu^4, \quad u_p \sim v_p \sim T_{1p} \sim S_p \sim \mu^3. \quad (18)$$

После подстановки решений (16), (18) в уравнения (1–3), граничные условия (4), (5) и отбрасывания второстепенных членов краевая задача (1–5) в первом приближении распадается на четыре независимые задачи:

1. Краевая задача на собственные значения для уравнений (2), описывающих потерю устойчивости пластины, с граничными условиями жесткой заделки

$$w_p = \vartheta_{1p} = 0, \quad x = 1. \quad (19)$$

2. Неоднородная краевая задача для системы безмоментных уравнений (16) с граничными условиями

$$u_0 = v_0 = 0, \quad s = 0, \quad hT_{10}(l) = aQ_{1p}(1), \quad hS_0(l) = aS_p(1).$$

3. Системы линейных алгебраических уравнений

$$w_1 = w_0, \quad \vartheta_{11} = 0, \quad x = 0$$

для определения постоянных \hat{D}_1, \hat{D}_2 и

$$w_2(l) = 0, \quad hM_{12}(l) = aM_{1p}(1)$$

с неизвестными \hat{D}_3, \hat{D}_4 .

4. Неоднородная краевая задача для системы уравнений (3) с граничными условиями

$$v_p(1) = 0, \quad aT_{1p}(1) = hQ_{12}(l), \quad T_{1p} = S_p = 0, \quad x = 1 + b.$$

Задачи 1–4 могут быть последовательно решены, начиная с первой. Ограничимся решением задачи 1, так как оно позволяет в первом приближении получить критическое давление и форму потери устойчивости, в то время как решения остальных задач дают лишь малые поправки к форме потери устойчивости.

5. Потеря устойчивости круглой пластины. Форма потери устойчивости пластины в задаче 1 является осесимметричной [9]. В этом случае в системе уравнений (2) $m = 0$, и эта система сводится к уравнению

$$\frac{d^4 w_p}{dx^4} + \frac{2}{x} \frac{d^3 w_p}{dx^3} - \frac{1}{x^2} \frac{d^2 w_p}{dx^2} + \frac{1}{x^3} \frac{dw_p}{dx} - \frac{T_{1p}}{\mu_p^4} \frac{d^2 w_p}{dx^2} - \frac{T_{2p}}{\mu_p^4 x} \frac{dw_p}{dx} = 0. \quad (20)$$

После подстановки в уравнение (20) начальных усилий (15) и умножения его на x уравнение можно записать в виде

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{d^3 w_p}{dx^3} + \frac{d^2 w_p}{dx^2} - \frac{1}{x} \frac{dw_p}{dx} + \alpha^2 x \frac{dw_p}{dx} \right) = 0, \quad (21)$$

где

$$\alpha^2 = \frac{(1 + \nu)\lambda}{\mu_p^4 A}, \quad A = \sigma + \frac{2ga(1 + \nu)}{\mu h}. \quad (22)$$

Следствием соотношения (21) является равенство

$$\frac{d^3 w_p}{dx^3} + \frac{1}{x} \frac{d^2 w_p}{dx^2} - \frac{1}{x^2} \frac{dw_p}{dx} + \alpha^2 \frac{dw_p}{dx} = \frac{C_0}{x},$$

в котором произвольную постоянную C_0 следует взять равной нулю. Умножив получившееся уравнение на x^2 и сделав в нем замену переменных

$$\xi = \alpha x, \quad \theta = \frac{dw_p}{dx},$$

придем к уравнению Бесселя:

$$\xi^2 \frac{d^2 \theta}{d\xi^2} + \xi \frac{d\theta}{d\xi} + (\xi^2 - 1)\theta = 0. \quad (23)$$

Общее решение уравнения (23) имеет вид

$$\theta = C_1 J_1(\xi) + C_2 N_1(\xi),$$

где $J_1(\xi)$ и $N_1(\xi)$ — функции Бесселя, причем $N_1(\xi)$ имеет особенность при $\xi = 0$. Поэтому $C_2 = 0$ и

$$\theta = C_1 J_1(\xi). \quad (24)$$

Подставив решение (24) во второе граничное условие (19), получим уравнение для определения α :

$$J_1(\alpha) = 0. \quad (25)$$

Первое граничное условие (19) служит для построения формы потери устойчивости. Наименьший положительный корень уравнения (25)

$$\alpha_1 = 3.83.$$

Критическое давление

$$p_1 = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \lambda_p,$$

где λ_p выражается через α_1 с помощью формул (22):

$$\lambda_p = \frac{a^2 \alpha_1^2}{12} \left(1 - \nu + \frac{2ag}{\mu h} \right). \quad (26)$$

