УДК 517.537 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 4
MSC 30E10

Целые функции порядка 1/2 в приближении функций на полуоси*

О. В. Сильванович[1], *Н. А. Широков*[2]

[1] Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики,
Российская Федерация, 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

[2] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Сильванович О. В., Широков Н. А.* Целые функции порядка 1/2 в приближении функций на полуоси // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 4. С. 627–635.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.408

В настоящей работе доказывается теорема о приближении функций из класса Гёльдера на счетном объединении отрезков, лежащих на положительном луче, с помощью целых функций порядка 1/2, ограниченных на этом луче. Задачи о приближении целых функций на подмножествах полуоси с помощью целых функций порядка 1/2 тесно связаны с задачами приближения функций на подмножествах всей оси с помощью целых функций экспоненциального типа, но имеют при этом свою специфику. В данной работе рассматриваются отрезки I_n, длина которых имеет порядок n, и расстояние между I_n и I_{n+1} тоже имеет порядок n. В предыдущих работах рассматривались случаи всей полуоси или объединения конечного числа отрезков и луча. Как и для задачи приближения функций из класса Гёльдера на объединении счетного множества отрезков на всей оси, оказывается, что скорость приближения в окрестности концов отрезков при увеличении типа функций выше, чем в окрестности середины отрезков.

Ключевые слова: классы Гёльдера, аппроксимация, целые функции порядка 1/2, подмножество полуоси.

В отличие от целых функций экспоненциального типа, имеющих порядок 1, целые функции порядка 1/2 в теории аппроксимации появились пока лишь в нескольких работах [1, 2]. Однако представляется интересным перенесение ряда результатов, известных для целых функций экспоненциального типа, на приближения с помощью целых функций порядка 1/2. Данная работа мотивирована статьями авторов [3–5], в которых конструктивно описан класс функций $\Lambda_M^{r+\omega}(E)$ на дизъюнктном множестве отрезков E вещественной оси, где $\Lambda_M^{r+\omega}(E) = \{f : \forall x_1, x_2 \in E : |f^{(r)}(x_2) - f^{(r)}(x_1)| \le c_f \omega(|x_2 - x_1|),\ |f(x)| \le M,\ x \in E\}$. Скорость приближения целыми функциями экспоненциального типа на дизъюнктном объединении отрезков не является равномерной, вблизи концов отрезков она выше, чем в окрестности середин отрезков. Как оказывается, при описании классов функций с помощью приближения целыми функциями порядка 1/2 имеется аналогичный эффект. Вопросы о приближении на всей оси и на полуоси тесно связаны, при этом изучение какого-то класса гладких функций на полуоси приводит к классу функций на оси, гладкость в котором зависит от веса. Перейдем к формулировкам результатов. Пусть

*Работа Широкова Н. А. поддержана грантом РФФИ (№ 17-01-00607-а).

$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ — подмножество полуоси $[1;\infty)$, $I_1 = [1, b_1]$, $I_n = [a_n, b_n]$, $n \geq 2$, $1 = a_1 < b_1 < a_2 < \ldots < b_n < a_{n+1}, J_n \stackrel{\text{def}}{=} (b_n, a_{n+1})$, $n \geq 1$. Предполагаем, что существуют постоянные $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$ такие, что для всякого n выполнены соотношения

$$c_1 n \leq b_n - a_n \leq c_2 n, \tag{1}$$

$$c_3 n \leq a_{n+1} - b_n \leq c_4 n. \tag{2}$$

Пусть $0 < \alpha < 1$, положим $\omega_\alpha(t) = t^\alpha$ и обозначим $H_1^{r+\alpha}(E) = \Lambda_1^{r+\omega_\alpha}(E)$. Через C_σ обозначим множество целых функций порядка $1/2$ и типа $\leq \sigma$ таких, что для $F \in C_\sigma$ выполнено

$$|F(x)| \leq c_F, \quad x \in [0,\infty). \tag{3}$$

Отметим, что условие (3) влечет неравенство

$$|F(z)| \leq c_F e^{\sigma |\mathrm{Im}\sqrt{z}|}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{4}$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть функция $f \in H_1^{r+\alpha}(E)$. Тогда существуют постоянные c_5 и c_6, зависящие от f, E, r и α такие, что для любого $\sigma \geq 1$ найдется функция $F_\sigma \in C_\sigma$ такая, что справедливо неравенство*

$$|f(x) - F_\sigma(x)| \leq \min\left(c_5 \frac{1}{\sigma^{r+\alpha}}\left(\sqrt{(x-a_n)(b_n-x)} + \frac{n}{\sigma}\right)^{r+\alpha}, c_6\right), \quad x \in I_n,\ n \geq 1. \tag{5}$$

Мы будем доказывать теорему 1, переводя задачу приближения функции, заданной на подмножестве полуоси с помощью целых функций порядка $1/2$, в задачу приближения функции, заданной на подмножестве оси с помощью целых функций порядка 1. Нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

1. Леммы о производных.

