УДК 517.9 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 4
MSC 34C28, 34D08, 34D45, 37D45

Генерирование экстремально мультистабильных систем на основе систем в форме Лурье

И. М. Буркин, О. И. Кузнецова

Тульский государственный университет,
Российская федерация, 300012, Тула, пр. Ленина, 92

Для цитирования: *Буркин И. М., Кузнецова О. И* Генерирование экстремально мультистабильных систем на основе систем в форме Лурье // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 4. С. 555–563. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.403

Хаотические сигналы и системы широко используются в шифровании изображений, защищенной связи, обнаружении слабых сигналов и радиолокационных системах. В последние годы многие исследователи сосредоточились на вопросах конструирования систем, обладающих бесконечным числом сосуществующих хаотических аттракторов. В этой статье мы предлагаем некоторые подходы к генерированию самовоспроизводящихся систем с бесконечным числом сосуществующих самовозбуждающихся или скрытых хаотических аттракторов с одинаковыми показателями Ляпунова, основываясь на математических моделях систем в форме Лурье. Предлагаемый подход открывает возможность генерировать экстремально мультистабильные системы, используя многочисленные известные примеры существования хаотических аттракторов у систем в форме Лурье и не прибегая при этом к исчерпывающему компьютерному поиску. Иллюстрируя предложенные в работе методы, мы строим, в частности, экстремально мультистабильные системы с 1-D- и 2-D-сетью скрытых хаотических аттракторов с использованием обобщенной системы Чуа, в которой скрытые аттракторы были впервые обнаружены Г. А. Леоновым и Н. В. Кузнецовым.

Ключевые слова: динамическая система, хаос, сосуществующие хаотические аттракторы, показатели Ляпунова, размерность Каплана — Йорке.

Введение. Хаотические системы широко распространены в природе и технике. После того, как были найдены решения задач синхронизации колебаний хаотических систем, многие исследователи сосредоточились на проблемах использования хаоса в инженерных приложениях. В настоящее время хаотические сигналы и системы широко используются в шифровании изображений [1–3], безопасной связи [4], при обнаружении слабого сигнала [5], в радарных системах [6]. Чем сложнее структура хаотической системы, тем больше возможностей она предоставляет для потенциального прикладного использования.

В 2010 году Г. А. Леонов предложил новый метод поиска периодических решений многомерных динамических систем в форме Лурье [7]. Предложенный метод получил дальнейшее развитие в работах Г. А. Леонова и его учеников, что позволило эффективно строить контрпримеры к известным гипотезам Айзермана и Калмана, а также впервые обнаружить скрытые хаотические колебания в классической и обобщенной системах Чуа [8, 9]. Полученные в упомянутых работах результаты стимулировали многих ученых к поиску и конструированию динамических систем, обладающих скрытыми хаотическими аттракторами [10–12].

В последние годы появилось много работ, посвященных вопросам конструирования экстремально мультистабильных динамических систем, содержащих бесконечное число сосуществующих хаотических аттракторов, как самовозбуждающихся, так и скрытых [13–15]. Все упомянутые работы опираются на предложенную в [13] идею введения периодических функций в системы, смещаемые по переменным (*variable-boostable system*). Приведем здесь определение таких систем, данное в работе [16].

Определение. Динамическую систему $\dot{X} = F(X)$ $(X = (x_1, x_2, \dots, x_n))$ будем называть *смещаемой по переменным*, если существует замена переменных $y_k = x_k - c_k$, приводящая систему к виду $\dot{Y} = F(Y) + D$ $(Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, $(D = (d_1, d_2, \dots, d_n))$. Здесь при $k \in i_1, i_2, \dots, i_m$ $(1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n)$ постоянные $c_k \neq 0$ и $c_k = 0$ при $k \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$.

