МАТЕМАТИКА

УДК 519.2
MSC 60E99

Асимптотическая нормальность в задаче об эгоистичной парковке*

С. М. Ананьевский, Н. А. Крюков

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Ананьевский С. М., Крюков Н. А.* Асимптотическая нормальность в задаче об эгоистичной парковке // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 4. С. 592–607.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.405

В настоящей работе продолжены исследования одной из моделей дискретного аналога задачи Реньи, известной под названием «задача о парковке». Пусть n, i — целые, $n \geq 0$ и $0 \leq i \leq n-1$. На отрезок $[0, n]$ будем помещать открытый интервал $(i, i+1)$, где i — случайная величина, с равной вероятностью принимающая значения $0, 1, 2, \ldots, n-1$ для всех $n \geq 2$. Если $n < 2$, то говорим, что интервал не помещается. После размещения первого интервала образуются два свободных отрезка $[0, i]$ и $[i+1, n]$, которые заполняются интервалами единичной длины по тому же правилу, независимо друг от друга и т. д. По окончании процесса заполнения отрезка $[0, n]$ единичными интервалами между двумя любыми соседними интервалами расстояние будет не больше 1. Пусть X_n обозначает количество разместившихся интервалов. В работе авторов настоящей статьи, опубликованной в 2018 году, изучалось асимптотическое поведение первых моментов случайной величины X_n. В отличие от классического случая для математического ожидания, дисперсии и третьего центрального момента были получены точные выражения. В настоящей работе изучено асимптотическое поведение всех центральных моментов случайной величины X_n и доказана асимптотическая нормальность для X_n.

Ключевые слова: случайное заполнение, дискретная задача о «парковке», асимптотическое поведение моментов, асимптотическая нормальность.

Введение. История вопроса изучения задачи случайного заполнения отрезка большой длины единичными интервалами изложена авторами данной работы в статье [1]. Отметим, что абсолютное большинство работ на эту тему ранее было посвящено задачам, в которых закон распределения размещения единичных интер-

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-01-00393).

валов был непрерывным. Это, например, работы Реньи [2], Дворецкого и Роббинса [3], Нея [4]. Сюда же можно отнести работы авторов настоящей статьи [8] и [9]. В последние годы появились работы, в которых рассматривается дискретный закон распределения единичных интервалов, например, [5, 6].

Первоначальная постановка задачи следующая. На отрезке $[0, x]$, если $x \geq 1$, случайным образом размещается интервал единичной длины и занимает место $(t, t+1)$. Выражение «случайным образом» означает, что начало размещаемого интервала t является случайной величиной с равномерным законом распределения на отрезке $[0, x-1]$. После размещения первого интервала образуются два незанятых отрезка $[0, t]$ и $[t+1, x]$, на которых в свою очередь располагаются единичные интервалы независимо друг от друга и также с равномерным законом распределения на соответствующих отрезках. Этот процесс заполнения продолжается до тех пор, пока все расстояния между размещенными единичными интервалами не станут меньше единицы. Количество разместившихся интервалов обозначим N_x. Если $x < 1$, то $N_x = 0$. Величина N_x является случайной, изучению свойств распределения которой и посвящены упомянутые выше работы.

Эта постановка задачи в работе Реньи нашла следующую интерпретацию. На улице длины x случайным образом паркуются автомобили единичной длины в соответствии с описанным выше правилом. Тогда N_x обозначает количество запаркованных автомобилей. Эта интерпретация и дала название задаче как задача о «парковке» (parking problem). Реньи первым получил асимптотическое выражение для математического ожидания случайной величины N_x. Следующий шаг в изучении распределения случайной величины N_x был сделан Дворецким и Роббинсом. Они уточнили результат Реньи, а также доказали асимтотическую нормальность для N_x.

В настоящей работе изучается одна из моделей дискретного аналога задачи о парковке, которую авторы назвали задачей об эгоистичной парковке.

Основные результаты. Пусть n, i — целые, $n \geq 0$ и $0 \leq i \leq n-1$. На отрезок $[0, n]$ будем помещать открытый интервал единичной длины $(i, i+1)$, где i — случайная величина, с равной вероятностью принимающая значения $0, 1, 2, \ldots, n-1$ для всех $n \geq 2$. Если $n < 2$, то говорим, что интервал не помещается. После размещения первого интервала образуются два свободных отрезка $[0, i]$ и $[i+1, n]$, которые заполняются интервалами единичной длины по тому же правилу и т. д.

Можно привести следующую интерпретацию этого процесса заполнения. На размеченной парковке случайным образом останавливаются автомобили одинаковой длины, причем каждый следующий автомобиль останавливается так, что хотя бы с одной стороны у него сразу после его парковки остается свободное парковочное место. В частности, если место $(n-2, n-1)$ в какой-то момент оказалось занятым, а место $(n-1, n)$, находящееся на краю, еще свободно, то в дальнейшем на это место автомобиль запарковать нельзя. При этом очередной автомобиль может припарковаться так, что какой-то ранее запаркованный автомобиль окажется заблокированным, то есть рядом с ранее остановившимся автомобилем парковочные места окажутся занятыми. Это и объясняет появление в названии модели определения «эгоистичный».

По окончании процесса заполнения отрезка $[0, n]$ единичными интервалами между двумя любыми соседними интервалами расстояние будет не больше 1.

Пусть X_n обозначает количество разместившихся единичных интервалов.