6. Потеря устойчивости второго типа. Форма потери устойчивости второго типа цилиндрической оболочки с крышкой, как и форма потери устойчивости неподкрепленной оболочки, имеет большое число волн по параллели $m \sim \mu^{-1/2}$. Следуя [2], решение системы (1) будем искать в виде суммы полубезмоментного решения и краевого эффекта:

$$y = \mu^{I_0(y)} y_0 + \mu^{I_1(y)} (y_1 + y_2). \quad (27)$$

Значения показателей интенсивности I_0 и I_1 приведены в табл. 3.

Таблица 3. Показатели интенсивности для решения (27)

Показатель	u	v	w	ϑ	T_1	S	M_1	Q_1
I_0	1	1/2	0	0	1	3/2	3	3
I_1	2	5/2	1	0	2	3/2	3	2

Функция v_0 удовлетворяет полубезмоментному уравнению

$$\frac{d^4 v_0}{ds^4} - \alpha_s^4 v_0 = 0, \quad (28)$$

где

$$\alpha_s^4 = \frac{\lambda m^6 - \mu^4 m^8}{\sigma},$$

$$w_0 = -v_0, \quad u_0 = \frac{dv_0}{ds}, \quad T_{10} = \frac{d^2 v_0}{ds^2}, \quad S_0 = -\sigma \frac{d^3 v_0}{ds^3}. \quad (29)$$

Функции краевого эффекта y_1 и y_2 имеют вид (11).

Изгибная жесткость тонкой пластины существенно меньше, чем ее жесткость в своей плоскости. Если пренебречь изгибной жесткостью пластины, полагая $Q_{1p} = M_{1p} = 0$, то из условий (4) следует, что

$$T_1 = 0, \quad M_1 = 0 \quad \text{при} \quad s = l. \quad (30)$$

Считая бесконечно большой жесткость пластины в своей плоскости, получаем $u_p = v_p = 0$ и граничные условия

$$v = 0, \quad w = 0 \quad \text{при} \quad s = l. \quad (31)$$

Условия (30) и (31) соответствуют шарнирному опиранию края оболочки $s = l$.

Если отношение $\delta = a/h$ велико, то нельзя игнорировать изгибную жесткость пластины, и условия (30) нуждаются в уточнении. При малом δ некорректными становятся предположение о бесконечно большой жесткости пластины в своей плоскости и условия (31). Однако в случае $\delta \sim 1$ результаты численных расчетов показывают, что приближенное вычисление критического давления с использованием условий (30) и (31) дает точность, достаточную для технических приложений.

Полубезмоментное уравнение (28) имеет четвертый порядок, и его решение не может удовлетворять всем восьми граничным условиям (5), (30) и (31) на краях оболочки. Из четырех граничных условий на каждом из краев оболочки необходимо выбрать по два главных граничных условия, которым будут удовлетворять полубезмоментные решения уравнения (28). Два других дополнительных условия используются при построении краевых эффектов.

В монографии [2] показано, что для граничных условий (5), (30) и (31) главными являются условия

$$v = u = 0, \quad s = 0, \quad v = T_1 = 0, \quad s = l.$$

Следовательно, граничные условия для уравнения (28) имеют вид

$$v_0(0) = \frac{dv_0}{ds}(0) = 0, \quad v_0(l) = \frac{d^2v_0}{ds^2}(l) = 0. \quad (32)$$

Краевая задача (28), (32) описывает колебания балки с защемленным краем $s = 0$ и шарнирно опертым краем $s = l$. Решение этой проблемы хорошо известно (см. [10]).