К смещаемым по переменным системам относятся, в частности, многомерные системы каскадного типа

$$\dot{x} = y, \dot{y} = z, \dots, \dot{u} = f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dots, x). \tag{1}$$

Сдвиг по переменным $y, z, \dots, u$ в системе (1) может быть осуществлен путем введения дополнительных констант в ее первые $n-1$ уравнений. В самом деле, заменяя $x \to \tilde{x}, y \to \tilde{y} + m, z \to \tilde{z} + n, \dots, u \to \tilde{u} + p$, приходим к системе

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{y} + m, \dot{\tilde{y}} = \tilde{z} + n, \dots, \dot{\tilde{u}} = f(\dot{\tilde{x}}, \dot{\tilde{y}}, \dot{\tilde{z}}, \dots, \tilde{x}).$$

Легко видеть, что выполненное преобразование системы осуществляет смещение фазового потока системы (1) по переменным $y, z, \dots, u$, оставляя неизменной динамику переменной $\tilde{x} = x$. Основная идея конструирования систем, обладающих бесконечной $(n-1)$-D-сетью идентичных аттракторов, предложенная в работе [13], состоит в замене переменных $y, z, \dots, u$ в системе (1) периодическими функциями этих переменных. Если после такой замены новая система имеет хаотический аттрактор, то она имеет бесконечную $(n-1)$-D-сеть идентичных аттракторов [13]. Для систем, не являющихся системами каскадного типа, процедура введения периодических функций, позволяющая построить систему с многомерной сетью аттракторов, оказывается намного сложнее, поскольку такая процедура может существенно менять динамику системы и приводить к разрушению ее аттракторов.

В настоящей работе предлагаются методы конструирования систем, обладающих бесконечной сетью аттракторов (как самовозбуждающихся, так и скрытых [8]), на основе математических моделей систем в форме Лурье. Предлагаемые методы позволяют использовать многие известные результаты, связанные с существованием хаотических аттракторов у систем в форме Лурье, для генерирования экстремально мультистабильных систем с бесконечной сетью идентичных аттракторов.

В разделе 2 предложен метод построения 1-D-сети аттракторов путем периодизации нелинейности системы в форме Лурье с вырожденной матрицей линейной части. Результаты раздела 3 опираются на факт существования неособого линейного преобразования, приводящего систему Лурье с невырожденной передаточной функцией к системе каскадного типа. Последнее обстоятельство открывает возможность для конструирования систем, обладающих многомерной сетью идентичных аттракторов.

1. Построение 1-D-сети аттракторов на основе систем в форме Лурье. Рассмотрим систему в форме Лурье

$$\dot{x} = Ax + bg(\sigma), \quad \sigma = c^T x, \tag{2}$$

где A — постоянная $(n\times n)$-матрица, b и c — постоянные n-векторы, $g(\sigma)$ — непрерывная, кусочно дифференцируемая скалярная функция. Пусть I — единичная $(n\times n)$-матрица. Для системы (2) определим дробно-рациональную функцию $\chi(p)=c^T(A-pI)^{-1}b$. Пусть $\chi(p)=m(p)[n(p)]^{-1}$, причем многочлен в знаменателе дроби $\chi(p)$ имеет степень n и несократим с ее числителем. В этом случае говорят [17], что передаточная функция $\chi(p)$ невырожденная.

Предположим, что $\chi(0)\neq 0$, матрица $A-\chi(0)^{-1}bc^T$ имеет нулевое собственное значение, функция $g(\sigma)$ нечетная, а уравнение $\sigma+\chi(0)g(\sigma)=0$ имеет ровно 2 отличных от нуля корня $\sigma=\pm\sigma_0$. Положим $k=-\chi(0)^{-1}$. Систему (2) можно записать в виде

$$\dot{x}=A_1x+b\varphi(\sigma),\quad \sigma=c^Tx, \tag{3}$$

где $\varphi(\sigma)=g(\sigma)-k\sigma$, $A_1=A+kbc^T$, матрица A_1 имеет нулевое собственное значение, $\varphi(\pm\sigma_0)=0$. Пусть $A_1d=0$. Из предположения о невырожденности функции $\chi(p)$ следует [17], что $c^Td=\mu\neq 0$. Тогда $x=0$ и $x=\pm\sigma_0\mu^{-1}d$ являются состояниями равновесия системы (3).