Лемма 1. *Пусть комплекснозначная функция f задана на промежутке $[0;A]$, $A \geq 1$ и удовлетворяет условиям $|f(x)| \leq 1$, $|f^{(r)}(x_2) - f^{(r)}(x_1)| \leq b|x_2 - x_1|^\alpha, r \geq 1$, $0 < \alpha < 1$, $x_1, x_2 \in [0;A]$. Тогда существуют постоянные $b_1, \ldots, b_r$, зависящие только от b, r и α такие, что справедливы оценки*

$$|f^{(k)}(x)| \leq b_k, \quad k = 1, \ldots, r. \tag{6}$$

Утверждения, аналогичные лемме 1, изучались в значительном числе работ [6–12], в которых были получены точные постоянные в неравенствах, подобных (6). Рассуждения в указанных работах достаточно сложны, поэтому мы сочли удобным для читателя привести простое доказательство оценок (6) с менее точными, чем в [6–12], значениями постоянных b_k. Авторы выражают благодарность О. Л. Виноградову за упомянутые ссылки.

Доказательство. Пусть $n \leq A \leq n+1$, $F(x) = f(nx)$, $x \in [0; \frac{A}{n}]$. Тогда имеем соотношения

$$|F(x)| \leq 1, \quad F^{(k)}(x) = n^k f^{(k)}(nx), \quad 1 \leq k \leq r,$$

$$|F^{(r)}(x_2) - F^{(r)}(x_1)| \leq b n^{r+\alpha} |x_2 - x_1|^\alpha, \quad x \in [0; A/n].$$

Пусть вначале функция f (и, значит, F) вещественна, $a = \frac{A}{n}$, $1 \le a < 2$. Разделим отрезок $[0; a]$ на n равных отрезков I_j, $1 \le j \le n$, длины $\frac{a}{n}$, и положим $e_k = 2^k - 1$, $k \ge 1$. Отметим, что $e_{k+1} = 2e_k + 1$. Разделим каждый отрезок I_j на e_r одинаковых отрезков $\sigma_{j\nu}$, $1 \le \nu \le e_r$, длины $\frac{a}{e_r n}$. Введем также обозначения для следующих объединений отрезков $\sigma_{j\nu}$. Положим $\tau_{jr} = \sigma_{j2^{r-1}}$ (нумерации всех упомянутых и нижеследующих отрезков осуществляются в обычном порядке: отрезок σ_{jk_1} лежит правее отрезка σ_{jk_2} при $k_1 > k_2$), $\Sigma^1_{jr-1} = \bigcup\limits_{\nu=1}^{e_{r-1}} \sigma_{j\nu}$, $\Sigma^2_{jr-1} = \bigcup\limits_{\nu=2^{r-1}}^{e_r} \sigma_{j\nu}$. Отрезки Σ^1_{jr-1} и Σ^2_{jr-1} состоят из объединения e_{r-1} отрезков $\sigma_{j\nu}$ каждый. Выберем в каждом из них средний отрезок $\sigma_{j\nu}$ и тот из них, который лежит в Σ^1_{jr-1}, обозначим τ^1_{jr-1}, а лежащий в Σ^2_{jr-1} обозначим τ^2_{jr-1}. Множества $\Sigma^1_{jr-1} \setminus \tau^1_{jr-1}$ и $\Sigma^2_{jr-1} \setminus \tau^2_{jr-1}$ состоят каждое из двух отрезков длины $e_{r-2} \cdot \frac{a}{e_r n}$ каждое. Обозначим эти новые отрезки Σ^μ_{jr-2}, $1 \le \mu \le 4$, нумеруя их по μ слева направо. Продолжаем конструкцию, пока не получатся отрезки Σ^μ_{j1}, $1 \le \mu \le 2$, нумеруя их по μ слева направо. Продолжаем конструкцию, пока не получатся отрезки Σ^μ_{j1}, $1 \le \mu \le 2^{r-1}$, длины $\frac{a}{e_r n}$, т. е. каждый отрезок Σ^μ_{j1}, $1 \le \mu \le 2^{r-1}$, является одним из отрезков $\sigma_{j\nu}$. Заметим, что по построению между любыми отрезками $\Sigma^{2\mu-1}_{jk}$ и $\Sigma^{2\mu}_{jk}$ находится отрезок τ^μ_{jk+1} длины $\frac{a}{e_r n}$. Рассмотрим теперь любой отрезок Σ^μ_{j1}. Пусть α^μ_{j1} и β^μ_{j1} — его концы. По теореме Лагранжа найдется точка $x^\mu_{j1} \in \Sigma^\mu_{j1}$ такая, что

