УДК 517 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 4
MSC 30G35, 32A25

Задачи типа Дирихле высокого порядка в двумерном комплексном кватернионном анализе*

Б. Шнайдер

Остравский университет,
Чешская Республика, 70103, Острава, 30.дубна, 22

Для цитирования: *Шнайдер Б.* Задачи типа Дирихле высокого порядка в двумерном комплексном кватернионном анализе // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 4. С. 646–658.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.410

Хорошо известно, что разработка методов решений задач Дирихле важна и актуальна для различных областей математической физики, связанных с уравнением Лапласа, уравнением Гельмгольца, уравнением Стокса, уравнением Максвелла, уравнением Дирака и др. В своих предыдущих работах автор изучал разрешимость краевых задач Дирихле первого и второго порядков в кватернионном анализе. В данной работе изучается краевая задача Дирихле высокого порядка, связанная с двумерным уравнением Гельмгольца с комплексным потенциалом. В данной работе доказывается существование и единственность решения краевой задачи Дирихле в двумерном случае и ищется соответствующее решение этой задачи. Большинство задач Дирихле решается для случая трех переменных. Отметим, что случай двух переменных не является простым следствием трехмерного случая. Для решения поставленной задачи в работе используется метод ортогонального разложения кватернионного пространства Соболева. Данное ортогональное разложение пространства является также инструментом для изучения многих эллиптических граничных задач, которые возникают в различных областях математики и математической физики. В работе также получено ортогональное разложение кватернионного пространства Соболева относительно оператора Дирака высокого порядка.

Ключевые слова: кватернионный анализ, оператор Гельмгольца, краевые задачи типа Дирихле.

1. Введение. Разработка методов решений задач Дирихле важна и актуальна для различных областей математической физики, связанных с уравнением теплопроводности, уравнением Стокса, уравнением Максвелла и др.; см., например, работы [1–7]. Большинство задач Дирихле решается для случая трех переменных. Отметим, что случай двух переменных не является простым следствием трехмерного случая и там также существуют интересные приложения, связанные с электромагнетизмом и теплопроводностью (см., например, [8, 9]).

Теория функций комплексно кватернионных значений является естественным обобщением теории аналитических функций одной комплексной переменной. Основы данной теории излагаются, например, в книгах [1, 10–12] и в статьях [13–16]. Теория кватернионно-значных функций двух переменных была разработана для многих направлений математической физики; см., например, [17–20].

*Работа выполнена при финансовой поддержке исследовательского проекта «Числа, геометрия и физика» Остравского Университета, Чешская Республика.

Пусть Γ — простая гладкая замкнутая кривая на комплексной плоскости, разбивающая ее на области $\Omega^+ := \Omega$ и $\Omega^- := \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega^+}$. Хуан Бори-Рейес, Рикардо Абреу-Блайя, Луис М. Эрнандес-Симон и Барух Шнайдер [21] исследовали разрешимость нижеприведенной краевой задачи Дирихле и ряд связанных с ней вопросов:

$$\left(-\boldsymbol{\Delta}_{\mathbb{R}^2} + 2\alpha\boldsymbol{\mathcal{D}} + \alpha^2\right) h = f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1.1}$$

$$h = g \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{1.2}$$

где $\boldsymbol{\Delta}_{\mathbb{R}^2}$ — оператор Лапласа, $\mathcal{D}$ — оператор Дирака, $\alpha \in \mathbb{C}$ и g — функция, определенная на границе.

Рассмотрим в настоящей работе естественное обобщение данной краевой задачи Дирихле — краевую задачу Дирихле более высокого порядка для нулевых решений двумерного уравнения Гельмгольца в $\mathbb{R}^2$. Такие задачи, насколько нам известно, не обсуждались ранее.

Итак, в работе исследуется краевая задача Дирихле высокого порядка для двумерного оператора Гельмгольца в комплексном кватернионном анализе:

$$\begin{cases} \left(-\boldsymbol{\Delta}_{\mathbb{R}^2} + 2\alpha\boldsymbol{\mathcal{D}} + \alpha^2\right)^M h = f \quad \text{в} \quad \Omega, \\ h = g_0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \\ \left(-\boldsymbol{\Delta}_{\mathbb{R}^2} + 2\alpha\boldsymbol{\mathcal{D}} + \alpha^2\right) h = g_1 \quad \text{на} \quad \Gamma, \\ \vdots \\ \left(-\boldsymbol{\Delta}_{\mathbb{R}^2} + 2\alpha\boldsymbol{\mathcal{D}} + \alpha^2\right)^{M-1} h = g_{M-1} \quad \text{на} \quad \Gamma, \end{cases} \tag{1.3}$$

где $M \in \mathbb{N}$ и $g_0, g_1, \ldots, g_{M-1}$ — функции, определенные на границе. Задача (1.3) играет важную роль в приложениях математической физики, связанных с теплопроводностью (см., например, [12]).