Предположим, что рассматриваемая система имеет хаотический аттрактор Ω, целиком расположенный в полосе $\Pi=\{x:-\sigma_1<c^Tx<\sigma_1\}$, где $\sigma_1\geq\sigma_0$. То есть для любого $x\in\Omega$ справедливо соотношение $c^Tx(t,x_0)\subset\Pi$ при $t\geq 0$. Заменив в (3) функцию $\varphi(\sigma)$ на $2\sigma_1$-периодическую функцию $\psi(\sigma)$, совпадающую с $\varphi(\sigma)$ на $[-\sigma_1,\sigma_1]$, будем иметь систему с бесконечным числом состояний равновесия и 1-D-сетью аттракторов, полученных сдвигом аттрактора Ω системы (3) в направлении вектора d.

Проиллюстрируем реализацию описанного алгоритма генерирования системы с 1-D-сетью аттракторов на примере обобщенной системы Чуа, рассмотренной в работах [8, 11]. Обобщенной системой Чуа называют систему (3) с

$$A=\begin{pmatrix}-\alpha & \alpha & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & -\beta & -\gamma\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}-\alpha\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\quad c=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$g(\sigma)=m_1\sigma+0.5(m_0-m_1)(|\sigma+1|-|\sigma-1|)+0.5(s-m_0)(|\sigma+\delta|-|\sigma-\delta|).$$

Здесь

$$\chi(p)=\frac{\alpha p^2+\alpha(1+\gamma)p+\alpha(\beta+\gamma)}{p^3+(\gamma+\alpha+1)p^2+(\gamma+\beta+\alpha\gamma)p+\alpha\beta}. \tag{5}$$

Система (4) имеет три состояния равновесия: $(0,0,0)$ и $(\mp(\gamma+\beta)\rho,\mp\gamma\rho,\pm\beta\rho)$, где $\rho=[m_0-m_1+(s-m_0)\delta][\beta+m_1(\gamma+\beta)]^{-1}$. При этом матрица $A_1=A+kbc^T$ при $k=-\beta(\gamma+\beta)^{-1}$ имеет однократное нулевое собственное значение, а функция $\varphi(\sigma)=g(\sigma)-k\sigma$ имеет три нуля: $\sigma=0,\sigma=\pm(\gamma+\beta)\rho$. Следуя работе [11], выберем следующие значения параметров: $\alpha=8.4562,\beta=12.0732,\gamma=0.0052,s=-0.9668,\delta=0.2,m_0=0.14,m_1=-1.1468$. Для таких значений параметров, как показано в [11], рассматриваемая система имеет три скрытых аттрактора: цикл и два хаотических аттрактора-близнеца, расположенных в полосе $|x|\leq x_0<2$. Эти аттракторы, представленные на рис. 1, могут быть обнаружены при численном интегрировании системы с начальными условиями $x_0=(-0.458,-0.107,2.522)$ и $x_{1,2}=(\pm1.360,\pm1.633,\pm1.631)$.

Заменим теперь функцию $\varphi(\sigma)$ в (4) на периодическую функцию $\psi(\sigma)$ периода $\Delta=-2(\gamma+\beta)\rho$, совпадающую с функцией $\varphi(\sigma)$ на $[(\gamma+\beta)\rho,-(\gamma+\beta)\rho]$. Тогда новая

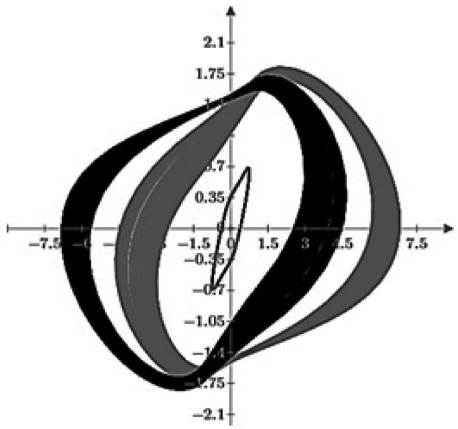

Рис. 1. Скрытые аттракторы системы (4).