Теорема 1. *Для описанной выше модели*

$$EX_n = n\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3n}\right) \quad \textit{при} \quad n \ge 2 \qquad \textit{и} \qquad EX_n = 0 \quad \textit{при} \quad n < 2, \tag{1}$$

$$DX_n = n\left(\frac{1}{45} + \frac{1}{45n}\right) \quad \textit{при} \quad n \ge 4, \qquad DX_3 = \frac{2}{9} \quad \textit{и} \quad DX_n = 0 \quad \textit{при} \quad n < 3, \tag{2}$$

$$E(X_n - EX_n)^3 = n\left(-\frac{1}{135} - \frac{11}{135n}\right) \quad \textit{при} \quad n \ge 4. \tag{3}$$

Теорема 2. *Для любого целого* $k \ge 2$

$$E(X_n - EX_n)^k = n^{[\frac{k}{2}]}(c_k + f_k(n)), \tag{4}$$

где c_k *— константа, зависящая только от* k, $f_k(n) = o(1)$ $(n \to \infty)$ *и* $[a]$ *обозначает целую часть* a.

Теорема 3. *Последовательность случайных величин*

$$\frac{X_n - EX_n}{\sqrt{DX_n}} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

слабо сходится к стандартному нормальному закону.

Доказательство теорем.

Доказательство теоремы 1 приведено в работе [1].

Доказательство теоремы 2. Введем следующее обозначение:

$$S_{n,k} = E(X_n - EX_n)^k.$$

Будем проводить доказательство теоремы индукцией по k.

База индукции:

$$S_{n,0} = 1,$$

$$S_{n,1} = 0,$$

$$S_{n,2} = n\left(\frac{1}{45} + f_2(n)\right), \quad \text{где} \quad f_2(n) = \frac{1}{45n} \to 0,$$

$$S_{n,3} = n\left(-\frac{1}{135} + f_3(n)\right), \quad \text{где} \quad f_3(n) = -\frac{11}{135n} \to 0.$$

Индукционный переход. Пусть для $k = 1, 2, \ldots, m-1$ соотношение (4) доказано. Будем доказывать для $k = m$. Введем обозначение: $X_{n,i}$ — количество разместившихся единичных интервалов на отрезке $[0, n]$ при условии, что первый интервал занял место $(i, i+1)$. Тогда верно равенство

$$X_{n,i} = X_i + X_{n-i-1} + 1,$$

где X_i, X_{n-i-1} — независимые случайные величины.

Рассмотрим

$$S_{n,k} = E(X_n - EX_n)^k = \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} E(X_l + X_{n-l-1} + 1 - EX_l - EX_{n-l-1} - 1)^k =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} E(X_l + X_{n-l-1} - EX_l - EX_{n-l-1})^k =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=0}^{k} C_k^j E\left(X_{l-1} - EX_{l-1}\right)^j E\left(X_{n-l} - EX_{n-l-1}\right)^{k-j} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=0}^{k} C_k^j S_{l-1,j} S_{n-l,k-j}.$$

Учитывая, что $S_{n,0} = 1$, представим $S_{n,m}$ для $m \geq 4$ следующим образом:

$$S_{n,m} = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{m-1} C_k^j S_{l-1,j} S_{n-l,m-j} + \frac{2}{n}\sum_{l=1}^{n} S_{l-1,m}. \qquad (6)$$

Пусть

$$r_{n,m} = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{m-1} C_k^j S_{l-1,j} S_{n-l,m-j} = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=2}^{m-2} C_k^j S_{l-1,j} S_{n-l,m-j}. \qquad (7)$$

Последнее равенство справедливо, так как $S_{n,1} = 0$. Тогда

$$S_{n,m} = \frac{2}{n}\sum_{l=1}^{n} S_{l-1,m} + r_{n,m} \quad \text{для} \quad m > 3. \qquad (8)$$

Положим $Q_{n,m} = \sum\limits_{i=0}^{n} S_{i,m}$. Тогда из (8) получаем

$$Q_{n,m} - Q_{n-1,m} = \frac{2}{n} Q_{n-1,m} + r_{n,m}$$

или

$$Q_{n,m} = \frac{n+2}{n} Q_{n-1,m} + r_{n,m}. \qquad (9)$$

Покажем, что при $n \geq 3$ выполняется равенство

$$Q_{n,m} = \frac{(n+2)(n+1)}{20} Q_{3,m} + \sum_{i=4}^{n} \frac{(n+2)(n+1)}{(i+2)(i+1)} r_{i,m}. \qquad (10)$$

Для $n = 3$ равенство (10) верно.

Пусть оно справедливо для некоторого $n \geq 3$. Покажем, что тогда равенство (10) выполняется и для $n + 1$:

$$
\begin{aligned}
Q_{n+1,m} &= Q_{n,m} + S_{n+1,m} = \\
&= \frac{(n+2)(n+1)}{20} Q_{3,m} + \sum_{i=4}^{n} \frac{(n+2)(n+1)}{(i+2)(i+1)} r_{i,m} + \frac{2}{n+1} Q_{n,m} + r_{n+1,m} = \\
&= \frac{n+3}{n+1} Q_{n,m} + r_{n+1,m} = \frac{(n+3)(n+2)}{20} Q_{3,m} + \sum_{i=4}^{n} \frac{(n+3)(n+2)}{(i+2)(i+1)} r_{i,m} + r_{n+1,m} = \\
&= \frac{(n+3)(n+2)}{20} Q_{3,m} + \sum_{i=4}^{n+1} \frac{(n+3)(n+2)}{(i+2)(i+1)} r_{i,m}.
\end{aligned}
$$

Итак, равенство (10) выполняется. Тогда

$$
S_{n,m} = Q_{n,m} - Q_{n-1,m} = \frac{n+1}{10} Q_{3,m} + \sum_{i=4}^{n-1} \frac{2(n+1)}{(i+2)(i+1)} r_{i,m} + r_{n,m}.
$$