$$F'(x^\mu_{j1})(\beta^\mu_{j1} - \alpha^\mu_{j1}) = F(\beta^\mu_{j1}) - F(\alpha^\mu_{j1}),$$

и в силу условия $|F(x)| \le 1$ получаем, что

$$|F'(x^\mu_{j1})| \le \frac{2}{\beta^\mu_{j1} - \alpha^\mu_{j1}} = \frac{2ne_r}{a}, \quad 1 \le j \le n, \quad 1 \le \mu \le 2^{r-1}. \tag{7}$$

По построению точки $x^{2\mu-1}_{j1}$ и $x^{2\mu}_{j1}$, $\mu \le 2^{r-2}$, лежат на отрезке Σ^μ_{j2} и их разделяет отрезок τ^μ_{j2}. Вновь по теореме Лагранжа существует точка x^μ_{j2}, лежащая на интервале $(x^{2\mu-1}_{j1}; x^{2\mu}_{j1})$, такая, что

$$F''(x^\mu_{j2})(x^{2\mu}_{j1} - x^{2\mu-1}_{j1}) = F'(x^{2\mu}_{j1}) - F'(x^{2\mu-1}_{j1}),$$

откуда, применяя (7), находим, что

$$|F''(x^\mu_{j2})| \le \frac{2 \cdot \dfrac{2ne_r}{a}}{x^{2\mu}_{j1} - x^{2\mu-1}_{j1}} \le 4 \left(\frac{ne_r}{a}\right)^2. \tag{8}$$

Продолжая данную процедуру, найдем точки x^1_{jr-1} и x^2_{jr-1} : $x^1_{jr-1} \in \Sigma^1_{jr-1}$, $x^2_{jr-1} \in \Sigma^2_{jr-1}$ такие, что

$$|F^{(r-1)}(x^l_{jr-1})| \le 2^{r-1} \cdot \left(\frac{ne_r}{a}\right)^{r-1}, \quad l = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Существует точка x_{jr} между x^1_{jr-1} и x^2_{jr-1} такая, что

$$F^{(r)}(x_{jr})(x^2_{jr-1} - x^1_{jr-1}) = F^{(r-1)}(x^2_{jr-1}) - F^{(r-1)}(x^1_{jr-1}),$$

и тогда из (9) находим, что

$$|F^{(r)}(x_{jr})| \le 2^r \cdot \left(\frac{ne_r}{a}\right)^r. \tag{10}$$

Теперь если $x \in I_j$ — любая точка, то из (10) следует

$$|F^{(r)}(x)| \le |F^{(r)}(x_{jr})| + |F^{(r)}(x) - F^{(r)}(x_{jr})| \le \left(\frac{2ne_r}{a}\right)^r + bn^{r+\alpha}|x - x_{jr}|^\alpha \le$$
$$\le \left(\left(\frac{2e_r}{a}\right)^r + b\left(\frac{a}{e^r}\right)^\alpha\right) \cdot n^r. \tag{11}$$

Положим $b'_r = \left(\frac{2e_r}{a}\right)^r + b\left(\frac{a}{e^r}\right)$. Возьмем опять $x \in I_j$ и пусть x^l_{jr-1} — ближайшая из точек $x^1_{jr-1},\ x^2_{jr-1}$ к x, тогда $|x - x^l_{jr-1}| \le \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{e_r}$. Вновь применяя теорему Лагранжа, найдем точку y^l_{jr-1} такую, что

$$F^{(r-1)}(x) - F^{(r-1)}(x^l_{jr}) = F^{(r)}(y^l_{jr-1})(x - x^l_{jr-1}),$$

в таком случае из (11) и (9) находим, что

$$|F^{(r-1)}(x)| \le |F^{(r-1)}(x^l_{jr})| + |F^{(r)}(y^l_{jr-1})||x - x^l_{jr-1}| \le$$
$$\le \left(\frac{2e_r}{a}\right)^{r-1} \cdot n^{r-1} + \frac{1}{2}b'n^r \cdot \frac{a}{e_r n} = \left(\left(\frac{2e_r}{a}\right)^{r-1} + \frac{1}{2}b'_r \cdot \frac{a}{e_r}\right) n^{r-1}. \tag{12}$$