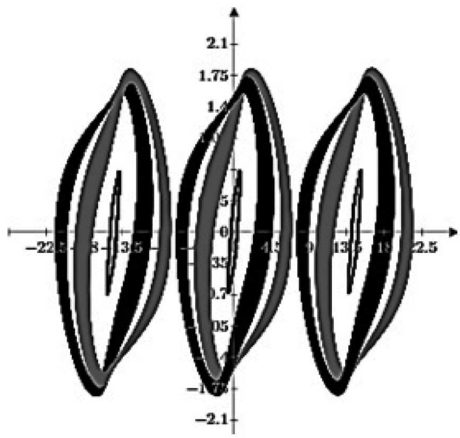

Рис. 2. 1-D-сеть аттракторов системы (4) с периодической нелинейностью.

система будет иметь 1-D-сеть идентичных скрытых аттракторов, представленных на рис. 2. Для отыскания этих аттракторов можно применить следующую процедуру: если x_0 — точка, принадлежащая какому-либо аттрактору системы (4), d — собственный вектор матрицы A_1, $q = \Delta d(c^T d)^{-1}$, тогда точки $x_0 + jq$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ принадлежат аттракторам 1-D-сети. Хаотические аттракторы, представленные на рис. 1 и 2, имеют показатели Ляпунова $(0.121, 0, -1.13)$ и размерность Каплана — Йорке 2.107.

Ясно, что изложенный метод не позволяет генерировать системы, содержащие сети аттракторов размерности, большей чем 1. В следующем разделе мы воспользуемся тем известным фактом, что многомерная система (2) всегда может быть приведена с помощью неособого линейного преобразования к системе каскадного типа. Последнее обстоятельство позволит нам, в частности, использовать систему (4) с передаточной функцией (5) для конструирования системы с 2-D-сетью идентичных аттракторов.

2. Генерирование систем с многомерной сетью аттракторов. Хорошо известно следующее утверждение [17]: *Две системы вида (2) с одной и той же передаточной функцией эквивалентны с точностью до неособого линейного преобразования их координат.* Если $\chi(p) = (c_0 + c_1 p + \ldots + c_{n-1}p^{n-1})(a_0 + a_1 p + \ldots + a_{n-1}p^{n-1} + p^n)^{-1}$, то, как показано в [17], система (2) неособым преобразованием $x = My$ может быть приведена к виду

$$\dot{y} = A_2 y + b_2\varphi(\sigma), \quad \sigma = {c_2}^T y,$$
$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{6}$$
$$b_2 = col(0, 0, \ldots, 0, 1), \quad c_2 = col(-c_0, -c_1, \ldots, -c_{n-1}).$$

При этом матрица преобразования M может быть найдена из системы уравнений

$$AM = A_2M, \quad b = Mb_2, \quad c_2 = M^T c. \tag{7}$$

Система (6) является системой каскадного типа. Если система (2) имела аттрактор, то и система (6), очевидно, также имеет аттрактор, который можно попытаться «клонировать», вводя в систему периодические функции. Тем самым можно попытаться построить мультистабильную систему, содержащую $(n-1)$-D-сеть аттракторов.

Проиллюстрируем сначала реализацию описанной идеи на примере рассмотренной в разделе 1 обобщенной системы Чуа (3), (4). Найдя передаточную функцию $\chi_1(p) = c^T(A_1 - pI)b$ для выбранных значений параметров, запишем систему (6):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= -a_0x - a_1y - a_2z + \varphi(\sigma), \\ \sigma &= -c_0x - c_1y - c_2z, \end{aligned} \tag{8}$$

где $a_0 = \alpha[\beta(m_1+1)+\gamma m_1]$, $a_1 = \gamma+\beta+\alpha\gamma(m_1+1)+\alpha m_1$, $a_2 = \gamma+\alpha(m_1+1)+1$, $c_0 = \alpha(\beta+\gamma)$, $c_1 = \alpha(1+\gamma)$, $c_2 = \alpha$. Найдя матрицу M из уравнений (7), определим точки, принадлежащие скрытым аттракторам преобразованной системы: $M^{-1}x_0 = (0.0247, 0.0126, -0.2569)$, $M^{-1}x_{1,2} = (\pm 0.0160, \mp 0.1933, \mp 0.1595)$. Зная точки, принадлежащие скрытым хаотическим аттракторам преобразованной системы, можем вычислить их показатели Ляпунова и размерность Каплана — Йорке. Как и ожидалось, они совпадают с характеристиками аттракторов, представленных на рис. 1.