2. Предварительные сведения. Введем в этом параграфе необходимые обозначения и кратко изложим основные сведения из теории кватернионов. Пусть $\mathbb{H}(\mathbb{C}) := \{a = a_0e_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3,\ a_l \in \mathbb{C},\ l = 0, 1, 2, 3\}$ — тело комплексного кватерниона, где $e_0 := 1$ и e_1, e_2 и e_3 — мнимые единицы кватерниона со следующими правилами умножения:

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1, \quad e_1e_2 = e_3 = -e_2e_1, \quad e_2e_3 = e_1 = -e_3e_2, \quad e_3e_1 = e_2 = -e_1e_3.$$

Обозначим через i мнимую единицу в $\mathbb{C}$. Отметим, что

$$i \cdot e_l = e_l \cdot i, \quad l = 0, 1, 2, 3.$$

Пусть $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ — комплексная некоммутативная ассоциативная алгебра с делителями нуля. Обозначим кватернионное сопряжение через $\bar{e}_l := -e_l$, $l = 1, 2, 3$. Если $a \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$, то

$$\bar{a} := a_0e_0 - a_1e_1 - a_2e_2 - a_3e_3.$$

Отметим, что модуль кватерниона a совпадает с его евклидовой нормой. Рассмотрим комплексно кватернионно-значную функцию:

$$f : \Omega \to \mathbb{H}(\mathbb{C}).$$

Функция f может быть представлена в виде $f = f_0e_0 + f_1e_1 + f_2e_2 + f_3e_3$. Заметим, что такие свойства, как непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость функции f подразумевают, что комплексные компоненты f_l также удовлетворяют этим свойствам.

Пусть $\mathbf{E}$ — множество в $\mathbb{R}^2$, а гильбертово пространство $\boldsymbol{L}_2(\mathbf{E}, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ состоит из $\mathbb{H}(\mathbb{C})$-значных функций f, определенных на E, удовлетворяющих условию $\int_{\mathbf{E}} |f|^2\, dV < \infty$, где dV — мера Лебега на $\mathbf{E}$. Определим скалярное произведение равенством

$$< f, g >_{\boldsymbol{L}_2(\mathbf{E}, \mathbb{H}(\mathbb{C}))} := \int_{\mathbf{E}} \bar{f} g\, dV.$$

Пусть $\boldsymbol{C}^s(\mathbf{E}, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$, $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, — банахово пространство $\mathbb{H}(\mathbb{C})$-значных функций, определенных в $\mathbf{E}$, и обладающих непрерывными производными s-го порядка в $\mathbf{E}$. Класс $\boldsymbol{C}^{0,\nu}(\mathbf{E}, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ состоит из заданных на $\mathbf{E}$ непрерывных функций, удовлетворяющих условию Гёльдера (Липшица) с показателем ν, причем $0 < \nu \leq 1$.

Символом $\boldsymbol{W}_2^k(\mathbf{E}, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ обозначим пространство Соболева — пространство функций, принадлежащих $\boldsymbol{L}_2(\mathbf{E}, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ и имеющих производные порядка k. Аналогично, обозначим через $\boldsymbol{W}_2^{k-\frac{1}{2}}(\partial\mathbf{E}, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ соответствующее пространство следов Слободецкого. Напомним, что след $\mathbb{H}(\mathbb{C})$-значных функций $g \in \boldsymbol{W}_2^k(\mathbf{E}, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ на $\partial\mathbf{E}$ определяется как предел в $\boldsymbol{L}_2(\partial\mathbf{E}, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$:

$$\mathbf{tr}_{\partial\mathbf{E}} g = g|_{\partial\mathbf{E}} := \lim_{n\to\infty} \{g_n\}|_{\partial\mathbf{E}},$$

где $\{g_n\}$ — последовательность в $\boldsymbol{C}^1(\mathbf{E}, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$, которая сходится к g по норме пространства $\boldsymbol{W}_2^k(\mathbf{E}, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ (см. [22]). В [22] было показано, что

$$\mathbf{tr}_{\partial\mathbf{E}} :\ \boldsymbol{W}_2^k(\mathbf{E}) \to \boldsymbol{W}_2^{k-\frac{1}{2}}(\partial\mathbf{E}).$$

Пусть α — комплексное число такое, что $\alpha^2 = \lambda$, где $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Точки евклидова пространства $\mathbb{R}^2$ обозначим через $z = (x, y) := xe_1 + ye_2$, $\xi := \zeta e_1 + \eta e_2$; $t := t_1e_1 + t_2e_2$. Пусть

$$\boldsymbol{\mathcal{D}} := \frac{\partial}{\partial x} e_1 + \frac{\partial}{\partial y} e_2$$

— дифференциальный кватернионный оператор Дирака, факторизующий евклидовый лапласиан в $\mathbb{R}^2$, то есть $\boldsymbol{\mathcal{D}}^2 = -\boldsymbol{\Delta}_{\mathbb{R}^2}$.

