УДК 517.987 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 4
MSC 28C99

Об оценках обобщенной размерности Хаусдорфа

Г. А. Леонов, А. А. Флоринский

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Леонов Г. А., Флоринский А. А.* Об оценках обобщенной размерности Хаусдорфа // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 4. С. 534–543. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.401

Работа содержит определение абстрактного однородного размерностного пространства с конечным индексом компактности, определение спектра размерностей Хаусдорфа — Безиковича подобного пространства, теорему о значениях спектра Хаусдорфа — Безиковича для его подпространств и ряд связанных с этими понятиями результатов. Приводятся оценки размерности множеств, допускающих некоторое отображение сжимающего типа на себя. Эти оценки представляют собой абстрактную версию результатов, близких теореме Дуади — Оэстерле о размерности аттракторов гладких динамических систем в евклидовых пространствах.

Ключевые слова: функционал Хаусдорфа — Лебега, однородное размерностное пространство с конечным индексом компактности, спектр размерностей Хаусдорфа — Безиковича.

1. Введение. Проблема оценки хаусдорфовой размерности аттракторов является одной из основных в современной теории хаотических динамических систем (см. [1–11]). В статье [12] Г. А. Леоновым, с целью получения новых оценок размерности аттракторов, было инициировано изучение ряда вопросов, связанных с функционалами, возникающими при внесении в определения меры и размерности Хаусдорфа дополнительного требования дизъюнктности участвующих в этих определениях покрытий. Некоторые функционалы такого рода изучались с различных точек зрения Безиковичем [13], Роджерсом [14], Хамке и Петруской [15], Хантом [16] и другими. Ниже, в пункте 2, мы обсуждаем ряд связанных с подобными функционалами вопросов и формализмов. Основными объектами изучения в настоящей работе являются однородные размерностные пространства с конечными индексами компактности, а также их подмножества и подпространства, для которых оказываются возможными оценки их (обобщенных) размерностей Хаусдорфа; вводится и изучается спектр размерностей Хаусдорфа — Безиковича подмножества однородного размерностного пространства. Определения упомянутых понятий приведены в пункте 3. Основным результатом пунктов 1–5 работы является теорема 2 о значениях спектра Хаусдорфа — Безиковича. Ее доказательству посвящены пункты 4 и 5. В заключительном пункте 6 настоящей работы приведены некоторые оценки (обобщенных) размерностей множеств, инвариантных относительно действующих в произвольных однородных размерностных пространствах с конечным индексом компактности отображений. Основным результатом пункта 6 является теорема 3, представляющая собой одну из возможных абстрактных форм утверждений, близких теореме Дуади — Оэстерле [17] и ее аналогам.

2. Предварительные определения и утверждения. Пусть (X, Ω, h) — тройка, состоящая из некоторого бесконечного множества X, семейства его подмножеств Ω и некоторой функции $h : \Omega \to [0, \infty]$. Мы будем предполагать, что семейство Ω содержит пустое множество Λ и является покрытием X, а функция h удовлетворяет условию $h(\Lambda) = 0$. Такую тройку (X, Ω, h) мы будем называть размерностным пространством. Мы будем рассматривать два функционала $\mu_H(E)$ и $\mu_{LH}(E)$, заданных на множестве всех подмножеств множества X формулами вида $\mu(E) = \inf \sum h(\Delta_i)$, где, в случае $\mu = \mu_H$, inf распространяется на все счетные покрытия $\{\Delta_i\}$ множества E элементами Ω, а в случае $\mu = \mu_{LH}$ — соответственно на все дизъюнктные счетные покрытия E элементами Ω, при этом inf пустого множества мы считаем равным (плюс) бесконечности. Первый функционал мы будем называть (базовым) функционалом Хаусдорфа пространства (X, Ω, h); он является внешней мерой на X без всяких дополнительных предположений о свойствах размерностного пространства. Второй же функционал был определен в несколько меньшей общности в статье Г. А. Леонова [12]. Без дополнительных предположений о тройке (X, Ω, h) он не является внешней мерой; мы будем называть его функционалом Хаусдорфа — Лебега. В ряде вопросов, в том числе при вычислении размерностей Хаусдорфа аттракторов динамических систем, функционал μ_{LH} выглядит предпочтительнее, чем μ_H. Он использовался с этой целью Г. А. Леоновым в работе [12].

Простейшим случаем совпадения двух функционалов при любой функции h является случай, когда выполнено следующее условие $(*)$: каждое счетное семейство элементов Ω содержит дизъюнктное подсемейство с тем же объединением. Этим свойством обладает, в частности, семейство Ω_* всех диадических кубов в $\mathbb{R}^n$, где под диадическим кубом понимается любое произведение из n полуоткрытых справа интервалов (ребер) с началом каждого из них в одной из точек вида $\frac{l_i}{2^k}$, а с концом, соответственно, в точке $\frac{l_i+1}{2^k}$, где $l_1, ..., l_n$ — произвольные целые числа, а k — натуральное число, называемое рангом рассматриваемого куба. Функционалы вида $\mu_H = \mu_{LH}$ на Ω_* изучались в работах [3] и [4]. Мы покажем, что интересующие нас свойства функционала Хаусдорфа — Лебега справедливы при фиксированных X и Ω для произвольной функции h тогда и только тогда, когда выполнено указанное выше условие $(*)$. Более точно, справедлива

Теорема 1. *Пусть множество X и семейство Ω таковы, как описано выше. Следующие условия эквивалентны.*

1. Для всякой функции $h : \Omega \to [0, \infty]$ со свойством $h(\Lambda) = 0$ функционал μ_{LH} является внешней мерой.