Заменим теперь в системе (8) переменные y и z на π-периодические функции: $y \to 0.64\sin(2y), z \to 0.542\sin(2z)$. Новая система имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0.64\sin(2y), \\ \dot{y} &= 0.542\sin(2z), \\ \dot{z} &= -a_0x - 0.64a_1\sin(2y) - 0.542a_2\sin(2z) + \varphi(\sigma), \\ \sigma &= -c_0x - 0.64c_1\sin(2y) - 0.542c_2\sin(2z). \end{aligned} \tag{9}$$

Система (9) имеет 2-D-сеть скрытых аттракторов, которые могут быть обнаружены численным интегрированием с начальными условиями $(0.006, 0.043 \pm \pi k, -0.062 \pm \pi m)$ и $(\pm 0.047, \mp 0.135 \pm \pi k, \mp 0.225 \pm \pi m), k, m \in \mathbb{N}$. Тройка скрытых аттракторов этой сети, а также фрагмент 2-D-сети аттракторов системы (9) (проекция на плоскость (y, z)) представлены на рис. 3 и 4. Все идентичные хаотические аттракторы системы (9) имеют показатели Ляпунова $(0.126, 0, -0.986)$ и размерность Каплана — Йорке 2.138.

Обратимся теперь к системе, рассмотренной в работе [16]. Запишем эту систему в удобной для нас форме:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -z, \\ \dot{y} &= -y - (x-1)^2, \\ \dot{z} &= 1.7x + y. \end{aligned} \tag{10}$$

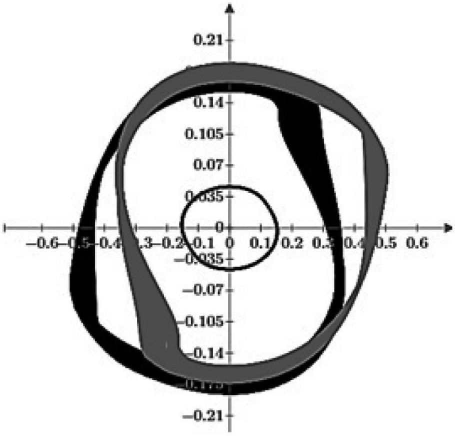

Рис. 3. Скрытые аттракторы системы (9) в окрестности точки (0,0,0).

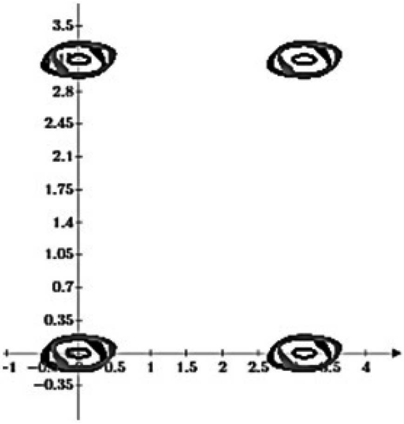

Рис. 4. Фрагмент 2-D-сети скрытых аттракторов системы (9).

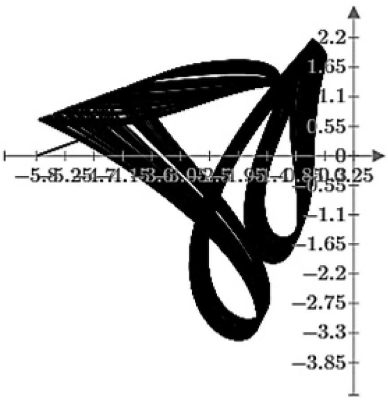

Рис. 5. Самовозбуждающийся аттрактор системы (10).