Рассмотрим оператор Гельмгольца $\boldsymbol{\Delta}_{\mathbb{R}^2} + \lambda\boldsymbol{\mathcal{I}}$, где $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ обозначает единичный (тождественный) оператор. Таким образом,

$$-(\boldsymbol{\mathcal{D}} + \alpha\boldsymbol{\mathcal{I}})(\boldsymbol{\mathcal{D}} - \alpha\boldsymbol{\mathcal{I}}) = \boldsymbol{\Delta}_{\mathbb{R}^2} + \lambda\boldsymbol{\mathcal{I}}. \tag{2.1}$$

Назовем оператор $\boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha := \boldsymbol{\mathcal{D}} + \alpha\boldsymbol{\mathcal{I}}$ возмущенным оператором Дирака.

Функцию f, определенную и дифференцируемую в открытой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, будем называть α-гиперголоморфной в Ω тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha f = 0$ в Ω. Множество α-гиперголоморфных функций в Ω будем обозначать через $\mathfrak{M}_\alpha(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$.

Пусть $M \in \mathbb{N}$ и $\Theta_\alpha^{(M)}(z)$ обозначает фундаментальное решение оператора $(\boldsymbol{\Delta}_{\mathbb{R}^2} + \alpha^2)^M$ в $\mathbb{R}^2$. Заметим также, что это решение имеет вид

$$\Theta_\alpha^{(M)}(z) := \frac{(-1)^{M-1}\alpha^{1-M} H_{1-M}^{(1)}(\alpha|z|)}{4i\, 2^{M-1}(M-1)!\, |z|^{1-M}}, \tag{2.2}$$

где $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\{\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \operatorname{Im}(\alpha) \geq 0\}$ и $H_p^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода, $p \in \mathbb{R}$ (см., например, [23, с. 59–74]).

Известно, что фундаментальное решение оператора $\boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha$, ядро Коши $\mathcal{K}_\alpha$, может быть вычислено по формуле

$$\mathcal{K}_\alpha(z) := -\boldsymbol{\mathcal{D}}_{-\alpha}\left[\Theta_\alpha^{(1)}(z)\right] = (-1)\frac{i\alpha}{4}\left(H_1^{(1)}(\alpha|z|)\frac{z}{|z|} + H_0^{(1)}(\alpha|z|)\right),\ z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Напомним, что функцию Ханкеля можно разложить в ряд (см. [25, 26]):

$$H_0^{(1)}(t) = \left(1 - (-1)\frac{2i}{\pi}(\ln\frac{t}{2} + \chi)\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\, t^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} + \frac{2i}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\, t^{2k}}{2^{2k}\,(k!)^2}\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m},$$

$$\begin{aligned} H_1^{(1)}(t) = \left(1 - (-1)\frac{2i}{\pi}(\ln\frac{t}{2} + \chi)\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\, t^{2k+1}}{2^{2k+1}k!(k+1)!} + (-1)\left(\frac{2i}{\pi t}\right) + \\ + \frac{i}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\, t^{2k+1}}{2^{2k+1}\, k!(k+1)!}\left(\sum_{m=1}^{k+1}\frac{1}{m} + \sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}\right), \end{aligned}$$

где $\chi \approx 0.5772$ — константа Эйлера. Кроме того, известно (см., например, [24]), что

$$H_p^{(1)}(t) = J_p(t) + i\, N_p(t), \quad p \in \mathbb{R},$$

где функция Бесселя J_p первого рода, определяется равенством

$$J_p(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^{p+2k}\frac{(-1)^k}{\Gamma(p+k+1)\, k!}, \quad t \in \mathbb{C},$$

а Γ — гамма-функция. Функция Неймана N_p второго рода определяется как

$$N_p(t) := \frac{J_p(t)\, \cos(\pi p) - J_{-p}(t)}{\sin(\pi p)} \quad \text{для} \quad p \notin \mathbb{N} \cup \{0\},$$

где

$$\begin{aligned} N_p(t) \quad &:= \quad \frac{2}{\pi}J_p(t)\log\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(p-k-1)!}{k!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k-p} - \\ &- \quad \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+p}\frac{(-1)^k}{k!(k+p)!}\left[\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} + \frac{\Gamma'(k+p+1)}{\Gamma(k+p+1)}\right] \quad \text{для} \quad p \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Подробное изложение теории кватернионно-значных функций двух комплексных переменных можно найти в [13–16].