Наименьшее положительное собственное значение этой краевой задачи определяется по формуле

$$\alpha_{s1} = \varkappa_1/l,$$

где \varkappa_1 — наименьший положительный корень уравнения

$$\operatorname{tg} \varkappa = \operatorname{th} \varkappa, \quad (33)$$

причем $\varkappa_1 = 3.927$.

Приближенное значение параметра критического давления λ_s определяется по формуле

$$\lambda_s = \min_m \lambda(m), \quad \lambda(m) = \frac{\sigma \varkappa_1^4}{m^6 l^4} + \mu^4 m^2. \quad (34)$$

Функция $\lambda(m)$ принимает минимальное значение при целом $m = m_c$, наиболее близком к m_0 , являющимся корнем уравнения $d\lambda/dm = 0$, причем

$$m_0^4 = \frac{\sqrt{\sigma} \varkappa_1^2}{\mu^2 l^2}.$$

Замена m_c на m_0 в формуле $\lambda_s = \lambda(m_c)$ приводит к ошибке $O(m^{-2})$, что не увеличивает порядка погрешности вычисления λ_s , так как при получении формулы

для λ величины $O(m^{-2})$ были отброшены. Следовательно, для определения приближенного значения λ_s вместо формулы (34) можно использовать более простую формулу:

$$\lambda_s = \lambda(m_0) = \frac{4\sigma^{1/4} \nu_1 \mu^3}{3^{3/4} l}. \quad (35)$$

7. Пример расчета. В качестве примера рассмотрим цилиндрическую оболочку толщиной $h = 0.01$ и длиной $l = 4$, один край которой заделан, а второй подкреплён круглой пластиной толщиной a . Оболочка и пластина изготовлены из одного материала с коэффициентом Пуассона $\nu = 0.35$. На оболочку действует равномерное боковое давление p . В табл. 4 для различных значений a приведены значения величины $\Lambda_p = 10^4 \lambda_p$, где λ_p — параметр критического давления, полученный по формуле (26) и соответствующий потере устойчивости первого типа.

Таблица 4. Зависимость параметра $\Lambda_p = 10^4 \lambda_p$ от величины a/h

a/h	Λ
0.3	0.91
0.4	2.12
0.5	4.09

При потере устойчивости второго типа параметр критического давления λ_s находится по формуле (26), причём $\Lambda_s = 10^4 \lambda_s = 0.259$. При увеличении толщины пластины a параметр λ_p возрастает, в то время как параметр λ_s не меняется. При $a/h = 0.428$ имеем равенство $\lambda_p = \lambda_s$. Ввиду того, что параметр критического давления

$$\lambda_c = \min(\lambda_p, \lambda_s),$$

увеличение толщины пластины после достижения ею значения $a = 0.428h$ не приводит к дальнейшему увеличению λ_c . Это значение является оптимальной шириной пластины для данной конструкции с точки зрения максимального увеличения критического давления.

8. Заключение. Представление приближенных решений краевых задач, описывающих устойчивость цилиндрической оболочки, сопряженной по краю с круглой пластиной в виде суммы основного состояния и краевых эффектов, позволило найти как начальное напряженное состояние, так и решение уравнений устойчивости. Полученными явными формулами для критического давления удалось приближенно определить оптимальную толщину пластины, соответствующую максимальному критическому внешнему давлению на оболочку заданной толщины. В дальнейшем предполагается сравнить асимптотические результаты с результатами расчетов методом конечных элементов.

Литература

1. Bo Wang, Shiyang Zhu, Peng Hao, Xiangju Bi, Kaifan Du, Bingquan Chen, Xiangtao Ma, Yuh J. Chao. Buckling of quasi-perfect cylindrical shell under axial compression: A combined experimental and numerical investigation. *International Journal of Solids and Structures* **130–131**, 232–247 (2018).
2. Tovstik P. E., Smirnov A. L. *Asymptotic methods in the buckling theory of elastic shells*. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, World Scientific Publ. Co Ltd (2001).

3. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. *Успехи математических наук.* **12**, 5 (77), 3–122 (1957).

4. Филиппов С. Б. *Теория сопряженных и подкрепленных оболочек*. Санкт-Петербург, Изд-во С.-Петербург. ун-та (1999).

5. Filippov S. B. Buckling of circular ring joint with cylindrical shell structures theory and applications. *Proc. of the 9th SSTA Conference*, 109–112, Jurata (2010).