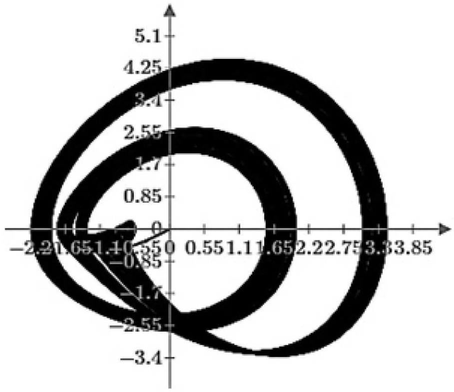

Рис. 6. Самовозбуждающийся аттрактор системы (11).

Система (10) имеет 2 состояния равновесия: $(0.5(3.7 \pm \sqrt{9.69}); -0.85(3.7 \pm \sqrt{9.69}); 0)$. При этом из окрестности одного из них, а именно, из точки $(3.4, -5.78, 0)$, возбуждается хаотический аттрактор с показателями Ляпунова $(0.044, 0, -1.044)$ и размерностью Каплана — Йорке 2.042. Проекция этого аттрактора на плоскость (y, z) представлена на рис. 5.

Очевидно, что система (10) является смещаемой по переменной z. Пользуясь этим обстоятельством, авторы работы [16] генерируют различные 1-D-сети идентичных хаотических аттракторов, заменяя в системе (10) переменную z периодическими функциями вида $m \sin(nz)$ и $m \cos(nz)$.

Воспользуемся здесь изложенным выше приемом для генерирования на основе системы (10) 2-D-сети хаотических аттракторов. Передаточная функция системы (10) имеет вид $\chi(p) = -(p^3 + p^2 + 1.7p + 1.7)^{-1}$. Поэтому после соответствующего

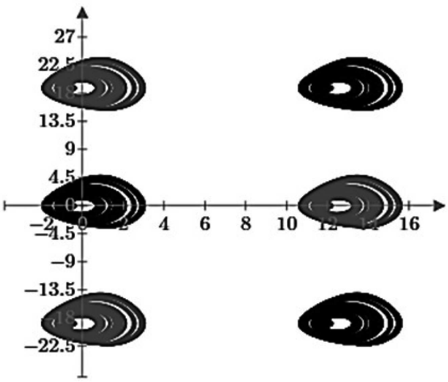

Рис. 7. Фрагмент 2-D-сети аттракторов системы (12) (проекция на плоскость (y, z)).

линейного преобразования: $x \to x, y \to -1.7x - z, z \to -y$, получим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= -1.7x - 1.7y - z + (x-1)^2. \end{aligned} \tag{11}$$

Аттрактор системы (11) визуализируется при численном интегрировании с начальным условием $(3.4, 0, 0)$. Его проекция на плоскость (y, z) представлена на рис. 6.

Заменив переменные y и z в системе (11) на периодические функции $y \to 3.1\sin(y/2)$, $z \to 3.406\sin(z/3)$, получим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3.1\sin(y/2), \\ \dot{y} &= 3.406\sin(z/3), \\ \dot{z} &= -1.7x - 5.27\sin(y/2) - 3.406\sin(z/3) + (x-1)^2. \end{aligned} \tag{12}$$

Система (12) имеет 2-D-сеть самовозбуждающихся хаотических аттракторов, фрагмент которой представлен на рис. 7. Все аттракторы этой сети имеют показатели Ляпунова $(0.099, 0, -1.011)$ и размерность Каплана — Йорке 2.098.

Заключение. В настоящей работе предлагаются различные подходы к генерированию экстремально мультистабильных систем, содержащих бесконечные сети аттракторов-клонов на основе многомерных моделей систем в форме Лурье. В частности, обсуждаются методы преобразования таких систем, позволяющие путем выбора специального базиса приводить их к системам каскадного типа, смещаемым по переменным. Таким образом, открывается возможность генерировать системы с бесконечной сетью хаотических аттракторов, используя многочисленные известные примеры существования хаотических аттракторов у систем в форме Лурье и не прибегая при этом к исчерпывающему компьютерному поиску.

Литература

1. *Guan Z. H., Huang F., Guan W.* Chaos-based image encryption algorithm // Phys. Lett. A. 2005. Vol. 346, No. 1–3. P. 153–157.

2. *Gao T., Chen Z.* A new image encryption algorithm based on hyper-chaos // Phys. Lett. A. 2008. Vol. 372, No. 4. P. 394–400.