3. Основные результаты. ***3.1. Двумерные кватернионные операторы.*** Интегральный оператор Теодореску [15, 16] для функций $g \in \boldsymbol{L}_2(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ определяется равенством

$$\boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha g(x,y) := \int_\Omega \mathcal{K}_\alpha(x-u, y-v)g(u,v)\, du \wedge dv, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Интегральный оператор Коши имеет вид

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha g(x,y) := -\int_\Gamma \mathcal{K}_\alpha(x-u,y-v)\boldsymbol{n}(u,v)g(u,v)\,d\Gamma_{(u,v)}, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\Gamma,$$

где $g\in \boldsymbol{W}_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma,\mathbb{H}(\mathbb{C}))$, а $\boldsymbol{n}(u,v)=(n_1(u,v),n_2(u,v))$ обозначает единичный вектор внешней нормали к Γ в точке (u,v). Сингулярный интегральный оператор для функций $g\in \boldsymbol{L}_2(\Gamma,\mathbb{H}(\mathbb{C}))$ записывается в виде

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_\alpha g(x,y) := -2\int_\Gamma \mathcal{K}_\alpha(x-u,y-v)\boldsymbol{n}(u,v)g(u,v)\,d\Gamma_{(u,v)}, \quad (x,y)\in\Gamma.$$

В работе [7, с. 170] была доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. *Справедливы отображения:*

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha:\ \boldsymbol{W}_2^k(\Omega,\mathbb{H}(\mathbb{C}))\longrightarrow \boldsymbol{W}_2^{k-1}(\Omega,\mathbb{H}(\mathbb{C})),\quad k\in\mathbb{N},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha:\ \boldsymbol{W}_2^k(\Omega,\mathbb{H}(\mathbb{C}))\longrightarrow \boldsymbol{W}_2^{k+1}(\Omega,\mathbb{H}(\mathbb{C})),\quad k\in\mathbb{N}\cup\{0\},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha:\ \mathbf{W}_2^{k-\frac{1}{2}}(\Gamma,\mathbb{H}(\mathbb{C}))\longrightarrow \mathbf{W}_2^k(\Omega,\mathbb{H}(\mathbb{C}))\cap ker\ \boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha,\quad k\in\mathbb{N}.$$

В работах [1, 12, 16] приводятся следующие теоремы.

Теорема 3.2. (Стокса). *Пусть f и g являются $\mathbb{H}(\mathbb{C})$-значными функциями в* $\mathbf{W}_2^1(\Omega,\mathbb{H}(\mathbb{C}))$. *Тогда*

$$\int_\Gamma [\mathbf{tr}_\Gamma f(x,y)]\mathbf{n}(x,y)[\mathbf{tr}_\Gamma g(x,y)]\,\mathbf{d}\Gamma_{(x,y)} =$$
$$= \int_\Omega [(f\boldsymbol{\mathcal{D}}_{-\alpha})(x,y)g(x,y)+f(x,y)(\boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha g)(x,y)]\,dx\wedge dy.$$

Теорема 3.3. (Формула Бореля — Помпею). *Пусть $\mathbb{H}(\mathbb{C})$-значная функция $g\in$* $\mathbf{W}_2^1(\Omega)$. *Тогда*

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha g(x,y) + (\boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha\boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha g)(x,y) = \begin{cases} g(x,y), & \text{если } (x,y)\in\Omega^+,\\ 0, & \text{если } (x,y)\in\Omega^-.\end{cases}$$

Следствие 3.4. *Пусть $g\in \mathbf{W}_2^1(\Omega,\mathbb{H}(\mathbb{C}))\cap ker\ \boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha$. Тогда справедливо равенство*

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha g(x,y) = \begin{cases} g(x,y), & \text{если } (x,y)\in\Omega^+,\\ 0, & \text{если } (x,y)\in\Omega^-.\end{cases}$$

Теорема 3.5. *При $g\in \mathbf{L}_2(\Omega,\mathbb{H}(\mathbb{C}))$ справедливо равенство*

$$(\boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha\boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha g)(x,y) = \begin{cases} g(x,y), & \text{если } (x,y)\in\Omega^+,\\ 0, & \text{если } (x,y)\in\Omega^-.\end{cases}$$

Теорема 3.6. (формулы Сохоцкого — Племеля). *Пусть $g\in \mathbf{W}_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma,\mathbb{H}(\mathbb{C}))$. Тогда справедливы соотношения:*

$$\mathbf{tr}_\Gamma\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha[g] = \frac{1}{2}\boldsymbol{\mathcal{I}}[g]+\frac{1}{2}\boldsymbol{\mathcal{S}}_\alpha[g],$$
$$\mathbf{tr}_\Gamma^-\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha[g] = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\mathcal{I}}[g]+\frac{1}{2}\boldsymbol{\mathcal{S}}_\alpha[g],$$

где $\mathbf{tr}_\Gamma^-$ — оператор следа во внешней области Ω^-.