2. Функционалы μ_H и μ_{LH} совпадают при любой функции $h : \Omega \to [0, \infty]$ со свойством $h(\Lambda) = 0$.

3. Выполнены следующие два утверждения:

а) семейство Ω диадически упорядочено отношением включения, то есть для любых $A, B \in \Omega$ выполнено $A \subset B$, или $A \supset B$, или $A \bigcap B = \Lambda$;

б) семейство Ω удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей, то есть каждая возрастающая по включению последовательность элементов семейства Ω конечна.

4. Семейство Ω удовлетворяет условию $(*)$.

Доказательство. Ясно, что $4 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$. Докажем импликацию $1 \Rightarrow 3$. Если не выполнено условие 3а, то найдутся $A, B \in \Omega$ такие, что ни одно из этих двух множеств не содержится в другом и $A\bigcap B\neq\Lambda$. Положим $h(\Lambda)=0, h(A)=h(B)=1$ и $h(E)=3$ для всех остальных $E\in\Omega$. Тогда $\mu_{LH}(A)=\mu_{LH}(B)=1, \mu_{LH}(A\bigcup B)\geq 3$ и, значит, μ_{LH} — не внешняя мера. Также, если не выполнено условие 3б, то существует бесконечная строго возрастающая последовательность A_n элементов Ω. Положим $h(\Lambda)=0, h(A_n)=\frac{1}{n}$ и $h(E)=3$ для всех остальных $E\in\Omega$. Тогда $\mu_{LH}(A_n)=0; \mu_{LH}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)\geq 3$, и мы снова получаем, что μ_{LH} — не внешняя мера. Таким образом, импликация $1\Rightarrow 3$ доказана.

Докажем импликацию $3\Rightarrow 4$. Предполагая, что условие 3 выполнено, возьмем любое счетное подсемейство $\{\Delta_i\}$ элементов Ω. Опираясь на условие 3б, возьмем среди рассматриваемого семейства $\{\Delta_i\}$ для каждого натурального i максимальный элемент G_i, содержащий Δ_i. Построенные G_i между собой либо дизъюнктны, либо совпадают. Их объединение же очевидно совпадает с объединением исходного семейства $\{\Delta_i\}$. Таким образом, теорема доказана.

3. Основные определения. Перейдем к основным определениям работы. Заметим, что для любого размерностного пространства (X,Ω,h), удовлетворяющего эквивалентным условиям теоремы 1, совокупность всех непустых элементов семейства Ω разбивается на непересекающиеся классы следующим естественным образом. Класс Ω_1 состоит из всех максимальных (по включению) элементов семейства Ω, класс Ω_2 — из всех максимальных элементов семейства $\Omega\backslash\Omega_1$ и т. д. Элементы класса Ω_k мы будем также называть в дальнейшем элементами Ω ранга k и писать $rg(\Delta)=k$ при $\Delta\in\Omega_k$. В общем случае ранг элемента является порядковым числом (ординалом), но далее мы будем рассматривать лишь однородные размерностные пространства, в которых ранг любого элемента заведомо натурален.

Определение 1. Мы будем говорить, что пространство (X,Ω,h) есть *однородное размерностное пространство* (ОРП), если выполнены следующие условия.

1. Условия Ω-однородности, состоящие в том, что

а) семейство Ω имеет вид $\Omega=\{\Lambda\}\bigcup\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\Omega_k$, где при каждом целом $k\geq 1$ семейство Ω_k состоит из непустых множеств, образующих разбиение X;

б) для каждого $E\in\Omega_k$ и каждого $l>k$ семейство $\Omega_l(E)=\{P\in\Omega_l : P\bigcap E\neq\Lambda\}$ образует разбиение E, причем количество элементов $|\Omega_l(E)|$ этого разбиения конечно и больше единицы; количество элементов множества Ω_1 предполагается конечным (возможно равным единице) или счетным;

в) найдется константа C_Ω такая, что при любых целых $k\geq 1$ и $l>k$ и любых $E_1,E_2\in\Omega_k$ справедливо неравенство $\frac{|\Omega_l(E_1)|}{|\Omega_l(E_2)|}<C_\Omega$.

2. Условия h-однородности, состоящие в том, что

а) $0<h(E)\leq 1$ при любом непустом $E\in\Omega$;

б) $\lim_{k\to\infty}\sup\{h(E) : E\in\Omega_k\}=0$;

в) существует константа C_h такая, что для любого целого $k\geq 1$ и для любых $E_1,E_2\in\Omega_k$ справедливо неравенство $\frac{h(E_1)}{h(E_2)}<C_h$.