Далее займемся поиском асимптотики для $r_{n,m}$, определенной в равенстве (7). Исходя из индукционного предположения можем написать

$$
S_{l-1,j} S_{n-l,m-j} = (l-1)^{[\frac{j}{2}]} (n-l)^{[\frac{m-j}{2}]} \left(c_j + f_j(l-1)\right) \left(c_{m-j} + f_{m-j}(n-l)\right).
$$

Введем обозначения:

$$
a = \left[\frac{j}{2}\right], \qquad b = \left[\frac{m-j}{2}\right], \quad \text{где} \quad [x] \quad \text{обозначает целую часть} \quad x.
$$

Тогда

$$
(l-1)^a = \sum_{k=0}^{a} C_a^k (-1)^{a-k} l^k \qquad \text{и} \qquad (n-l)^b = \sum_{t=0}^{b} C_b^t n^{b-t} (-l)^t.
$$

Далее

$$
\begin{aligned}
(l-1)^a (n-l)^b &= \sum_{k=0}^{a} \sum_{t=0}^{b} (-1)^{a-k+t} C_a^k C_b^t n^{b-t} l^{k+t} = \sum_{t=0}^{b} C_b^t n^{b-t} \sum_{k=0}^{a} (-1)^{a-k+t} C_a^k l^{k+t} = \\
&= \sum_{t=0}^{b} n^{b-t} \sum_{x=t}^{a+t} (-1)^{a-x+2t} C_a^{x-t} l^x = \sum_{k=0}^{b} C_b^{b-k} n^k \sum_{x=b-k}^{a+b-k} (-1)^{a-x+2b-2k} C_a^{x-b+k} l^x = \\
&= \sum_{k=0}^{b} C_b^k n^k \sum_{x=b-k}^{a+b-k} (-1)^{a+2b-x-2k} C_a^{x+k-b} l^x.
\end{aligned}
$$

Поэтому

$$
\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{n} (l-1)^a (n-l)^b &= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=0}^{b} C_b^k n^k \sum_{x=b-k}^{a+b-k} (-1)^{a+2b-x-2k} C_a^{x+k-b} l^x = \\
&= \sum_{k=0}^{b} C_b^k n^k \sum_{x=b-k}^{a+b-k} (-1)^{a+2b-x-2k} C_a^{x+k-b} \sum_{l=1}^{n} l^x.
\end{aligned}
$$

Заметим, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{x+1}}\sum_{l=1}^{n}l^x=\lim_{n\to\infty}\sum_{l=1}^{n}\frac{l^x}{n^{x+1}}=\frac{1}{x+1}.$$

Следовательно,

$$\sum_{l=1}^{n}l^x=n^{x+1}\left(\frac{1}{x+1}+f_{m,1,x}(n)\right),\quad \text{где}\quad \lim_{n\to\infty}f_{m,1,x}(n)=0.$$

Тогда

$$\sum_{l=1}^{n}(l-1)^a(n-l)^b=\sum_{k=0}^{b}C_b^kn^k\sum_{x=b-k}^{a+b-k}(-1)^{a+2b-x-2k}C_a^{x+k-b}n^{x+1}\left(\frac{1}{x+1}+f_{m,1,x}(n)\right).$$

Положим

$$f_{m,2,a,b,k}(n)=n^{-a-b+k-1}\sum_{x=b-k}^{a+b-k-1}(-1)^{a+2b-x-2k}C_a^{x+k-b}n^{x+1}\left(\frac{1}{x+1}+f_{m,1,x}(n)\right).$$

Так как в последней сумме число слагаемых конечно, то $f_{m,2,a,b,k}(n)=o(1)$ при $n\to\infty$. Тогда

$$\sum_{l=1}^{n}(l-1)^a(n-l)^b=$$

$$=\sum_{k=0}^{b}C_b^kn^k\left((-1)^{b-k}n^{a+b-k+1}\left(\frac{1}{a+b-k+1}+f_{m,1,a+b-k}(n)\right)+n^{a+b-k+1}f_{m,2,a,b,k}(n)\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{b}C_b^kn^kN^{a+b-k+1}\left(\frac{(-1)^{b-k}}{a+b-k+1}+f_{m,1,a+b-k}(n)+f_{m,2,a,b,k}(n)\right)=$$

$$=n^{a+b+1}\left(\sum_{k=0}^{b}C_b^k\frac{(-1)^{b-k}}{a+b-k+1}+f_{m,3,a,b}(n)\right),$$

где

$$f_{m,3,a,b}(n)=\sum_{k=0}^{b}C_b^k\left(f_{m,1,a+b-k}(n)+f_{m,2,a,b,k}(n)\right)=o(1)\qquad(n\to\infty).$$

Таким образом,

$$\sum_{l=1}^{n}(l-1)^a(n-l)^b=n^{a+b+1}\left(\sum_{k=0}^{b}C_b^k\frac{(-1)^{b-k}}{a+b-k+1}+f_{m,3,a,b}(n)\right).\tag{11}$$

Заметим, что

при нечетном m и любом j верно равенство $\left[\frac{j}{2}\right]+\left[\frac{m-j}{2}\right]=\left[\frac{m}{2}\right]$,

при четном m и при четном j верно равенство $\left[\frac{j}{2}\right]+\left[\frac{m-j}{2}\right]=\left[\frac{m}{2}\right]$, при четном m и при нечетном j верно равенство $\left[\dfrac{j}{2}\right]+\left[\dfrac{m-j}{2}\right]=\left[\dfrac{m}{2}\right]-1.$