Определим проекторы Племеля $\boldsymbol{\mathcal{P}}_\alpha^{\pm}$ следующим образом:

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}_\alpha^{+} g := \mathbf{tr}_\Gamma \boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha g = \frac{1}{2} g + \frac{1}{2} \boldsymbol{\mathcal{S}}_\alpha g,$$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}_\alpha^{-} g := -\mathbf{tr}_\Gamma^{-} \boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha g = \frac{1}{2} g - \frac{1}{2} \boldsymbol{\mathcal{S}}_\alpha g.$$

Из справедливости равенств $\boldsymbol{\mathcal{P}}_\alpha^{+} + \boldsymbol{\mathcal{P}}_\alpha^{-} = \boldsymbol{\mathcal{I}}$, $[\boldsymbol{\mathcal{P}}_\alpha^{\pm}]^2 = \boldsymbol{\mathcal{P}}_\alpha^{\pm}$ и $\boldsymbol{\mathcal{P}}_\alpha^{+}\boldsymbol{\mathcal{P}}_\alpha^{-} = \boldsymbol{\mathcal{P}}_\alpha^{-}\boldsymbol{\mathcal{P}}_\alpha^{+} = \mathbf{0}$ следует, что $\boldsymbol{\mathcal{P}}_\alpha^{\pm}$ являются проекторами.

3.2. Ортогональное разложение. Рассмотрим ортогональное разложение пространства Соболева $\boldsymbol{W}_2^k(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C})), k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, относительно оператора Дирака высокого порядка $\boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha^k$. Будем использовать методы, изложенные в работах [1, 2] и [3]. Имеем

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}\, \Theta_\alpha^{(M)}(z) = \frac{1}{2(M-1)}\, \Theta_\alpha^{(M-1)} z, \quad M \neq 1, \quad \forall z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}. \tag{3.1}$$

При $M = 1$ формула (3.1) запишется в виде

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}\, \Theta_\alpha^{(1)}(z) = -\frac{1}{4i}\, \alpha\, \frac{z}{|z|}\, H_1^{(1)}(\alpha|z|), \quad \forall z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Из (2.2) и (3.1) очевидным образом получаем следующее утверждение.

Лемма 3.7. *Справедливо равенство*

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha\, \Theta_\alpha^{(M)}(z) = \frac{(-1)^M\, \alpha^{2-M}}{2^{M-1}\, 4i\, (M-1)!\, |z|^{1-M}} \left[H_{2-M}^{(1)}(\alpha\, |z|) \cdot \frac{z}{|z|} - H_{1-M}^{(1)}(\alpha|z|) \right], \ \forall z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Введем дополнительные обозначения:

$$\mathfrak{N}_2^k(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C})) := \{ f \,:\, f \in \boldsymbol{W}_2^k(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C})) \,\&\, \boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha^k f = 0 \},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{N}}_2^k(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C})) := \{ f \,:\, f \in \boldsymbol{W}_2^k(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C})) \,\&\, \boldsymbol{\Delta}_\lambda^k f = 0 \text{ в } \Omega \}.$$

Теорема 3.8. *Пространство* $\boldsymbol{W}_2^k(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ *допускает ортогональные разложения:*
(a)

$$\boldsymbol{W}_2^k(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C})) = \mathfrak{N}_2^k(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C})) \oplus \boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha^k \left(\overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}_2^k\, (\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C})) \cap \boldsymbol{W}_2^{k+M}(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C})) \right), \ M \in \mathbb{N}$$

со скалярным умножением

$$< \mathbf{u}, \mathbf{v} >_{\mathbf{L}_2} = \int_\Omega \bar{\mathbf{u}}\, \mathbf{v}\, du \wedge dv,$$

где

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}_2^k\, (\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C})) := \{ f \,:\, f \in \boldsymbol{W}_2^k(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C})),\, \boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha^\nu f = 0 \textit{ на } \Gamma \textit{ для } 0 \leq \nu \leq k-1 \};$$

(б)

$$\boldsymbol{W}_2^k(\Omega,\mathbb{H}(\mathbb{C}))=\boldsymbol{\mathcal{N}}_2^k(\Omega,\mathbb{H}(\mathbb{C}))\oplus\boldsymbol{\Delta}_\lambda^k\left(\overset{\circ}{\boldsymbol{\mathcal{W}}}{}_2^k(\Omega,\mathbb{H}(\mathbb{C}))\cap\boldsymbol{W}_2^{k+M}(\Omega,\mathbb{H}(\mathbb{C}))\right),$$

где

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\mathcal{W}}}{}_2^k(\Omega,\mathbb{H}(\mathbb{C})):=\{f\,:\,f\in\boldsymbol{W}_2^k(\Omega,\mathbb{H}(\mathbb{C})),\ \boldsymbol{\Delta}_\lambda^\nu f=0,\ \boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha\left(\boldsymbol{\Delta}_\lambda^\nu f\right)=0\ \text{на}\ \Gamma\ \text{для}\ 0\le\nu\le k-1\}.$$

Доказательство. Докажем утверждение (а). Для любого $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\boldsymbol{W}_2^k(\Omega,\mathbb{H}(\mathbb{C}))$ имеем

$$<\boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha^k\mathbf{u},\mathbf{v}>_{\mathbf{L}_2}=\int_\Omega\overline{\boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha^k\,\mathbf{u}}\,\mathbf{v}\,du\wedge dv=\int_\Omega\overline{\boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha\left(\boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha^{k-1}\,\mathbf{u}\right)}\,\mathbf{v}\,du\wedge dv=$$