Зафиксируем теперь некоторое ОРП $\mathfrak{A}=(X,\Omega,h)$, где $\Omega=\{\Lambda\}\bigcup\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\Omega_k$. Поскольку семейства Ω_k однозначно восстанавливаются по семейству Ω, мы будем также использовать сокращенную запись $\Omega=\{\Omega_k\}_{k=1}^{\infty}$. Пусть $\alpha>0$ — вещественное число. Обозначим для каждого множества $E \subset X$ и каждого натурального n значение на E функционала μ_H, отвечающего пространству $(X, \{\Omega_k\}_{k=n}^{\infty}, h^\alpha)$ через $\mu_n^\alpha(E)$.

Определение 2. Мы будем называть *внешней α-мерой Хаусдорфа произвольного множества* $E \subset X$ число $\mu_{\mathfrak{A}}^\alpha(E) \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n^\alpha(E)$, где в качестве возможного значения предела допускается и ∞. *Размерностью Хаусдорфа множества* $E \subset X$ мы будем называть (возможно равную бесконечности) величину $\dim_H(E) = \dim_H(E, \mathfrak{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{\alpha > 0 : \mu_{\mathfrak{A}}^\alpha(E) = 0\}$.

Мы рассмотрим теперь произвольную строго возрастающую последовательность натуральных чисел $\sigma = \{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ (мы будем обозначать это с помощью символа $\sigma \in \uparrow (\mathbb{N})$). Положим $\Omega_\sigma = \{\Omega_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда, обозначая сужение h на Ω_σ по-прежнему через h, получим, что $\mathfrak{A}_\sigma = (X, \Omega_\sigma, h)$ — ОРП. Для каждого $E \subset X$ положим $\mathrm{Dim}_H(\mathfrak{A}, E) = \{\dim_H(\mathfrak{A}_\sigma, E) : \sigma \in \uparrow (\mathbb{N})\}$.

Определение 3. Множество $\mathrm{Dim}_H(\mathfrak{A}, E)$ мы будем называть *спектром Хаусдорфа — Безиковича множества* E в пространстве $\mathfrak{A}$. В случае, если $E = X$ множество $\mathrm{Dim}_H(\mathfrak{A}, E)$ мы будем называть *спектром Хаусдорфа — Безиковича пространства* $\mathfrak{A}$ и обозначать через $\mathrm{Dim}_H\ (\mathfrak{A})$.

Нас будут интересовать далее возможные значения спектра $\mathrm{Dim}_H(\mathfrak{A}, E)$ для различных E и $\mathfrak{A}$.

Введем некоторые дополнительные обозначения. Положим для любого $E \subset X$: $\mathcal{N}_l(E) = |\Omega_l(E)| = card\{\Delta \in \Omega_l : \Delta \bigcap E \neq \Lambda\}$. Далее, пусть $M_l = \sup\{h(\Delta) : \Delta \in \Omega_l\}$, $m_l = \inf\{h(\Delta) : \Delta \in \Omega_l\}$. Тогда $\frac{M_l}{m_l} \leq C_h$, в силу определения ОРП.

Положим $d(E) = d(\mathfrak{A}, E) \stackrel{\text{def}}{=} \varlimsup\limits_{l\to\infty} \frac{\ln \mathcal{N}_l(E)}{\ln \frac{1}{m_l}}$. Мы будем называть величину $d(E)$ *размерностью Минковского множества* E в пространстве $\mathfrak{A}$. Заметим, что, в силу однородности рассматриваемого пространства, значение $d(\mathfrak{A}, E)$ при всех $E \in \Omega$ одинаково; мы будем называть это значение *верхней размерностью пространства* $\mathfrak{A}$.

Ясно, что в случае, если $\mathfrak{A}$ есть пространство $\mathbb{R}^n$, вместе с совокупностью Ω всех диадических кубов и длиной стороны куба, взятой в качестве значения h, то определенная выше размерность Минковского совпадает с обычной фрактальной размерностью множества E в $\mathbb{R}^n$, а величина $\dim_H(\mathfrak{A}, E)$ — с его размерностью Хаусдорфа. В общем случае справедливо неравенство $\dim_H(\mathfrak{A}, E) \leq d(\mathfrak{A}, E)$, а множество $\mathrm{Dim}_H(\mathfrak{A}, E)$, как легко видеть, лежит между величинами $\dim_H(\mathfrak{A}, E)$ и $d(\mathfrak{A}, E)$. В частности, если размерности Хаусдорфа и Минковского множества E совпадают, то его спектр Хаусдорфа — Безиковича состоит из одной точки.

Для формулировки основной теоремы работы введем следующее

Определение 4. Будем говорить, что пространство (X, Ω, h) имеет *конечный индекс компактности*, если найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что для каждого $\Delta \in \Omega$ найдется множество $\aleph(\Delta)$, являющееся объединением самого Δ и не более, чем n других элементов Ω того же ранга, что и Δ, называемых примыкающими к последнему, так, что отношение примыкания является симметричным и выполнены следующие условия:

1) для любых $\Delta_1 \subset \Delta_2$ из Ω выполнено $\aleph(\Delta_1) \subset \aleph(\Delta_2)$;

2) для любой убывающей последовательности $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \Omega$ выполнено $\bigcap\limits_{l=0}^{\infty} \aleph(\Delta_i) \neq \Lambda$;

3) для каждого $\Delta \in \Omega$ справедливо условие $\lim\limits_{l\to\infty} \frac{|\tilde{\Omega}_l(\Delta)|}{|\Omega_l(\Delta)|} = 1$, где $\tilde{\Omega}_l(\Delta) = \{\Delta' \in \Omega_l : \aleph(\Delta') \subset \Delta\}$.