Далее, подставляя выражения для a и b в (11), получаем

$$\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}=$$
$$=n^{\left(\left[\frac{j}{2}\right]+\left[\frac{m-j}{2}\right]+1\right)}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-j}{2}\right]-k}\frac{(-1)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]-k}C^k_{\left[\frac{m-j}{2}\right]}}{\left[\frac{j}{2}\right]+\left[\frac{m-j}{2}\right]-k}+f_{m,3,\left[\frac{j}{2}\right],\left[\frac{m-j}{2}\right]}(n)\right). \quad (12)$$

В случае четного m и четного j формула (12) имеет вид

$$\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}=n^{\left(\left[\frac{m}{2}\right]+1\right)}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-j}{2}\right]-k}\frac{(-1)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]-k}C^k_{\left[\frac{m-j}{2}\right]}}{\left[\frac{m}{2}\right]-k+1}+f_{m,3,\left[\frac{j}{2}\right],\left[\frac{m-j}{2}\right]}(n)\right),$$

при четном m и нечетном j —

$$\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}=n^{\left[\frac{m}{2}\right]}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-j}{2}\right]-k}\frac{(-1)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]-k}C^k_{\left[\frac{m-j}{2}\right]}}{\left[\frac{m}{2}\right]-k}+f_{m,3,\left[\frac{j}{2}\right],\left[\frac{m-j}{2}\right]}(n)\right)$$

и, когда m нечетное, (12) имеет следующий вид независимо от четности j:

$$\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}=n^{\left(\left[\frac{m}{2}\right]+1\right)}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-j}{2}\right]-k}\frac{(-1)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]-k}C^k_{\left[\frac{m-j}{2}\right]}}{\left[\frac{m}{2}\right]-k+1}+f_{m,3,\left[\frac{j}{2}\right],\left[\frac{m-j}{2}\right]}(n)\right).$$

Докажем следующее утверждение, которое сформулируем в виде леммы.

Лемма. *Справедливо равенство*

$$\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}(c_j+f_j(l-1))(c_{m-j}+f_{m-j}(n-l))=$$
$$=\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}c_jc_{m-j}+o\left(n^{\left[\frac{m}{2}\right]+1}\right). \quad (13)$$

Доказательство леммы. Рассмотрим левую часть равенства (13):

$$\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}(c_j+f_j(l-1))(c_{m-j}+f_{m-j}(n-l))=$$
$$=\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}c_jc_{m-j}+\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}c_jf_{m-j}(n-l)+$$

$$+\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}c_{m-j}f_j(l-1)+\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}f_j(l-1)f_{m-j}(n-l)=$$
$$=I_1(n,m,j)+I_2(n,m,j)+I_3(n,m,j)+I_4(n,m,j).$$

Будем доказывать, что при $i=2,3,4$ слагаемые $I_i(n,m,j)=o(n^{\left[\frac{m}{2}\right]+1})(n\to\infty)$.

Заметим, что существует такая константа $C_1(m)$, что при всех $k\le m-1$ верно неравенство $f_k(n)<C_1(m)$, поскольку $f_k=o(1)$. Кроме того, существует $C_2(m)$ такая, что для всех $k\le m-1$ выполнено неравенство $c_k<C_2(m)$.

Тогда

$$|I_2(n,m,j)|=\left|\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}f_{m-j}(n-l)c_j\right|\le$$
$$\le C_2(m)\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}\left|f_{m-j}(n-l)\right|,$$

$$|I_3(n,m,j)|=\left|\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}f_j(l-1)c_{m-j}\right|\le$$
$$\le C_2(m)\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}\left|f_j(l-1)\right|,$$

$$|I_4(n,m,j)|=\left|\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}f_j(l-1)f_{m-j}(n-l)\right|\le$$
$$\le C_1(m)\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}\left|f_j(l-1)\right|.$$

Покажем, что

$$n^{-\left[\frac{m}{2}\right]-1}\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}|f_j(l-1)|=o(1)\qquad(n\to\infty)\tag{14}$$

и

$$n^{-\left[\frac{m}{2}\right]-1}\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}|f_{m-j}(n-l)|=o(1)\qquad(n\to\infty).\tag{15}$$

В этом случае будет выполнено равенство

$$\left|\sum_{l=1}^{n}S_{l-1,j}S_{n-l,m-j}-\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}c_jc_{m-j}\right|=o\left(n^{\left[\frac{m}{2}\right]+1}\right)\quad(n\to\infty).\tag{16}$$

Соотношения (14) и (15) доказываются одинаково, поэтому рассмотрим (14).

Пусть $\varepsilon > 0$. Поскольку $f_j(n) = o(1)$, то найдется такое целое N_0, что для всех $n > N_0$ верно неравенство $f_j(n) < \varepsilon$. Представим сумму из (14) следующим образом:

$$\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}|f_j(l-1)| =$$
$$= \sum_{l=1}^{[g(n)]}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}|f_j(l-1)| + \sum_{l=[g(n)]+1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}|f_j(l-1)|,$$

где $g(n)$ — возрастающая положительная функция, вид которой мы уточним позже. Пусть $g(n) \to \infty$ и $g(n) < n$. Для достаточно больших n будет верно неравенство $g(n) > N_0$. Тогда

$$\sum_{l=[g(n)]+1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}|f_j(l-1)| \le \varepsilon \sum_{l=[g(n)]+1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]} \le$$
$$\le \varepsilon \sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}|f_j(l-1)| = \varepsilon n^{\left[\frac{j}{2}\right]+\left[\frac{m-j}{2}\right]+1}\left(A_{m,j} + o(1)\right),$$

где $A_{m,j}$ — константа, зависящая от m и j. Последнее равенство опирается на (12).