(пользуясь теоремой 3.2)

$$=-\int_\Gamma\left[\overline{\boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha^{k-1}\mathbf{u}}\right](u,v)\,\mathbf{n}(u,v)\,[\mathbf{tr}_\Gamma\,\mathbf{v}](u,v)\,d\Gamma_{(u,v)}+<\boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha^{k-1}\mathbf{u},\boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha\mathbf{v}>_{\mathbf{L}_2}$$

$$=-\int_\Gamma\left[\overline{\boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha^{k-1}\mathbf{u}}\right](u,v)\,\mathbf{n}(u,v)\,[\mathbf{tr}_\Gamma\,\mathbf{v}](u,v)\,d\Gamma_{(u,v)}-$$

$$-\int_\Gamma\left[\overline{\boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha^{k-2}\mathbf{u}}\right](u,v)\,\mathbf{n}(u,v)\,[\mathbf{tr}_\Gamma\,\boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha\mathbf{v}](u,v)\,d\Gamma_{(u,v)}+<\boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha^{k-2}\mathbf{u},\boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha\mathbf{v}>_{\mathbf{L}_2}=\cdots$$

$$=-\int_\Gamma\left[\overline{\boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha^{k-1}\mathbf{u}}\right](u,v)\,\mathbf{n}(u,v)\,[\mathbf{tr}_\Gamma\,\mathbf{v}](u,v)\,d\Gamma_{(u,v)}-$$

$$-\int_\Gamma\left[\overline{\boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha^{k-2}\mathbf{u}}\right](u,v)\,\mathbf{n}(u,v)\,[\mathbf{tr}_\Gamma\,\boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha\mathbf{v}](u,v)\,d\Gamma_{(u,v)}-\cdots$$

$$-\cdots-\int_\Gamma\left[\overline{\boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha\mathbf{u}}\right](u,v)\,\mathbf{n}(u,v)\,[\mathbf{tr}_\Gamma\,\boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha^{k-2}\mathbf{v}](u,v)\,d\Gamma_{(u,v)}-$$

$$-\int_\Gamma[\bar{\mathbf{u}}](u,v)\,\mathbf{n}(u,v)\,[\mathbf{tr}_\Gamma\,\boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha^{k-1}\mathbf{v}](u,v)\,d\Gamma_{(u,v)}+<\mathbf{u},\boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha^k\mathbf{v}>_{\mathbf{L}_2}.$$

Из приведенного равенства следует, что для $\mathbf{v}\in\overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}_2^k(\Omega,\mathbb{H}(\mathbb{C}))$ и $\mathbf{u}\in\boldsymbol{W}_2^k(\Omega,\mathbb{H}(\mathbb{C}))$ скалярное произведение обращается в нуль тогда и только тогда, когда $\mathbf{u}\in\mathfrak{N}_2^k(\Omega,\mathbb{H}(\mathbb{C}))$. Откуда следует, что

$$\mathfrak{N}_2^k(\Omega,\mathbb{H}(\mathbb{C}))$$

и

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha^k\left(\overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}_2^k(\Omega,\mathbb{H}(\mathbb{C}))\cap\boldsymbol{W}_2^{k+M}(\Omega,\mathbb{H}(\mathbb{C}))\right)$$

являются ортогональными подпространствами.

Утверждение (б) теоремы 3.8 вытекает из теоремы 3.7 работы [21]. □

3.3. Задачи Дирихле. Рассмотрим следующие проекторы (см. [19]):

$$\mathbb{P}_\alpha:\ \boldsymbol{W}_2^k(\Omega,\mathbb{H}(\mathbb{C}))\longrightarrow \boldsymbol{W}_2^k(\Omega,\mathbb{H}(\mathbb{C}))\cap ker\,\boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha$$

и

$$\mathbb{Q}_\alpha:\ \boldsymbol{L}_2(\Omega,\mathbb{H}(\mathbb{C}))\longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha\left(\overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}_2^1(\Omega,\mathbb{H}(\mathbb{C}))\cap \boldsymbol{W}_2^{k+1}(\Omega,\mathbb{H}(\mathbb{C}))\right). \tag{3.2}$$

Из [19] очевидным образом вытекает теорема.

Теорема 3.9. *Пусть* $f\in \boldsymbol{W}_2^k(\Omega,\mathbb{H}(\mathbb{C}))$ *и* $g\in \boldsymbol{W}_2^{k+\frac{3}{2}}(\Gamma,\mathbb{H}(\mathbb{C}))$, $k\geq 0$. *Тогда краевая задача (1.1), (1.2) имеет единственное решение* $h\in \boldsymbol{W}_2^{k+2}(\Omega,\mathbb{H}(\mathbb{C}))$, *записываемое в виде*

$$h=\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha[g]+\boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha\left[\left(\mathbf{tr}_\Gamma\,\boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha\right)^{-1}\right]\mathbb{Q}_\alpha[g]+\boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha\mathbb{Q}_\alpha\boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha[f]. \tag{3.3}$$

Заметим, что единственность и существование решения h в теореме 3.9 вытекают из теоремы 4.4 работы [21].