3. *Xie E. Y., Li C., Yu S., Lu J.* On the cryptanalysis of Fridrich's chaotic image encryption scheme // Signal processing. 2017. Vol. 132. P. 150–154.

4. *Wang S., Kuang J., Li J., Luo Y., Lu H., Hu G.* Chaos-based secure communications in a large community // Phys. Rev. E. 2012. Vol. 66. Art. no. 065202R.

5. *Wang G., He S.* A quantitative study on detection and estimation of weak signals by using chaotic Duffing oscillators // IEEE Trans. on Circuits Syst.–I: Fund. Theor. Appl. 2003. Vol. 50, No. 7. P. 945–953.

6. *Liu Z., Zhu X. H., Hu W., Jiang F.* Principles of chaotic signal Radar // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2007. Vol. 17, No. 5. P. 1735.

7. *Леонов Г. А.* Эффективные методы поиска периодических колебаний в динамических системах // ПММ. 2010. Т. 74, № 1. С. 37–73.

8. *Брагин В. О., Вагайцев В. И., Кузнецов Н. В., Леонов Г. А.* Алгоритмы поиска скрытых колебаний в нелинейных системах. Проблемы Айзермана, Калмана и цепи Чуа // Известия РАН. Теория и системы управления. 2011. № 4. С. 3–36.

9. *Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Vagaitsev V. I.* Localization of hidden Chua's attractors // Physics Letters A. 2011. Vol. 375. P. 2230–2233.

10. *Dudkowski D., Jafari S., Kapitaniak T., Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Prasad A.* Hidden attractors in dynamical systems // Physics Reports. 2016. Vol. 637. P. 1–50.

11. *Burkin I. M., Nguen N. K.* Analytical-Numerical Methods of Finding Hidden Oscillations in Multidimensional Dynamical Systems // Diff. Equations. 2014. Vol. 50, No. 13. P. 1695–1717.

12. *Буркин И. М.* Скрытые аттракторы некоторых мультистабильных систем с бесконечным числом состояний равновесия // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18(4). С. 18–33.

13. *Li C., Sprott J. C., Hu W., Xu Y.* Infinite multistability in a self-reproducing chaotic system // Int J Bifurc. Chaos. 2017. Vol. 27, No. 10. Art. no. 1750160.

14. *Li C., Sprott J. C., Mei Y.* An infinite 2-D lattice of strange attractors // Nonlinear Dynamics. 2017. Vol. 89, No. 4. P. 2629–2639.

15. *Li C., Sprott J. C., Kapitaniak T., Lu T.* Infinite lattice of hyperchaotic strange attractors // Chaos, Solitons and Fractals. 2018. Vol. 109. P. 76–82.

16. *Li C., Thio W. J., Sprott J. C., Iu H. H. C., Xu Y.* Constructing Infinitely Many Attractors in a Programmable Chaotic Circuit // IEEE. 2018. Access 6: 29003.

17. *Леонов Г. А.* Теория управления. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2006.

Статья поступила в редакцию 9 мая 2019 г.;
после доработки 12 июня 2019 г.;
рекомендована в печать 13 июня 2019 г.

Контактная информация:

Буркин Игорь Михайлович — д-р физ.-мат. наук, проф.; i-burkin@yandex.ru
Кузнецова Оксана Игоревна — аспирант; oxxy4893@mail.ru

Generating extremely multistable systems based on Lurie form systems

I. M. Burkin, O. I. Kuznetsova

Tula State University, Lenina pr., 92, Tula, 300012, Russian Federation

For citation: Burkin I. M., Kuznetsova O. I. Generating extremely multistable systems based on Lurie form systems. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2019, vol. 6 (64), issue 4, pp. 555–563. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.403 (In Russian)

Chaotic signals and systems are widely used in image encryption, secure communications, weak signal detection and radar systems. In recent years, many researchers have focused on the design of systems that have an infinite number of coexisting chaotic attractors. In this article, we propose some approaches to generating self-reproducing systems with an infinite number of coexisting self-excited or hidden chaotic attractors with the same Lyapunov exponents, based on mathematical models of systems in Lurie form. The proposed approach makes it possible to generate extremely multistable systems, using numerous well-known examples of the existence of chaotic attractors in systems in Lurie form and without resorting to exhaustive computer search. Illustrating the methods proposed in the paper, we construct, in particular, extremely multistable systems with a 1-D and 2-D grid of hidden chaotic attractors using the generalized Chua system, in which the hidden attractors were first discovered by G. A. Leonov and N. V. Kuznetsov.