Заметим, что конечный индекс компактности имеет, очевидно, пространство $\mathbb{R}^n$ с совокупностью Ω всех диадических кубов. Этот пример показывает, что требование убывания последовательности $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \Omega$ в пункте 2 определения 4 нельзя заменить требованием убывания последовательности $\{\aleph(\Delta_i)\}_{i=1}^{\infty}$.

Нашей целью является доказательство следующей основной теоремы.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{A} = (X, \Omega, h)$ — ОРП с конечным индексом компактности и верхней размерностью $d > 0$. Пусть $J \subset [0, d]$ — компакт. Тогда существуют $\sigma \in \uparrow (\mathbb{N})$ и $E \subset X$ такие, что $Dim_H(\mathfrak{A}_\sigma, E) = J$.*

Вначале мы установим ряд вспомогательных утверждений.

4. Вспомогательные построения.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия теоремы 2, $k \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{E} \subset \Omega_k$, $card(\mathfrak{E}) < \infty$. Пусть $\beta < \alpha$ — два числа из $(0, d(\mathfrak{A}))$. Тогда существуют натуральное число $l > k$, натуральное число $\mathcal{N}$ и множество $G = G(\alpha, \beta, \mathfrak{E})$, лежащее в Ω_l, такие, что*

1) для каждого $\Delta' \in G$ существует $\Delta \in \mathfrak{E}$ такое, что $\Delta' \in \Omega_l(\Delta)$;
2) для каждого $\Delta \in \mathfrak{E}$ выполнено $card(G(\alpha, \beta, \mathfrak{E}) \bigcap \Omega_l(\Delta)) = \mathcal{N}$;
3) для каждого $\Delta' \in G(\alpha, \beta, \mathfrak{E})$ найдется $\Delta \in \mathfrak{E}$ такое, что $\aleph(\Delta') \subset \Delta$;
4) для каждого $\Delta \in \mathfrak{E}$ справедливо неравенство $\sum\limits_{\Delta' \in G(\alpha,\beta,\mathfrak{E}) \bigcap \Omega_l(\Delta)} h^\beta(\Delta') > 1$;
5) справедливо неравенство $\sum\limits_{\Delta' \in G} h^\alpha(\Delta') < 1$.

Доказательство леммы 1. В силу условия имеем $\overline{\lim\limits_{l\to\infty}} \frac{\ln \mathcal{N}_l(\Delta)}{\ln \frac{1}{m_l}} > \beta$ для любого $\Delta \in \Omega_k$. То же справедливо при замене $\mathcal{N}_l(\Delta)$ на $\frac{1}{C}\mathcal{N}_l(\Delta)$ при любом значении константы C. Учитывая однородность пространства, получаем, что для каждого из бесконечного множества значений $l \in \mathbb{N}$, при любом $\Delta \in \Omega_k$ справедливо неравенство $\mathcal{N}_l(\Delta) m_l^\beta > 2$. Учитывая эквивалентность $\mathcal{N}_l(\Delta)$ и $\widetilde{\mathcal{N}}_l(\Delta)$, отмеченную в пункте 3 определения 4, получим $\widetilde{\mathcal{N}}_l(\Delta) m_l^\beta > 1$ при всех $\Delta \in \mathfrak{E}$ и каждого из бесконечного множества индексов l. Выберем $\widetilde{\mathcal{N}}_l \leq \min\{\widetilde{\mathcal{N}}_l(\Delta), \Delta \in \mathfrak{E}\}$ так, чтобы $\widetilde{\mathcal{N}}_l m_l^\beta < 2$. Тогда $\widetilde{\Omega}_l(\Delta)$ содержит по крайней мере $\widetilde{\mathcal{N}}_l$ элементов для каждого $\Delta \in \mathfrak{E}$. Зафиксировав для каждого $\Delta \in \mathfrak{E}$ указанные элементы, обозначим всю их совокупность через $G_l(\mathfrak{E})$. Тогда получим

$$\sum_{\Delta' \in G_l(\mathfrak{E})} h^\alpha(\Delta') \leq M_l^\alpha \widetilde{\mathcal{N}}_l |\mathfrak{E}| = \left(\frac{M_l}{m_l}\right)^\beta m_l^\beta M_l^{\alpha-\beta} \widetilde{\mathcal{N}}_l |\mathfrak{E}| \leq 2c_h^\beta M_l^{\alpha-\beta} |\mathfrak{E}|.$$

Последнее выражение стремится к 0 при $l \to \infty$. Выбирая l достаточно большим и положив $G(\alpha, \beta, \mathfrak{E}) = G_l(\mathfrak{E})$, получаем, что $G(\alpha, \beta, \mathfrak{E})$ — искомое.