Отсюда

$$n^{-\left[\frac{m}{2}\right]-1}\sum_{l=[g(n)]+1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}|f_j(l-1)| \le \varepsilon\left(A_{m,j} + o(1)\right)$$

и за счет выбора ε левая часть может быть сделана как угодно малой.

Далее имеем следующую цепочку неравенств и равенств:

$$\sum_{l=1}^{[g(n)]}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}|f_j(l-1)| \le C_1(m)\sum_{l=1}^{[g(n)]}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}.$$

Вернемся к обозначениям: $a = \left[\frac{j}{2}\right]$ и $b = \left[\frac{m-j}{2}\right]$. Тогда правая часть предыдущего неравенства будет иметь вид

$$C_1(m)\sum_{k=0}^{b}C_b^k n^k \sum_{x=b-k}^{a+b-k}(-1)^{a+2b-x-2k}C_a^{x+k-b}\sum_{l=1}^{[g(n)]} l^x =$$
$$= C_1(m)\sum_{k=0}^{b}C_b^k n^k \sum_{x=b-k}^{a+b-k}(-1)^{a+2b-x-2k}C_a^{x+k-b}\left[g(n)\right]^{x+1}\left(\frac{1}{x+1} + o(1)\right) \le$$
$$\le C_1(m)\sum_{k=0}^{b}C_b^k \sum_{x=b-k}^{a+b-k}(-1)^{a+2b-x-2k}C_a^{x+k-b} n^k \left[g(n)\right]^{x+1}\left(\frac{1}{x+1} + o(1)\right) \le$$
$$\le C_1(m)n^b[g(n)]^{a+b+1}\sum_{k=0}^{b}C_b^k \sum_{x=b-k}^{a+b-k}(-1)^{a+2b-x-2k}C_a^{x+k-b}(1 + o(1)).$$

Если взять $g(n)=\ln n$, то за счет того, что в последнем выражении конечное число слагаемых, оно есть $o\left(n^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}(\ln n)^{\left[\frac{j}{2}\right]+\left[\frac{m-j}{2}\right]+2}\right)$ и поскольку $j\geq 2$, то

$$\sum_{l=1}^{[\ln n]}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}=o\left(n^{\left[\frac{m}{2}\right]}\right).$$

Отсюда следует

$$n^{-\left[\frac{m}{2}\right]-1}\sum_{l=1}^{[\ln n]}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}\to 0 \qquad (n\to\infty),$$

и соотношение (14) доказано. Как уже отмечалось, доказательство соотношения (15) такое же. Этим заканчивается доказательство леммы.

Из соотношения (16) и из леммы следует равенство

$$\sum_{j=2}^{m-2}\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}S_{l-1,j}S_{n-l,m-j}=\sum_{j=2}^{m-2}\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}c_jc_{m-j}+o\left(n^{\left[\frac{m}{2}\right]}\right).$$

Далее вычислим асимптотику $r_{n,m}=\frac{1}{n}\sum\limits_{l=1}^{n}\sum\limits_{j=2}^{m-2}C_m^jS_{l-1,j}S_{n-l,m-j}$. Если m — четное, то будем интересоваться только слагаемыми с четными j, так как при нечетных j скорость роста меньше.

Итак, пусть m — четное. Тогда

$$\begin{aligned}r_{n,m}&=\sum_{j=2}^{m-2}\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}C_m^jS_{l-1,j}S_{n-l,m-j}=\\&=\sum_{j=2}^{m-2}\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}C_m^j(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}c_jc_{m-j}+o\left(n^{\left[\frac{m}{2}\right]}\right)=\\&=\sum_{j=2}^{m-2}C_m^jc_jc_{m-j}\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}+o\left(n^{\left[\frac{m}{2}\right]}\right).\end{aligned}$$

Вспоминая, что при четных m

$$\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}=n^{\left[\frac{m}{2}\right]}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}\frac{(-1)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]-k}C^k_{\left[\frac{m-j}{2}\right]}}{\left[\frac{m}{2}\right]-k+1}+o(1)\right),$$

получаем

$$\begin{aligned}r_{n,m}&=n^{\left[\frac{m}{2}\right]}\sum_{j=2,j-\text{четное}}^{m-2}C_m^jc_jc_{m-j}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}\frac{(-1)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]-k}C^k_{\left[\frac{m-j}{2}\right]}}{\left[\frac{m}{2}\right]-k+1}\right)+o\left(n^{\left[\frac{m}{2}\right]}\right)=\\&=n^{\left[\frac{m}{2}\right]}\sum_{j=2,j-\text{четное}}^{m-2}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}\frac{(-1)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]-k}C_m^jc_jc_{m-j}C^k_{\left[\frac{m-j}{2}\right]}}{\left[\frac{m}{2}\right]-k+1}\right)+o\left(n^{\left[\frac{m}{2}\right]}\right).\end{aligned}$$

Если m — нечетное, то все слагаемые имеют одинаковую скорость роста и в этом случае

$$r_{n,m}=n^{\left[\frac{m}{2}\right]}\sum_{j=2}^{m-2}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}\frac{(-1)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]-k}C_m^j c_j c_{m-j}C^k_{\left[\frac{m-j}{2}\right]}}{\left[\frac{m}{2}\right]-k+1}\right)+o\left(n^{\left[\frac{m}{2}\right]}\right).$$

Если ввести обозначение

$$d_m=\sum_{j=2}^{m-2}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}\frac{(-1)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]-k}C_m^j c_j c_{m-j}C^k_{\left[\frac{m-j}{2}\right]}}{\left[\frac{m}{2}\right]-k+1}\right), \tag{17}$$

то последнее равенство запишется следующим образом:

$$r_{n,m}=n^{\left[\frac{m}{2}\right]}(d_m+h_m(n)), \tag{18}$$

где $h_m(n)=o(1)$.