6. Filippov S. Buckling and optimal design of ring-stiffened thin cylindrical shell. *Shell structures theory and applications (SSTA-2017)* **4**, 219–222 (2018).

7. Filippov S. B., Sabaneev V. S. Buckling of cylindrical shell stiffened by annular plate under external pressure. *Advanced Structured Materials* **110**, 251–270 (2019).

8. Filippov S. B., Nesterchuk G. A., Smirnov A. L. Free vibrations of a cylindrical shell closed with the cap. *Advances in solid and fracture mechanics: A Liber Amicorum to celebrate the birthday of Nikita Morozov. Springer's Series Advanced Structured Materials* **180**, 71–86 (2022).

9. Вольмир А. С. *Устойчивость деформируемых систем*. Москва, Наука (1967).

10. Timoshenko S. *Vibration problems in engineering*. New York, Van Nostrand (1955).

Статья поступила в редакцию 3 июля 2024 г.;
доработана 22 августа 2024 г.;
рекомендована к печати 29 августа 2024 г.

Контактная информация:

Филиппов Сергей Борисович (1946–2025) — д-р физ.-мат. наук, проф.;
<https://orcid.org/0000-0002-1312-5705>

Buckling of the cylindrical shell closed with the flat cap under external lateral pressure*

S. B. Filippov[†]

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Filippov S. B. Buckling of the cylindrical shell closed with the flat cap under external lateral pressure. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2025, vol. 12 (70), issue 1, pp. 186–196. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2025.114> (In Russian)

Buckling under uniform external pressure of a thin cylindrical shell joined at an edge with the circular plate is analyzed by means of the asymptotic method. Two types of buckling are considered. The axisymmetric buckling mode of the first type is localized on the surface of the plate. The buckling mode of the second type is closed to the buckling mode of the no stiffened shell and has many waves in the circumferential direction.

Keywords: joint thin shells, buckling, asymptotic methods, optimization.

References

1. Bo Wang, Shiyang Zhu, Peng Hao, Xiangju Bi, Kaifan Du, Bingquan Chen, Xiangtao Ma, Yuh J. Chao. Buckling of quasi-perfect cylindrical shell under axial compression: A combined experimental and numerical investigation. *International Journal of Solids and Structures* **130–131**, 232–247 (2018).

2. Tovstik P. E., Smirnov A. L. *Asymptotic methods in the buckling theory of elastic shells*. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, World Scientific Publ. Co Ltd (2001)

3. Vishik M. I., Lyusternik L. A. Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter. *Uspekhi Matematicheskikh nauk* **12**, 5 (77), 3–122 (1957) (In Russian)

*The work carried out at the expense of a grant from Russian Science Foundation 23-21-00111, <https://rscf.ru/project/23-21-00111/>.

4. Filippov S. B. *Theory of joined and stiffened shells*. St. Petersburg, St. Petersburg University Press (1999). (In Russian)
5. Filippov S. B. Buckling of circular ring joint with cylindrical shell structures theory and applications. *Proc. of the 9th SSTA Conference*, 109–112, Jurata (2010).
6. Filippov S. Buckling and optimal design of ring-stiffened thin cylindrical shell. *Shell structures theory and applications (SSTA-2017)* **4**, 219–222 (2018).
7. Filippov S. B., Sabaneev V. S. Buckling of cylindrical shell stiffened by annular plate under external pressure. *Advanced Structured Materials* **110**, 251–270 (2019).
8. Filippov S. B., Nesterchuk G. A., Smirnov A. L. Free vibrations of a cylindrical shell closed with the cap. *Advances in solid and fracture mechanics: A Liber Amicorum to celebrate the birthday of Nikita Morozov. Springer's Series Advanced Structured Materials* **180**, 71–86 (2022).
9. Volmir A. S. *Stability of deformable systems*. Moscow Nauka Publ. (1967). (In Russian)
10. Timoshenko S. *Vibration problems in engineering*. New York, Van Nostrand (1955).

Received: July 3, 2024
Revised: August 22, 2024
Accepted: August 29, 2024

Author's information:

Sergey B. Filippov (1946–2025) — <https://orcid.org/0000-0002-1312-5705>