Лемма доказана.

Замечание к лемме 1. Множество $G(\alpha,\beta,\mathfrak{E})$ определено в доказательстве леммы 1 неоднозначно. Если некоторое множество G удовлетворяет требованию леммы 1, мы будем обозначать это символом $G \in \mathfrak{J}(\alpha,\beta,\mathfrak{E})$. Заметим, в частности, что если $G \in \mathfrak{J}(\alpha,\beta,\mathfrak{E})$ и $G_1 \in \mathfrak{J}(\alpha_1,\beta_1,G)$, то $G_1 \in \mathfrak{J}(\alpha_1,\beta_1,\mathfrak{E})$. Это замечание мы будем использовать в дальнейшем.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{A}$ — ОРП с конечным индексом компактности, $\sigma = \{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел, $\alpha_n > \beta_n > 0$ — последовательности чисел из промежутка $(0, d(\mathfrak{A}))$, причем $\beta_n - \alpha_n \to 0$. Пусть $k_0 = 1, \mathfrak{E}_0$ — произвольное конечное подсемейство в $\Omega_1, \mathfrak{E}_n$ — конечные подсемейства в Ω_{k_n}, причем $\mathfrak{E}_n = G(\alpha_n,\beta_n,\mathfrak{E}_{n-1}), n \geq 1$ (такие $\mathfrak{E}_n$ существуют, разумеется, не для всех σ). Пусть E_n — объединение всех множеств, входящих в $\mathfrak{E}_n, E = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} E_n$. Тогда $\dim_H(\mathfrak{A}_\sigma, E) = \varliminf\limits_{n\to\infty} \alpha_n$.*

Доказательство леммы 2. Пусть $\alpha = \varliminf\limits_{n\to\infty} \alpha_n$. Поскольку $\sum\limits_{\Delta\in\mathfrak{E}_n} h^{\alpha_n}(\Delta) < 1$ и $\mathfrak{E}_n$ — покрытие E элементами Ω_σ, имеем $\dim_H(\mathfrak{A}_\sigma, E) \leq \alpha$. Пусть $\beta < \alpha$. Тогда $\beta_n > \beta$, начиная с некоторого n_0. Мы имеем для каждого $n > n_0$ и каждого $\Delta \in \mathfrak{E}_{n-1}$ неравенство $\sum\limits_{\Delta'\in\mathfrak{E}_n(\Delta)} h^{\beta}(\Delta') > \sum\limits_{\Delta'\in\mathfrak{E}_n(\Delta)} h^{\beta_n}(\Delta') > 1$. Предположим, что существует последовательность $\{I_l\} \subset \bigcup\limits_{i>n_0} \Omega_{k_i}$, являющаяся покрытием E, такая, что $\sum\limits_{l=1}^{\infty} h^{\beta}(I_l) < 1$.

Тогда для каждого $n > n_0$ и каждого $\Delta \in \mathfrak{E}_{n-1}$ имеем $\mathfrak{E}_n(\Delta) \setminus \{I_l\}_{l=1}^{\infty} \neq \Lambda$.

Следовательно, существует последовательность $\Delta_n \in \mathfrak{E}_n$, где $n > n_0$, со свойствами:

1) $\Delta_n \neq I_l$ для всех l;

2) $\Delta_{n+1} \in \mathfrak{E}_{n+1}(\Delta_n)$.

Из последнего условия имеем $\aleph(\Delta_{n+1}) \subset \Delta_n$. Следовательно, $\bigcap\limits_{n>n_0} \Delta_n \neq \Lambda$. Пусть $x \in \bigcap\limits_{n>n_0} \Delta_n$. В силу условия 1 и того, что $\Delta_n \in \Omega_{k_n}$, имеем $\Delta_n \bigcap I_l = \Lambda$ при $I_l \in \Omega_{k_n}$. Но $\{I_l\} \subset \bigcup\limits_{n>n_0} \Omega_{k_n}$, следовательно, для каждого l найдется $n > n_0$ такое, что $I_l \bigcap \Delta_n = \Lambda$. Следовательно, $x \notin \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} I_l$.

Мы доказали, что при любом $\beta < \alpha$ не существует покрытия E множествами $I_l \in \bigcup\limits_{i>n_0} \Omega_{k_i}$ со свойством $\sum\limits_{l=1}^{\infty} h^{\beta}(I_l) < 1$.

Следовательно, неравенство $\dim_H(\mathfrak{A}_\sigma, E) < \alpha$ невозможно.

Лемма доказана.

Замечание к лемме 2. Утверждение леммы остается в силе, если вместо равенства $\mathfrak{E}_n = G(\alpha_n,\beta_n,\mathfrak{E}_{n-1})$ выполнено условие $\mathfrak{E}_n \in \mathfrak{J}(\alpha_n,\beta_n,\mathfrak{E}_{n-1})$.