Далее вспомним, что

$$S_{n,m}=\frac{n+1}{10}Q_{3,m}+r_{n,m}+\sum_{i=4}^{n-1}\frac{2(n+1)}{(i+2)(i+1)}r_{i,m}.$$

Для окончания доказательства теоремы необходимо получить асимптотику для $\sum\limits_{i=4}^{n-1}\frac{2(n+1)}{(i+2)(i+1)}r_{i,m}$.

Воспользовавшись соотношением (18), запишем

$$\sum_{i=4}^{n-1}\frac{2(n+1)}{(i+2)(i+1)}r_{i,m}=\sum_{i=4}^{n-1}\frac{2(n+1)}{(i+2)(i+1)}i^{\left[\frac{m}{2}\right]}(d_m+h_m(i))=$$
$$=\sum_{i=4}^{n-1}\frac{2(n+1)}{(i+2)(i+1)}i^{\left[\frac{m}{2}\right]}d_m+\sum_{i=4}^{n-1}\frac{2(n+1)}{(i+2)(i+1)}i^{\left[\frac{m}{2}\right]}h_m(i)$$

и покажем, что

$$\sum_{i=4}^{n-1}\frac{2(n+1)}{(i+2)(i+1)}i^{\left[\frac{m}{2}\right]}h_m(i)=o\left(n^{\left[\frac{m}{2}\right]}\right). \tag{19}$$

Представим последнюю сумму в виде двух сумм:

$$\sum_{i=4}^{n-1}\frac{2(n+1)}{(i+2)(i+1)}i^{\left[\frac{m}{2}\right]}h_m(i)=$$
$$=\sum_{i=4}^{[\ln n]}\frac{2(n+1)}{(i+2)(i+1)}i^{\left[\frac{m}{2}\right]}h_m(i)+\sum_{i=[\ln n]+1}^{n-1}\frac{2(n+1)}{(i+2)(i+1)}i^{\left[\frac{m}{2}\right]}h_m(i)=T_1+T_2.$$

Поскольку $h_m(n)=o(1)$, то существует $C>0$ такое, что $h_m(n)<C$ для всех n.

Тогда

$$T_1 \le C \sum_{i=4}^{[\ln n]} \frac{2(n+1)}{(i+2)(i+1)} i^{\left[\frac{m}{2}\right]} \le 2C(n+1)\left[\ln n\right]^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{1}{5} = o\left(n^{\left[\frac{m}{2}\right]}\right) \quad \text{при} \quad m > 3.$$

Далее отмечаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует N_0 такое, что для всех $k > N_0$ выполнено неравенство $h_m(k) < \varepsilon$.

Пусть $\ln n > N_0 + 1$. Тогда

$$T_2 \le \varepsilon \sum_{i=[\ln n]+1}^{n-1} \frac{2(n+1)}{(i+2)(i+1)} i^{\left[\frac{m}{2}\right]} \le \varepsilon 2(n+1) \sum_{i=4}^{n-1} i^{\left[\frac{m}{2}\right]-2} =$$

$$= 2\varepsilon(n+1) n^{\left[\frac{m}{2}\right]-1} \left(\frac{1}{\left[\frac{m}{2}\right]-1} + o(1)\right) = 2\varepsilon n^{\left[\frac{m}{2}\right]} \left(\frac{1}{\left[\frac{m}{2}\right]-1} + o(1)\right).$$

Следовательно, $n^{-\left[\frac{m}{2}\right]} T_2 \le 2\varepsilon \left(\frac{1}{\left[\frac{m}{2}\right]-1} + o(1)\right)$, что приводит к (19).

Итак,

$$\sum_{i=4}^{n-1} \frac{2(n+1)}{(i+2)(i+1)} r_{i,m} = 2(n+1) d_m \sum_{i=4}^{n-1} \frac{i^{\left[\frac{m}{2}\right]}}{(i+1)(i+2)} + o\left(n^{\left[\frac{m}{2}\right]}\right).$$

Найдем асимптотику для $\sum\limits_{i=4}^{n-1} \frac{i^k}{(i+1)(i+2)}$, где $k = \left[\frac{m}{2}\right]$. Получаем

$$n^{-(k-1)} \sum_{i=4}^{n-1} \frac{i^k}{(i+1)(i+2)} =$$

$$= n^{(k-1)} \left(\sum_{i=4}^{n-1} \frac{i^k}{i+1} - \sum_{i=4}^{n-1} \frac{i^k}{i+2}\right) = n^{(k-1)} \left(\sum_{i=5}^{n} \frac{(i)^k}{i} - \sum_{i=6}^{n+1} \frac{(i-2)^k}{i}\right) =$$

$$= n^{-(k-1)} \left(\sum_{i=5}^{n} i^{k-1} - k \sum_{i=5}^{n} i^{k-2} + \sum_{i=5}^{n} \sum_{l=2}^{k} C_k^l i^l (-1)^{k-l} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=6}^{n+1} i^{k-1} + 2k \sum_{i=6}^{n+1} i^{k-2} - \sum_{i=6}^{n+1} \sum_{l=2}^{k} C_k^l i^l (-2)^{k-l}\right) =$$

$$= n^{-(k-1)} \left(5^{k-1} - (n+1)^{k-1} - k5^{k-2} + \sum_{i=6}^{n} i^{k-2} + 2k(n+1)^{k-2}\right) + o(1) =$$

$$= -1 + \frac{k}{k-1} + o(1).$$

Следовательно,

$$\sum_{i=4}^{n-1} \frac{i^{\left[\frac{m}{2}\right]}}{(i+2)(i+1)} = \frac{1}{\left[\frac{m}{2}\right]-1} n^{\left[\frac{m}{2}\right]-1} + o\left(n^{\left[\frac{m}{2}\right]-1}\right)$$