Пусть $b'_{r-1} = \left(\frac{2e_r}{a}\right)^{r-1} + \frac{1}{2}b'_r \cdot \frac{a}{e_r}$. Продолжая процедуру далее, доказываем лемму для вещественных функций f. Для комплекснозначных f лемма будет выполняться с $l_k = \sqrt{2}b'_k$.

Предполагаем, что на множестве E задана функция f. Определим следующие промежутки $S_n,\ n \in \mathbb{Z}$:

$$S_n = [\alpha_n, \beta_n], \quad \alpha_n^2 = a_n, \quad \beta_n^2 = b_n, \quad n \ge 1, \tag{13}$$

$$S_n = [-\beta_{|n|+1}, -\alpha_{|n|+1}], \quad n \le 0. \tag{14}$$

Положим $\Omega = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} S_n$ и зададим функцию φ на Ω равенством

$$\varphi(x) = f(x^2), \quad x \in \Omega. \tag{15}$$

Напомним, что условие $f \in \Lambda_1^{r+\omega_\alpha}(E) \overset{\text{def}}{=} H_1^{r+\alpha}(E)$ означает, что $|f(x)| \le 1,\ x \in E$, и с некоторой постоянной c_f для любых $x_1, x_2 \in E$ справедливо неравенство

$$|f^{(r)}(x_2) - f^{(r)}(x_1)| \le c_f|x_2 - x_1|^\alpha. \tag{16}$$

Лемма 2. *Для функции φ, определенной в (15), справедливы соотношения*

$$|\varphi^{(k)}(x)| \le c_{k1}(|n| + 1)^k, \quad x \in S_n, \quad 1 \le k \le r, \tag{17}$$

$$|\varphi^{(r)}(x_2)-\varphi^{(r)}(x_1)|\le c_{r2}(|n|+1)^{r+\alpha}|x_2-x_1|^{\alpha},\quad x\in S_n, \tag{18}$$

и постоянные $c_{k1},\ 1\le k\le r$, *и* c_{r2} *зависят лишь от* k, r *и* c_f.

Доказательство. Применим формулу Фаа ди Бруно [13]:

$$\varphi^{(k)}(x)=(f(g(x)))^{(k)}=\sum A^k_{\nu_1,\dots,\nu_k} f^{(\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_k)}(g(x))\left(g^{(k)}(x)\right)^{\nu_1}\cdot\ldots\cdot\left(g^{(k)}(x)\right)^{\nu_k}, \tag{19}$$

где $A^k_{\nu_1,\dots,\nu_k}$ — известные коэффициенты, числа $\nu_1,\dots,\nu_k$ неотрицательны и удовлетворяют условию $\nu_1+2\nu_2+\ldots+k\nu_k=k,\ g(x)=x^2$. Применяя лемму 1 и учитывая соотношения $(x^2)'=2x, (x^2)''=2, (x^2)^{(\nu)}=0, \nu\ge 3$, из (19) и (1) получаем (17) и (18).

Следствие. *Пусть* $\varphi_1(x)=x^{-2r-2}\varphi(x),\ x\in\Omega$. *Тогда функция* φ_1 *удовлетворяет условиям*

$$|\varphi_1(x)|\le\frac{c}{(|n|+1)^{2r+2}},\quad x\in S_n, \tag{20}$$

$$|\varphi_1^{(k)}(x)|\le\frac{c}{(|n|+1)^{2r+2-k}},\quad x\in S_n,\quad 1\le k\le r, \tag{21}$$

$$|\varphi_1^{(r)}(x_2)-\varphi_1^{(r)}(x_1)|\le\frac{c}{(|n|+1)^{r+2-\alpha}}|x_2-x_1|^{\alpha},\quad x_1,x_2\in S_n, \tag{22}$$

где постоянная c *зависит только от* Ω, r *и* c_f.

Доказательство следствия получается применением формулы Лейбница и соотношений (17) и (18).