5. Доказательство теоремы 2. Взяв произвольное конечное $\mathfrak{E}_0 \subset \Omega_1$ и последовательность $\alpha_n \in (0, d(\mathfrak{A}))$ с множеством частичных пределов равным J, мы, положив $\beta_n = \alpha_n - \frac{\alpha_n}{n}$, найдем по индукции с помощью леммы 1 последовательности $k_n \in \uparrow(\mathbb{N})$ и $\mathfrak{E}_n \subset \Omega_{k_n}$ такие, что $\mathfrak{E}_n = G(\alpha_n, \beta_n, \mathfrak{E}_{n-1})$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Тогда, учитывая замечание к лемме 1, для любой подпоследовательности $\{k_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ последовательности $\{k_n\}$ имеем $\mathfrak{E}_{n_j} \in \mathfrak{J}(\alpha_{n_j}, \beta_{n_j}, \mathfrak{E}_{n_{j-1}})$, а значит по лемме 2 мы можем утверждать, что $\dim_H \left(\mathfrak{A}_{\{k_{n_j}\}}, \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} E_{n_j}\right) = \liminf\limits_{j\to\infty} \alpha_{n_j}$.

Но при любой последовательности n_j выполнено $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} E_{n_j} = E$; множество же нижних пределов всех подпоследовательностей последовательности α_n совпадает с множеством частичных пределов самой последовательности α_n, то есть с J.

Итак, $\mathrm{Dim}_H(\mathfrak{A}_{\{k_n\}}, E) = J$. Теорема доказана.

В заключение заметим, что построенное в теореме 2 множество E вместе с семейством покрытий $\{\Delta \bigcap E : \Delta \in \mathfrak{E}_n\}_{n=1}^{\infty}$ и функцией h_E, где $h_E(\Delta \bigcap E) \stackrel{\mathrm{def}}{=} h(\Delta)$, само является ОРП, которое можно, тем самым, рассматривать как подпространство исходного пространства $\mathfrak{A}$.

Теорема 2 означает, таким образом, что спектр Безиковича — Хаусдорфа у подпространства произвольного фиксированного ОРП $\mathfrak{A}$ с конечным индексом компактности может быть произвольным замкнутым множеством, лежащим в $[0, d(\mathfrak{A})]$.

6. Оценки размерности неподвижных множеств. Рассмотрим теперь отображение $f : X \to X$, где $(X, \Omega, h, \aleph)$ — произвольное фиксированное однородное размерностное пространство с конечным индексом компактности. В этой ситуации, как и в классическом случае, когда X есть пространство $\mathbb{R}^n$, вместе с совокупностью Ω всех диадических кубов и длиной стороны куба, взятой в качестве значения h, оказывается возможным выделить условия (подобные условиям, фигурирующим в стандартных доказательствах теоремы Дуади — Оэстерле [17] и близких результатах), при которых неподвижное относительно f множество E имеет размерность меньше заданного числа $s > 0$. Это и является целью данного пункта работы.

Пусть $\alpha \in (0, 1), s > 0$.

Определение 5. Пусть $E \subset X, f : E \to E$. Элемент $\Delta \in \Omega(E)$ мы будем называть $(\alpha; s)$-*сжимающимся относительно* f, если для любого $k \in \mathbb{N}$ и любого $\Delta' \in \Omega_k(E)$ со свойством $\Delta' \subset \aleph(\Delta)$ найдется натуральное $l > k$ такое, что $|\Omega_l(f(\Delta'))| < \alpha \left(\frac{h(\Delta')}{M_l}\right)^s$.

Определение 6. Отображение f будем называть (α, s)-*сжатием на* E, если существует покрытие $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ множества E, состоящее из (α, s)-сжимающихся элементов Ω.

Определение 7. Множество $E \subset X$ будем называть $\aleph$-*компактным*, если оно содержится в объединении некоторого конечного семейства элементов Ω и справедливо соотношение $\bigcap\limits_{l=1}^{\infty} \bigcup\limits_{\Delta\in\Omega_l(E)} \aleph(\Delta) = E$.

Заметим, что термин «$\aleph$-компактные множества» связан со свойством подобных множеств, описанным ниже в лемме 3.

Основной целью настоящего пункта работы является доказательство следующего утверждения.

Теорема 3. *Пусть E — $\aleph$-компактное подмножество X, $f : E \to E$ — сюръективное отображение. Тогда если отображение f является (α, s)-сжатием, то $\dim_H(E) \le s$.*

Сначала проверим справедливость следующей леммы.

Лемма 3. *Пусть $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \Omega$ — некоторое бесконечное покрытие $\aleph$-компактного множества $E \subset X$. Тогда из семейства $\{\aleph(\Delta_i)\}_{i=1}^{\infty}$ можно выделить конечное подпокрытие множества E.*