Используя идеи, изложенные в работах [1–7], можно доказать следующее свойство оператора $\boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha$.

Свойство 3.10. *Справедливо равенство*

$$ker\,\mathbf{tr}_\Gamma\,\boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha\cap\left(\boldsymbol{W}_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma,\mathbb{H}(\mathbb{C}))\cap \operatorname{im}\mathbb{P}_\alpha\right)=\{0\}.$$

Доказательство. Если $f\in ker\,\mathbf{tr}_\Gamma\,\boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha$, то

$$\mathbf{tr}_\Gamma\,\boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha=0. \tag{3.4}$$

Итак, мы должны доказать, что если $f\in\left(\boldsymbol{W}_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma,\mathbb{H}(\mathbb{C}))\cap \operatorname{im}\mathbb{P}_\alpha\right)$, то $f\equiv 0$. Из формулы (3.4) и [21, с. 4911] получим, что

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha f\in \operatorname{im}\mathbb{Q}_\alpha\subset \boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha\left(\overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}_2^1(\Omega,\mathbb{H}(\mathbb{C}))\right).$$

Таким образом, существует $\mathbf{u}\in\overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}_2^1(\Omega,\mathbb{H}(\mathbb{C}))$, для которого верно

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha f=\boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha\mathbf{u}.$$

Откуда $\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha f\in ker\,\boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha$. Пользуясь тем, что

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha:\ \mathbf{W}_2^{k-\frac{1}{2}}(\Gamma,\mathbb{H}(\mathbb{C}))\longrightarrow \mathbf{W}_2^k(\Omega,\mathbb{H}(\mathbb{C}))\cap ker\ \boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha,$$

получаем следующую краевую задачу:

$$\begin{cases}\left(-\boldsymbol{\Delta}_{\mathbb{R}^2}+2\alpha\boldsymbol{\mathcal{D}}+\alpha^2\right)\mathbf{u}=\boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha f=0\ \text{ в }\ \Omega,\\ \mathbf{u}=0\ \text{ на }\ \Gamma.\end{cases}$$

Из теоремы 3.9 следует, что $\mathbf{u}=0$. Из равенства $\boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha\mathbf{u}=0$ вытекает равенство $\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha f=0$. Пользуясь тем, что $\mathbf{tr}_\Gamma\,\boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha f=0$ и $f\in\operatorname{im}\mathbb{P}_\alpha$, получим $f\in ker\ \boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha$ и $\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha f=0$. Откуда $f=0$. □

Теорема 3.11. *Пусть* $f \in \boldsymbol{W}_2^k(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$, $g_0 \in \boldsymbol{W}_2^{k+\frac{7}{2}}(\Gamma, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ *и* $g_1 \in \boldsymbol{W}_2^{k+\frac{3}{2}}(\Gamma, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$, $k \geq 0$. *Тогда краевая задача*

$$\begin{cases} \left(-\boldsymbol{\Delta}_{\mathbb{R}^2} + 2\alpha\boldsymbol{\mathcal{D}} + \alpha^2\right)^2 h = f \quad \textit{в} \quad \Omega, \\ h = g_0 \quad \textit{на} \quad \Gamma, \\ \left(-\boldsymbol{\Delta}_{\mathbb{R}^2} + 2\alpha\boldsymbol{\mathcal{D}} + \alpha^2\right) h = g_1 \quad \textit{на} \quad \Gamma \end{cases} \tag{3.5}$$

имеет единственное решение $h \in \boldsymbol{W}_2^{k+4}(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$:

$$\begin{aligned} h \;=\; & \boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha[g_0] + \boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha \left(\mathbf{tr}_\Gamma\, \boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha\right)^{-1} \mathbb{Q}_\alpha[g_0] + \\ + \;& \boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha\mathbb{Q}_\alpha\boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha \Big(\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha[g_1] + \boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha \left(\mathbf{tr}_\Gamma\, \boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha\right)^{-1} \mathbb{Q}_\alpha[g_1]\Big) + \left(\boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha\mathbb{Q}_\alpha\boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha\right)^2 f. \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $f \in \boldsymbol{W}_2^k(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$. Если $\mathbf{v} = \left(-\boldsymbol{\Delta}_{\mathbb{R}^2} + 2\alpha\boldsymbol{\mathcal{D}} + \alpha^2\right) h$, то краевая задача

$$\begin{cases} \left(-\boldsymbol{\Delta}_{\mathbb{R}^2} + 2\alpha\boldsymbol{\mathcal{D}} + \alpha^2\right) \mathbf{v} = f \quad \text{в} \quad \Omega, \\ \mathbf{v} = g_1 \quad \text{на} \quad \Gamma \end{cases}$$