и это означает, что

$$\sum_{i=4}^{n-1} \frac{2(n+1)}{(i+2)(i+1)} r_{i,m} = \frac{2d_m}{\left[\frac{m}{2}\right]-1} n^{\left[\frac{m}{2}\right]} + o\left(n^{\left[\frac{m}{2}\right]-1}\right).$$

Тогда

$$S_{n,m} = n^{\left[\frac{m}{2}\right]} \left(d_m + \frac{2d_m}{\left[\frac{m}{2}\right]-1} + o(1) \right) = n^{\left[\frac{m}{2}\right]} \left(\frac{\left[\frac{m}{2}\right]+1}{\left[\frac{m}{2}\right]-1} d_m + o(1) \right) = n^{\left[\frac{m}{2}\right]} \left(c_m + o(1)\right),$$

где

$$c_m = \frac{\left[\frac{m}{2}\right]+1}{\left[\frac{m}{2}\right]-1} d_m. \tag{20}$$

Таким образом соотношение (4) выполнено и для $k = m$. Этим доказательство теоремы 2 заканчивается.

Доказательство теоремы 3. Для того, чтобы показать, что из теоремы 2 следует теорема 3, воспользуемся результатом, который можно найти в [7, стр. 390], и формулировку которого приведем здесь.

Теорема о слабой сходимости. *Пусть распределение случайной величины Y однозначно определяется ее моментами, а случайные величины Y_n при $n = 1, 2, \ldots$ имеют моменты любого порядка. Пусть*

$$\lim_{n\to\infty} EY_n^k = EY^k \quad \textit{для всех} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Тогда Y_n слабо сходятся к Y.

Если $m = 2l+1$, то

$$E\left(\frac{X_n - EX_n}{\sqrt{DX_n}}\right)^m = \frac{n^{\left[\frac{m}{2}\right]}(c_m + f_m(n))}{\left(n\left(\frac{1}{45} + \frac{1}{45n}\right)\right)^{\frac{m}{2}}} = \frac{(c_m + f_m(n))}{n^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{45} + \frac{1}{45n}\right)^{\frac{m}{2}}} \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{21}$$

В случае $m = 2l$ получаем следующее равенство:

$$E\left(\frac{X_n - EX_n}{\sqrt{DX_n}}\right)^m = \frac{c_{2l} + f_{2l}(n)}{\left(\frac{1}{45} + \frac{1}{45n}\right)^l}. \tag{22}$$

Поскольку $f_{2l}(n) = o(n)$, то нам достаточно показать, что

$$c_{2l} = (c_2)^l (2l-1)!!, \tag{23}$$

где $c_2 = \frac{1}{45}$.

Для доказательства этого применим индукцию. Сначала отметим, что для $l = 1$ равенство верно. Пусть далее оно верно для всех $l < m$. Докажем его для $l = m$. Из соотношения (20) и выражения для d_{2m} имеем

$$c_{2m} = \frac{m+1}{m-1} \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=0}^{m-j} \frac{(-1)^{m-j-k} C_{m-j}^k C_{2m}^{2j} c_{2j} c_{2m-2j}}{m-k+1} =$$

$$= \frac{m+1}{m-1} \sum_{j=1}^{m-1} C_{2m}^{2j} c_{2j} c_{2m-2j} \sum_{k=0}^{m-j} \frac{(-1)^{m-j-k}}{m-k+1} C_{m-j}^k.$$

Определим значение $\sum\limits_{k=0}^{m-j}\frac{(-1)^{m-j-k}}{m-k+1}C_{m-j}^k$. Для этого рассмотрим производную

$$\left(\sum_{k=0}^{m-j}\frac{(-1)^{m-j-k}}{m-k+1}C_{m-j}^k x^{m-k+1}\right)' = \sum_{k=0}^{m-j}(-1)^{m-j-k}C_{m-j}^k x^{m-k} =$$

$$= (-1)^{m-j}x^m\sum_{k=0}^{m-j}C_{m-j}^k(-x)^{-k} = (-1)^{m-j}x^m\left(1-\frac{1}{x}\right)^{m-j} =$$

$$= (-1)^{m-j}(x-1)^{m-j}x^j = (1-x)^{m-j}x^j.$$

Тогда

$$\sum_{k=0}^{m-j}\frac{(-1)^{m-j-k}}{m-k+1}C_{m-j}^k x^{m-k+1} = \int\limits_0^x(1-t)^{m-j}t^j\,dt.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{m-j}\frac{(-1)^{m-j-k}}{m-k+1}C_{m-j}^k = \int\limits_0^1(1-t)^{m-j}t^j\,dt.$$

Вернемся к выражению для c_{2m} и применим индукционное предположение:

$$c_{2m} = \frac{m+1}{m-1}\sum_{j=1}^{m-1}C_{2m}^{2j}c_{2j}c_{2m-2j}\int\limits_0^1(1-t)^{m-j}t^j\,dt =$$

$$= (c_2)^m\frac{m+1}{m-1}\sum_{j=1}^{m-1}C_{2m}^{2j}(2j-1)!!(2m-2j-1)!!\int\limits_0^1(1-t)^{m-j}t^j\,dt.$$

Осталось заметить, что

$$C_{2m}^{2j} = \frac{(2m)!}{(2j)!(2m-2j)!} = \frac{m!(2m-1)!!}{j!(m-j)!(2j-1)!!(2m-2j-1)!!}.$$