Доказательство леммы 3. Предположим противное. Тогда семейство $\{\aleph(\Delta_i)\}_{i=1}^{\infty}$ является покрытием E, из которого нельзя выделить конечного подпокрытия E. По индукции для каждого $l \in \mathbb{N}$ находим убывающие элементы $I_l \in \Omega_l(E)$ такие, что семейство $\{\aleph(\Delta_i)\}_{i=1}^{\infty}$ не содержит конечного подпокрытия множества I_l. По свойствам $\aleph$, с учетом компактности E, можем утверждать, что множество $\bigcap\limits_{l=1}^{\infty} \aleph(I_l)$ содержит некоторую точку $x \in E$. Имеем $x \in \Delta_i$ для некоторого $i \in \mathbb{N}$. Но если l — ранг элемента Δ_i, то $\Delta_i = I_l$, или указанные два элемента примыкают друг к другу. Следовательно, $\aleph(\Delta_i) \supset I_l$, что противоречит тому, что в семействе $\{\aleph(\Delta_i)\}_{i=1}^{\infty}$ нет конечного подпокрытия элемента I_l.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \Omega$ — покрывающая E последовательность (α, s)-сжимающихся множеств. Выберем из семейства $\{\aleph(\Delta_i)\}_{i=1}^{\infty}$ конечное подпокрытие $\aleph(\Delta_i)_{i=1}^{n}$ множества E. Пусть $r = \max\{\ rg(\Delta_i),\ i \le n\}$. Тогда при $k \ge r$ для любого $\Delta \in \Omega_k(E)$ выполнено $\Delta \subset \aleph(\Delta_i)$ для некоторого $i \le n$ (последнее справедливо в силу диадической упорядоченности Ω).

Таким образом, для любого $k \ge r$ любой элемент $\Delta \in \Omega_k(E)$ является (α, s)-сжимающимся.

Рассмотрим любое конечное покрытие $\mathcal{P} = \{\Delta_i'\}_{i=1}^{p}$ множества E, состоящее из элементов Ω ранга выше r, не дизъюнктных с E. Пусть $t = \sum\limits_{i=1}^{n} h^s(\Delta_i')$. Для каждого $i = 1, ..., p$ мы найдем (в силу определения 5) такое $l_i > rg(\Delta_i')$, что $|\Omega_{l_i}(f(\Delta_i'))| \le \left(\frac{h(\Delta_i')}{M_l}\right)^s \alpha$.

Семейство $\bigcup\limits_{i=1}^{p} \Omega_{l_i}(f(\Delta_i'))$ образует покрытие $\mathcal{P}'$ множества E, причем $\sum\limits_{\Delta \in \mathcal{P}'} h^s(\Delta) \le \sum\limits_{i=1}^{n} |\Omega_{l_i}(f(\Delta_i'))| M_{l_i}^s \le \alpha \sum\limits_{i=1}^{p} h^s(\Delta_i') = \alpha t$. Применяя доказанное к покрытию $\mathcal{P}'$, мы найдем покрытие $\mathcal{P}''$ с суммой $\sum\limits_{\Delta \in \mathcal{P}''} h^s(\Delta) \le \alpha^2 t$ и так далее.

Доказанное означает, что $\mu_k^s(E) = 0$ при $k \ge r$. Таким образом, $\dim_H(E) \le s$.

Теорема доказана.

Замечание. Заметим, что в случае, когда f — отображение класса C^1, заданное на открытом множестве евклидова пространства, такое, что при некотором $s > 0$ значение сингулярной функции $\omega_s(d_x f)$ меньше 1 при каждом $x \in E$, причем E

компактно и $f(E) = E$, то некоторая степень f является (α, s)-сжимающим отображением на E. Это сразу следует из классической оценки в доказательстве теоремы Дуади — Остерле (см. [2]).

Литература

1. *Hausdorff F.* Dimension und äußere Maß // Mathematische Annalen. 1919. Vol. 79. P. 157–179.
2. *Boichenko V. A., Leonov G. A., Reitmann V.* Dimension Theory for Ordinary Differential Equations. Wiesbaden: Teubner, 2005.
3. *Leonov G. A.* On Estimation of the Hausdorff Dimension of Attractors // Vestnik St. Petersburg University, Mathematics. 1991. Vol. 24, No. 3. P. 41.
4. *Blincherskaya M. A., Ilyashenko Y. S.* Estimate for the entropy dimension if the maximal attractor for k-contracting systems in an infinity dimensional space // Russian Journal of Math. Phys. 1999. Vol. 6, No. 1. P. 20–26.
5. *Barreira L., Gelfert K.* Dimension estimates in smooth dynamics: a survey of recent results // Ergodic Theory and Dynamical Systems. 2011. Vol. 31, No. 03. P. 641–671.
6. *Kuznetsov N. V.* The Lyapunov dimension and its estimation via the Leonov method // Physics Letters A. 2016. Vol. 380, No. 25–26. P. 2142–2149.
7. *Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Korzhemanova N. A., Kusakin D. V.* Lyapunov dimension formula for the global attractor of the Lorenz system // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2016. Vol. 41. P. 84–103.
8. *Kuznetsov N. V., Alexeeva T. A., Leonov G. A.* Invariance of Lyapunov exponents and Lyapunov dimension for regular and irregular linearizations // Nonlinear Dynamics. 2016. Vol. 85, No. 1. P. 195–201.
9. *Leonov G. A.* Lyapunov functions in the attractors dimension theory // Appl. Math. and Mech. 2012. Vol. 76. P. 129–141.
10. *Leonov G. A.* Strange Attractors and Classical Stability Theory. St. Petersburg: St. Petersburg Univ. Press, 2008.
11. *Leonov G. A.* Formulas for the Lyapunov dimension of attractors of the generalized Lorenz system // Doklady mathematics. 2013. Vol. 450, No. 1. P. 13–18.
12. *Leonov G. A.* Hausdorff — Lebesgue Dimension of Attractors // International Journal of Bifurcations and Chaos. 2017. Vol. 27, No. 10. Art. no. 1750164.
13. *Besicovitch A. S.* On existence of subsets of finite measure of sets of infinite measure // Indagat. muth. 1952. Vol. 14. P. 339–344.
14. *Rogers C. A.* Hausdorff measures. Cambridge University Press, 1998.
15. *Humke P. D., Petruska G.* The packing dimension of a typical continuous function is 2 // Real Analysis Exchange. 1988. Vol. 14. P. 345–357.
16. *Hunt B.* Maximum local Lyapunov dimension bounds the box dimensions of a chaotic attractors // Nonlinearity. 1996. Vol. 9. P. 845–852.
17. *Douady A., Oesterle I.* Dimension de Hausdorff des Attractors // C. R. Acad. Sei. Paris. Ser. A. 1980. Vol. 290, No. 24. P. 1135–1138.