2. Продолжение функции $\varphi(x)$**.** Будем применять продолжение, отличающееся от использованного в работах [4, 5]. Для $S_n, n\in\mathbb{Z}$, положим

$$\Omega_n=\left\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{dist}(z,S_n)\le\frac{1}{|n|+1}\right\}, \tag{23}$$

$$\mathrm{U}_{nk}=\left\{z\in\mathbb{C}:2^{-k}\cdot\frac{1}{|n|+1}<\operatorname{dist}(z,S_n)\le 2^{-k+1}\cdot\frac{1}{|n|+1}\right\}. \tag{24}$$

Из (23), (24) следует, что $\bigcup\limits_{k\ge1}\mathrm{U}_{nk}=\Omega_n\setminus S_n$. Разобьем U_{nk} на $c\cdot 2^k(|n|+1)$ непересекающихся односвязных областей V_{nkl} таких, что

$$c_1\left((|n|+1)2^k\right)^{-1}\le\operatorname{diam}\mathrm{V}_{nkl}\le c_2\left((|n|+1)2^k\right)^{-1}, \tag{25}$$

$$\frac12\left((|n|+1)2^k\right)^{-2}\le m_2\mathrm{V}_{nkl}\le 2\left((|n|+1)2^k\right)^{-2}, \tag{26}$$

и пусть $x_{nkl}\in S_n$ — ближайшая точка S_n к множеству $\overline{\mathrm{V}}_{nkl}$. Положим

$$\Phi_0(z)=\begin{cases}\varphi(x_{nkl})+\sum\limits_{j=1}^{r}\dfrac{\varphi^{(i)}(x_{nkl})}{j!}(z-x_{nkl})^j, & z\in\mathrm{V}_{nkl},\\ 0, & z\notin\Omega_n.\end{cases} \tag{27}$$

Пусть $\overline{\mathrm{B}}_r(a)=\{z\in\overline{\mathbb{C}}:|z-a|\le r\}$. Положим

$$\Phi_1(z)=\frac{1}{m_2\mathrm{B}_{\frac12\delta(z)}(z)}\int\limits_{\mathrm{B}_{\frac12\delta(z)}(z)}\Phi_0(\zeta)\,dm_2(\zeta),\quad z\in\Omega_n, \tag{28}$$

где $\delta(z) = \mathrm{dist}(z, I_n)$, m_2 — двумерная мера Лебега. Тогда, применяя рассуждения Е. М. Дынькина [13, 14], из построения (27) и (28) и свойств (17), (18) получаем следующее утверждение.

Лемма 3. *Функция* $\Phi_1 \in C(\mathbb{C})$ *обладает следующими свойствами:* $\Phi_1(z) = 0$ *при* $z \notin \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \widetilde{\Omega}_n$, $\widetilde{\Omega}_n = \left\{z : \mathrm{dist}(z, S_n) \le \dfrac{2}{|n|+1}\right\}$; $\Phi_1(x) = \varphi(x)$, $x \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} S_n$, *функция* $\Phi_1 \in C^1(\mathbb{C} \setminus \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} S_n)$. *Также справедлива оценка*

$$|\Phi'_{1\bar{z}}(z)| \le cn^{r+\alpha}\mathrm{dist}^{r+\alpha-1}(z, S_n), \quad z \in \widetilde{\Omega}_n. \tag{29}$$

Следствие. *Пусть* $\Xi(z) = z^{-2r-2}\Phi_1(z)$, $z \in \mathbb{C}$. *Тогда* $\Xi(z) \in C(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \widetilde{\Omega}_n)$, $\Xi(x) = \varphi(x)x^{-2r-2}$, $\Xi(z) \in C^1\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \widetilde{\Omega}_n \setminus S_n\right)$ *и справедлива оценка*

$$|\Xi'_{\bar{z}}(z)| \le cn^{-r+\alpha-2}\mathrm{dist}^{r+\alpha-1}(z, S_n), \quad z \in \widetilde{\Omega}_n. \tag{30}$$

3. Приближение на множествах Ω и E. В построении целой функции экспоненциального типа $\le \sigma$, приближающей на множестве Ω функцию $\varphi_1(x) = \varphi(x)x^{-2r-2}$, будем пользоваться конструкцией, примененной в работах [3–5], с изменениями, позволяющими получить требуемые оценки приближения с учетом свойств (20)–(22) функции $\varphi_1(x)$. Построим кривую $\Gamma(t)$ для множества Ω аналогично тому, как это было сделано в [5] для множества E, свяжем с ней области $D_+(t)$ и $D_-(t)$ вновь по образцу работы [5], определим функции $z^+_{\xi,s}(z,t)$ и $z^-_{\xi,s}(z,t)$, как это было сделано в [5] в определениях (5) и (16), и подобно (8) в [5] запишем