Продолжая предыдущую цепочку равенств, получаем

$$c_{2m} = (c_2)^m\frac{m+1}{m-1}(2m-1)!!\sum_{j=1}^{m-1}C_m^j\int\limits_0^1(1-t)^{m-j}t^j\,dt =$$

$$= (2m-1)!!\frac{m+1}{m-1}\int\limits_0^1\sum_{j=1}^{m-1}C_m^j t^j(1-t)^{m-j}\,dt = (c_2)^m(2m-1)!!,$$

так как

$$\int\limits_0^1\sum_{j=1}^{m-1}C_m^j t^j(1-t)^{m-j}dt = \int\limits_0^1\left((1-t+t)^m-(1-t)^m-t^m\right)dt = \frac{m-1}{m+1}.$$

Таким образом, выполнены соотношения (21) и (23) и теорема 3 доказана.

Литература

1. *Ананьевский С. М., Крюков Н. А.* Задача об эгоистичной парковке // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 4. С. 549–555.

2. *Renyi A.* On a one-dimensional problem concerning space-filling // Publ. of the Math. Inst. of Hungarian Acad. of Sciences. 1958. Vol. 3. P. 109–127.

3. *Dvoretzky A., Robbins H.* On the "parking" problem // Publ. of the Math. Inst. of Hungarian Acad. of Sciences. 1964. Vol. 9. P. 209–226.

4. *Ney P. E.* A random interval filling problem // Annals of Math. Statist. 1962. Vol. 33. P. 702–718.

5. *Clay M. P., Simanyi N. J.* Renyi's parking problem revisited // ArXiv:1406.1781v1[math.PR] 29 Dec 2014

6. *Gerin L.* The Page-Renyi parking process // ArXiv:1411.8002v1[math.PR] 28 Nov 2014

7. *Billingsley P.* Probability and Measure. Third Edition, New York: A Wiley-Interscience Publication, John Wiley Sons, 1985.

8. *Ананьевский С. М.* Некоторые обобщения задачи о «парковке» // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3 (61). Вып. 4. С. 525–532. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.401

9. *Ananjevskii S. M.* The "parking" problem for segments of different length // Journal of Mathematical Sciences. 1999. Vol. 93. P. 259–264. https://doi.org/10.1007/BF02364808

Статья поступила в редакцию 5 мая 2019 г.;
после доработки 15 мая 2019 г.;
рекомендована в печать 13 июня 2019 г.

Контактная информация:

Ананьевский Сергей Михайлович — канд. физ.-мат. наук, доц.; ananjevskii@mail.ru
Крюков Николай Алексеевич — аспирант; kryuknik@gmail.com

Asymptotic normality in the problem of selfish parking

S. M. Ananjevskii, N. A. Kryukov

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Ananjevskii S. M., Kryukov N. A. Asymptotic normality in the problem of selfish parking. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2019, vol. 6 (64), issue 4, pp. 592–607. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.405 (In Russian)

In the present work we continue to study one of the models of a discrete analogue of the Renyi problem, known as the "parking problem". Let n, i be integers satisfying $n \geq 0$ and $0 \leq i \leq n-1$. We place an open interval $(i, i+1)$ in the segment $[0, n]$ with i being a random variable taking values $0, 1, 2, \ldots, n-1$ with equal probability for all $n \geq 2$. If $n < 2$ we say that the interval does not fit. After placing the first interval two free segments $[0, i]$ and $[i+1, n]$ are formed and independently filled with the intervals of unit length according to the same rule, etc. At the end of the filling process the distance between any two adjacent unit intervals is at most 1. Let X_n denote the number of the unit intervals placed. In the previous work of the authors, published in 2018, the asymptotic behavior of the first moments of the random variable X_n was studied. In contrast to the classical case, the exact expressions were obtained for the expectation, variance, and third central moments. In this paper the asymptotic behavior of all central moments of the random variable X_n is studied and the asymptotic normality is proved for X_n.

Keywords: random filling, discrete "parking" problem, asymptotic behavior of moments, asymptotic normality.

References

1. Ananjevskii S. M., Kryukov N. A., "The problem of selfish parking", *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics* **51**, issue 4, 322–326 (2018). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.402

2. Renyi A., "On a one-dimensional problem concerning space-filling", *Publ. of the Math. Inst. of Hungarian Acad. of Sciences* **3**, 109–127 (1958).

3. Dvoretzky A., Robbins H., "On the "parking" problem", *Publ. of the Math. Inst. of Hungarian Acad. of Sciences* **9**, 209–226 (1964).

4. Ney P. E., "A random interval filling problem", *Annals of Math. Statist.* **33**, 702–718 (1962).

5. Clay M. P., Simanyi N. J., "Renyi's parking problem revisited", ArXiv:1406.1781v1[math.PR] 29 Dec 2014

6. Gerin L., "The Page-Renyi parking process", ArXiv:1411.8002v1[math.PR] 28 Nov 2014

7. Billingsley P., *Probability and Measure* (Third Edition, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley Sons, New York, 1985).

8. Ananjevskii S. M., "Generalizations of the parking problem", *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics* **49**, issue 4, 299–304 (2016). https://doi.org/10.3103/S1063454116040026

9. Ananjevskii S. M., "The "parking" problem for segments of different length", *Journal of Mathematical Sciences* **93**, 259–264 (1999). https://doi.org/10.1007/BF02364808

Received: May 5, 2019
Revised: May 15, 2019
Accepted: June 13, 2019

Authors' information:

Sergey M. Ananjevskii — ananjevskii@mail.ru
Nikolay A. Kryukov — kryuknik@gmail.com