Keywords: dynamic system, chaos, coexisting chaotic attractors, Lyapunov exponents, Kaplan — Yorke dimension.

References

1. Guan Z. H., Huang F., Guan W., "Chaos-based image encryption algorithm", *Phys. Lett. A* **346**(1–3), 153–157 (2005).
2. Gao T., Chen Z., "A new image encryption algorithm based on hyper-chaos", *Phys. Lett. A* **372**(4), 394–400 (2008).
3. Xie E. Y., Li C., Yu S., Lu J., "On the cryptanalysis of Fridrich's chaotic image encryption scheme", *Signal processing* **132**, 150–154 (2017).
4. Wang S., Kuang J., Li J., Luo Y., Lu H., Hu G., "Chaos-based secure communications in a large community", *Phys. Rev. E* **66**, 065202R (2012).
5. Wang G., He S., "A quantitative study on detection and estimation of weak signals by using chaotic Duffing oscillators", *IEEE Trans. on Circuits Syst.–I: Fund. Theor. Appl.* **50**(7), 945–953 (2003).
6. Liu Z., Zhu X. H., Hu W., Jiang F., "Principles of chaotic signal Radar", *Int. J. Bifurcation and Chaos* **17**(5), 1735 (2007).
7. Leonov G. A., "Efficient Methods for the Search for Periodic Oscillations in Dynamical Systems", *Prikl. Mat. Mekh.* **74**(1), 37–49 (2010). (In Russian)
8. Bragin V. O., Vagaitsev V. I., Kuznetsov N. V., Leonov G. A., "Algorithms for Finding Hidden Oscillations in Nonlinear Systems: the Aizerman and Kalman Problems and Chua's Circuits", *Izv. Ross. Akad. Nauk. Teor. Sist. Upr.* **50**(4), 3–36 (2011). (In Russian)
9. Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Vagaitsev V. I., "Localization of hidden Chua's attractors", *Physics Letters A* **375**, 2230–2233 (2011).
10. Dudkowski D., Jafari S., Kapitaniak T., Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Prasad A., "Hidden attractors in dynamical systems", *Physics Reports* **637**, 1–50 (2016).
11. Burkin I. M., Nguen N. K., "Analytical-Numerical Methods of Finding Hidden Oscillations in Multidimensional Dynamical Systems", *Diff. Equations* **50**(13), 1695–1717 (2014).
12. Burkin I. M., "Hidden attractors of some multistable systems with infinite number of equilibria", *Chebyshevskiy sbornik* **18**(4), 18–33 (2017). (In Russian)
13. Li C., Sprott J. C., Hu W., Xu Y., "Infinite multistability in a self-reproducing chaotic system", *Int. J. Bifurc. Chaos* **27**(10), 1750160. (2017).
14. Li C., Sprott J. C., Mei Y., "An infinite 2-D lattice of strange attractors", *Nonlinear Dynamics* **89**(4), 2629–2639 (2017).
15. Li C., Sprott J. C, Kapitaniak T., Lu T., "Infinite lattice of hyperchaotic strange attractors", *Chaos, Solitons and Fractals* **109**, 76–82 (2018).
16. Li C., Thio W. J., Sprott J. C., Iu H. H. C., Xu Y., "Constructing Infinitely Many Attractors in a Programmable Chaotic Circuit", *IEEE* Access 6: 29003 (2018).
17. Leonov G. A., *Control theory* (St. Petersburg Univ. Press, St. Petersburg, 2006). (In Russian)

Received: May 9, 2019
Revised: June 12, 2019
Accepted: June 13, 2019

Authors' information:

Igor M. Burkin — i-burkin@yandex.ru
Oksana I. Kuznetsova — oxxy4893@mail.ru