$$R_k(z, w, \xi, s, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{z^+_{\xi,s}(z,t) - w}\left(1 + \sum\limits_{\nu=1}^{k}\left(\dfrac{z^+_{\xi,s}(z,t) - z}{z^+_{\xi,s}(z,t) - w}\right)^{\nu}\right), & z \in D_+(t), \\ \dfrac{1}{z^-_{\xi,s}(z,t) - w}\left(1 + \sum\limits_{\nu=1}^{k}\left(\dfrac{z^-_{\xi,s}(z,t) - z}{z^-_{\xi,s}(z,t) - w}\right)^{\nu}\right), & z \in D_-(t). \end{cases} \tag{31}$$

Выберем c_m из соотношения

$$c_m \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin\tau}{\tau}\right) d\tau = 1. \tag{32}$$

Число $q > 0$ выбрано при построении кривой $\Gamma(t)$, как это было сделано для q в [5]. Числа k и m также определим, как в [5]: $k + 1 = 4(r+1)$, $m = 8(k+1) + 2 = 32(k+1) + 2$. Пусть $\sigma_1 = \dfrac{\sigma}{m}$, $A = \dfrac{2\pi}{q}$, число b_r выбрано, как b_r в [5], из условия $b_r \int_0^q (\sin At)^{2r+2}dt = 1$.

Теперь, по аналогии с [5], напишем приближающую $\varphi_1(x)$ целую функцию $\mathrm{U}_{1\sigma}(z)$ экспоненциального типа $\le \sigma + (2r+2)A$:

$$\mathrm{U}_{1\sigma}(w) = b_r \cdot \int\limits_0^q \sin^{2r+2} A(w-t)\mathrm{U}_{0\sigma}(w,t)dt, \tag{33}$$

где

$$\mathrm{U}_{0\sigma}(w,t) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\pi} \int\limits_{\widetilde{\Omega}_n} \Xi'_{\bar z}(z) \cdot \left(\frac{c_m}{\sigma_1^{m-1}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin s\sigma_1}{s} \right)^m ds \cdot R\left(z, w, \frac{1}{\sigma_1}, s, t\right) \right) dm_2(z). \tag{34}$$

Укажем изменения в формуле (34), которая влечет оценки приближения в рассматриваемом случае, в сравнении с формулой (9) в [5]: в (34) стоит другая функция $\Xi'_{\bar z}(z)$; интегрирование ведется по областям $\widetilde{\Omega}_n$, определенным в лемме 3, которые отличаются от областей $\mathrm{int}E_{\rho_0}(I_n)$ в формуле (9) из [5]. Применяя в данной ситуации рассуждения и оценки из [3–5], с учетом построения приближающей функции в (33) и (34) и леммы 3, получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Существуют постоянные c_7 и c_8, не зависящие от σ и n такие, что при $\sigma \geq 1$ справедливы следующие неравенства:*

$$|\mathrm{U}_{1\sigma}(x) - \varphi_1(x)| \leq$$
$$\leq \min\left(c_7 n^{-r-2+\alpha} \left(\frac{1}{\sigma} \left(\sqrt{(x-\alpha_n)(\beta_n - x)} + \frac{1}{\sigma} \right) \right)^{r+\alpha}, c_8 n^{-2r-2} \right), \ x \in S_n. \tag{35}$$

Положим $\mathrm{V}_\sigma(z) = z^{2r+2}\mathrm{U}_{1\sigma}(z)$. Из определения функций $\varphi(x)$ в (15) и $\varphi_1(x)$ получаем

Следствие. *Существуют постоянные c'_7 и c'_8, не зависящие от σ и n такие, что при $\sigma \geq 1$ справедливы следующие неравенства:*

$$|\mathrm{V}_\sigma(x) - \varphi(x)| \leq \min\left(c'_7 n^{r+\alpha} \left(\frac{1}{\sigma} \left(\sqrt{(x-\alpha_n)(\beta_n - x)} + \frac{1}{\sigma} \right) \right)^{r+\alpha}, c'_8 \right), \quad x \in S_n. \tag{36}$$