Статья поступила в редакцию 11 января 2018 г.;
после доработки 12 июня 2019 г.;
рекомендована в печать 13 июня 2019 г.

Контактная информация:

Флоринский Александр Алексеевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; florinskiy.a@gmail.com

On estimationes of generalized Hausdorff dimension

$\boxed{\textit{G. A. Leonov}}$, *A. A. Florynskii*

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Leonov G. A., Florynskii A. A. On estimationes of generalized Hausdorff dimension. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2019, vol. 6 (64), issue 4, pp. 534–543. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.401 (In Russian)

The definition of an abstract homogeneous dimensional space with finite index of compactness is given, as well as the definition of Hausdorff — Besicovitch dimensional spectrum of such a space. The possible values of the last one are studied. Also some abstract version of Duady — Oesterle theorem is given.

Keywords: Hausdorff — Lebesgue measure-like functional, homogeneous dimensional space with finite index of compactnes, Hausdorff — Besicovitch dimensional spectrum.

References

1. Hausdorff F., "Dimension und äußere Maß", *Mathematische Annalen* **79**, 157–179 (1919).
2. Boichenko V. A., Leonov G. A., Reitmann V., *Dimension Theory for Ordinary Differential Equations*, (Teubner, Wiesbaden, 2005).
3. Leonov G. A., "On Estimation of the Hausdorff Dimension of Attractors", *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics* **24**(3), 41 (1991).
4. Blincherskaya M. A., Ilyashenko Y. S., "Estimate for the entropy dimension if the maximal attractor for k-contracting systems in an infinity dimensional space", *Russian Journal of Math. Phys.* **6**(1), 20–26 (1999).
5. Barreira L., Gelfert K., "Dimension estimates in smooth dynamics: a survey of recent results", *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **31**(03), 641–671 (2011).
6. Kuznetsov N. V., "The Lyapunov dimension and its estimation via the Leonov method", *Physics Letters A* **380**(25–26), 2142–2149 (2016).
7. Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Korzhemanova N. A., Kusakin D. V., "Lyapunov dimension formula for the global attractor of the Lorenz system", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **41**, 84–103 (2016).
8. Kuznetsov N. V., Alexeeva T. A., Leonov G. A., "Invariance of Lyapunov exponents and Lyapunov dimension for regular and irregular linearizations", *Nonlinear Dynamics* **85** (1), 195–201 (2016).
9. Leonov G. A., "Lyapunov functions in the attractors dimension theory", *Appl. Math. and Mech.* **76**, 129–141 (2012).
10. Leonov G. A., *Strange Attractors and Classical Stability Theory* (St. Petersburg Univ. Press, St. Petersburg, 2008).
11. Leonov G. A., "Formulas for the Lyapunov dimension of attractors of the generalized Lorenz system", *Doklady mathematics* **450**(1), 13–18 (2013).
12. Leonov G. A., "Hausdorff — Lebesgue Dimension of Attractors", *International Journal of Bifurcations and Chaos* **27**(10), 1750164 (2017).
13. Besicovitch A. S., "On existence of subsets of finite measure of sets of infinite measure", *Indagat. muth.* **14**, 339–344 (1952).
14. Rogers C. A., *Hausdorff measures* (Cambridge University Press, 1998).
15. Humke P. D., Petruska G., "The packing dimension of a typical continuous function is 2", *Real Analysis Exchange* **14**, 345–357 (1988).
16. Hunt B., "Maximum local Lyapunov dimension bounds the box dimensions of a chaotic attractors", *Nonlinearity* **9**, 845–852 (1996).
17. Douady A., Oesterle I., "Dimension de Hausdorff des Attractors", *C. R. Acad. Sei. Paris. Ser. A* **290** (24), 1135–1138 (1980).

Received: January 11, 2018
Revised: June 12, 2019
Accepted: June 13, 2019

Author's information:

Aleksandr A. Florynskii — florinskiy.a@gmail.com