С помощью функции V_σ определим функцию F_σ, дающую оценку (5). Из определения (15) следует, что $\varphi(x) = \varphi(-x)$. Далее, множество Ω симметрично относительно 0, поэтому $\mathrm{V}_\sigma(-x) - \varphi(-x) = \mathrm{V}_\sigma(-x) - \varphi(x)$. Для функции $\mathrm{V}_\sigma(-z)$ выполнена оценка (35), следовательно, для функции $\mathrm{V}_{1\sigma}(z) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{V}_\sigma(z) + \mathrm{V}_\sigma(-z))$ выполнено неравенство (35) и функция $\mathrm{V}_{1\sigma}(z)$ четная. Наконец, положим $F_\sigma(z) = \mathrm{V}_{1\sigma}(\sqrt{z})$. Тогда определение (15) функции $\varphi(x)$, связь (13) и (14) отрезков I_n и S_n и неравенство (35) дают требуемую оценку (5) для уклонения $F_\sigma(x) - f(x)$. Что и требовалось доказать.

Литература

1. *Давыдова Т. С., Широков Н. А.* Приближение функций из класса Гёльдера на полуоси // Записки научн. семинаров ПОМИ. 1999. Т. 262. С. 127–137.

2. *Сильванович О. В., Широков Н. А.* Приближение целыми функциями на подмножествах полуоси // Записки научн. семинаров ПОМИ. 2006. Т. 337. С. 233–237.

3. *Silvanovich O. V., Shirokov N. A.* Approximation by entire functions on a countable union of segments on the real axis. 1. Formulation of the results // Vestn. St. Petersburg Univ.: Math. 2016. Vol. 49. Issue 4. P. 373–376.

4. *Silvanovich O. V., Shirokov N. A.* Approximation by entire functions on a countable union of segments on the real axis. 2. Proof of the Main Theorem // Vestn. St. Petersburg Univ.: Math. 2017. Vol. 50. Issue 1. P. 35–43.

5. *Silvanovich O. V., Shirokov N. A.* Approximation by entire functions on a countable union of segments on the real axis. 3. Future Generalization // Vestn. St. Petersburg Univ.: Math. 2018. Vol. 51. Issue 2. P. 164–168.

6. *Бабенко В. Ф.* Экстремальные задачи теории приближения и неравенства для перестановок // Доклады АН СССР. 1986. Т. 290, № 5. С. 1033–1036.

7. *Бабенко В. Ф.* Точные неравенства для норм промежуточных производных полуцелого порядка и некоторые их приложения // Доп. НАН Украïны. 1995. № 2. С. 23–26.

8. *Бабенко В. Ф.* О неравенствах для норм промежуточных производных на конечном интервале // Укр. мат. журнал. 1995. Т. 47, № 1. С. 105–107.

9. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Об аддитивных неравенствах для норм промежуточных производных // Доклады РАН. 1997. Т. 356, № 2. С. 154–156.

10. *Буренков В. И.* О точных постоянных в неравенствах для норм промежуточных производных на конечном интервале // Труды Мат. института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1980. Vol. 156. С. 22–29.

11. *Кофанов В. А.* О неравенствах типа Ландау — Колмогорова — Хермандера на отрезке и вещественной прямой // Укр. мат. журнал. 2000. Т. 52, № 12. С. 1676–1688.

12. *Chen W.* Landau — Kolmogorov inequality on a finite interval // Bull. Austral. Math. Soc. 1993. Vol. 48. P. 485–494.

13. *Шадрин А. Ю.* О точных постоянных в неравенствах между L_∞-нормами производных на конечном отрезке // Доклады РАН. 1992. Т. 326, № 1. С. 150–153.

14. *Dyn'kin E. M.* Pseudoanalytic extensions of smooth functions. The uniform scale // Amer. Math. Soc. Transl. 1980. Vol. 115. P. 33–38.

15. *Dyn'kin E. M.* The pseudoanalytic extensions // J. Anal. Math. 1993. Vol. 60. P. 45–70.

Статья поступила в редакцию 15 марта 2019 г.;
после доработки 22 апреля 2019 г.;
рекомендована в печать 13 июня 2019 г.

Контактная информация:

Сильванович Ольга Васильевна — канд. физ.-мат. наук; olamamik@gmail.com
Широков Николай Алексеевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; nikolai.shirokov@gmail.com

Entire functions of order 1/2 in the approximation of functions on the semiaxis

O. V. Silvanovich[1], *N. A. Shirokov*[2]

[1] St. Petersburg National Research University of Information Tehnologies, Mechanics and Optics, Kronverkskii pr., 49, St. Petersburg, 197101, Russian Federation
[2] St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Silvanovich O. V., Shirokov N. A. Entire functions of order 1/2 in the approximation of functions on the semiaxis. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2019, vol. 6 (64), issue 4, pp. 627–635.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.408 (In Russian)

Let I_n be disjoint segments of half-axis $[1;\infty)$, $I_1 = [1; b_1]$. We assume that I_n and their supplementary intervals are commensurable. The union of mentioned segments we denote thought E. Let $0 < \alpha < 1$. The class of complex-valued functions defined on E with r-th derivative belonging to a Holder class α and bounded by 1 is denoted by $H_1^{r+\alpha}(E)$. We consider the set C_σ of entire functions of the order $\frac{1}{2}$ and of the type $\le \sigma$ which are bounded on $[0;\infty)$. The main result of this paper is the following: *Let $f \in H_1^{r+\alpha}(E)$. Then there exist constants c_0 and c_1, depending of f, E, r and α such that for any $\sigma \ge 1$ one can find a function $F_\sigma \in C_\sigma$ such that the following inequality holds*

$$|f(x) - F_\sigma(x)| \le \min\left(c_0 \frac{1}{\sigma^{r+\alpha}} \left(\sqrt{(x-a_n)(b_n-x)} + \frac{n}{\sigma}\right)^{r+\alpha}, c_1\right), \quad x \in I_n,\ n \ge 1.$$

Keywords: smooth functions, entire functions, approximation.

References

1. Davidova T. S., Shirokov N. A., “Approximation of functions from class Gelder on the semiaxis”, *Zapiski nauch. sem. POMI* **262**, 127–137 (1999). (In Russian)

2. Silvanovich O. V., Shirokov N. A., “Approximation by entire functions on subsets of the semiaxis”, *Zapiski nauch. sem. POMI* **337**, 233–237 (2006). (In Russian)

3. Silvanovich O. V., Shirokov N. A., “Approximation by entire functions on a countable union of segments on the real axis. 1. Formulation of the results”, *Vestn. St. Petersburg Univ.: Math.* **49**, issue 4, 373–376 (2016).

4. Silvanovich O. V., Shirokov N. A., “Approximation by entire functions on a countable union of segments on the real axis. 2. Proof of the Main Theorem”, *Vestn. St. Petersburg Univ.: Math.* **50**, issue 1, 35–43 (2017).

5. Silvanovich O. V., Shirokov N. A., “Approximation by entire functions on a countable union of segments on the real axis. 3. Future Generalization”, *Vestn. St. Petersburg Univ.: Math.* **51**, issue 2, 164–168 (2018).

6. Babenko V. F., “Extreme problems of approximation theory and inequalities for permutations”, *Reports of the USSR Academy of Sciences* **290** (5), 1033–1036 (1986). (In Russian)

7. Babenko V. F., “Exact inequalities for norms of intermediate derivatives of half-integer order and some of their applications”, *Reports of the Ukrainian Academy of Sciences* **2**, 23–26 (1995). (In Russian)

8. Babenko V. F., “On inequalities for the norms of intermediate derivatives on a finite interval”, *Ukr. Math. J.* **47**(1), 105–107 (1995). (In Russian)

9. Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A., ”On additive inequalities for norms of intermediate derivatives”, *RAS reports* **356**(2), 154–156 (1997). (In Russian)

10. Burenkov V. I., “On exact constants in inequalities for the norms of intermediate derivatives on a finite interval”, *Trudy Math. Instituta im. V. A. Steklova AN SSSR* **156**, 22–29 (1980). (In Russian)

11. Kofanov V. A., “On inequalities of Landau — Kolmogorov — Hrmander type on a segment and real line”, *Ukr. Math. J.* **52**(12), 1676–1688 (2000). (In Russian)

12. Chen W., ”Landau — Kolmogorov inequality on a finite interval”, *Bull. Austral. Math. Soc.* **48**, 485–494 (1993).

13. Shadrin A. U., “On exact constants in inequalities between L_∞-norms of derivatives on a finite interval”, *RAS reports* **326**(1), 150–153 (1992). (In Russian)

14. Dyn’kin E. M., “Pseudoanalytic extensions of smooth functions. The uniform scale”, *Amer. Math. Soc. Transl.* **115**, 33–38 (1980).

15. Dyn’kin E.M., “The pseudoanalytic extensions”, *J. Anal. Math.* **60**, 45–70 (1993).

Received: March 15, 2019
Revised: April 22, 2019
Accepted: June 13, 2019

Authors’ information:

Olga V. Silvanovich — olamamik@gmail.com
Nikolai A. Shirokov — nikolai.shirokov@gmail.com