имеет единственное решение $\mathbf{v} \in \boldsymbol{W}_2^{k+2}(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha[g_1] + \boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha \left[\left(\mathbf{tr}_\Gamma\, \boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha\right)^{-1}\right] \mathbb{Q}_\alpha[g_1] + \boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha\mathbb{Q}_\alpha\boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha[f].$$

Таким образом, краевая задача

$$\begin{cases} \left(-\boldsymbol{\Delta}_{\mathbb{R}^2} + 2\alpha\boldsymbol{\mathcal{D}} + \alpha^2\right) h = \mathbf{v} \quad \text{в} \quad \Omega, \\ h = g_0 \quad \text{на} \quad \Gamma \end{cases}$$

имеет единственное решение $h \in \boldsymbol{W}_2^{k+4}(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$:

$$h = \boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha[g_0] + \boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha \left[\left(\mathbf{tr}_\Gamma\, \boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha\right)^{-1}\right] \mathbb{Q}_\alpha[g_0] + \boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha\mathbb{Q}_\alpha\boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha[\mathbf{v}].$$

Следовательно, единственное решение краевой задачи (3.5) имеет вид

$$\begin{aligned} h \;=\; & \boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha[g_0] + \boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha \left(\mathbf{tr}_\Gamma\, \boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha\right)^{-1} \mathbb{Q}_\alpha[g_0] + \\ + \;& \boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha\mathbb{Q}_\alpha\boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha \Big(\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha[g_1] + \boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha \left(\mathbf{tr}_\Gamma\, \boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha\right)^{-1} \mathbb{Q}_\alpha[g_1]\Big) + \left(\boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha\mathbb{Q}_\alpha\boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha\right)^2 f. \end{aligned}$$

$\square$

В завершении параграфа рассмотрим вопрос о решении краевой задачи (1.3).

Теорема 3.12. *Пусть* $f \in \boldsymbol{W}_2^k(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ *и* $g_p \in \boldsymbol{W}_2^{k+2M-\frac{4p+1}{2}}(\Gamma, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$. *Тогда краевая задача (1.3) имеет единственное решение* $h \in \boldsymbol{W}_2^{k+2M}(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$:

$$\begin{aligned} h = \boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha[g_0] + \sum_{\nu=1}^{M} \left(\boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha\mathbb{Q}_\alpha\boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha\right)^{\nu-1} \Big(\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha[g_{\nu-1}] + \\ + \boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha \left(\mathbf{tr}_\Gamma\, \boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha\right)^{-1} \mathbb{Q}_\alpha[g_{\nu-1}]\Big) + \left(\boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha\mathbb{Q}_\alpha\boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha\right)^M f. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Доказательство. При $M = 1$ формула (3.6) совпадает с формулой (3.3). Для доказательства теоремы для $M > 1$ воспользуемся индукцией и теоремой 3.11. $\square$

Из теоремы 3.12 очевидным образом получаем следующую теорему.

Теорема 3.13. *Пусть* $f \in \boldsymbol{W}_2^k(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ *и* $g_p \in \boldsymbol{W}_2^{k+2M-\frac{4p+1}{2}}(\Gamma, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$. *Тогда краевая задача*

$$\begin{cases} -(\boldsymbol{\Delta}_{\mathbb{R}^2} + \lambda)^M h = f \quad \text{в} \ \ \Omega, \\ h = g_0 \quad \text{на} \ \ \Gamma, \\ -(\boldsymbol{\Delta}_{\mathbb{R}^2} + \lambda) h = g_1 \quad \text{на} \ \ \Gamma, \\ \vdots \\ -(\boldsymbol{\Delta}_{\mathbb{R}^2} + \lambda)^{M-1} h = g_{M-1} \quad \text{на} \ \ \Gamma \end{cases}$$

имеет единственное решение $h \in \boldsymbol{W}_2^{k+2M}(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$*:*

$$\begin{aligned} h \ &= \ \boldsymbol{\mathcal{F}}_{-\alpha}[g_0] + \sum_{\nu=1}^{M} \left(\boldsymbol{\mathcal{T}}_{-\alpha}\mathbb{Q}_\alpha\boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha\right)^{\nu-1} \Big(\boldsymbol{\mathcal{F}}_{-\alpha}[g_{\nu-1}]+ \\ &+ \ \boldsymbol{\mathcal{T}}_{-\alpha}\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha \left(\mathbf{tr}_\Gamma\, \boldsymbol{\mathcal{T}}_{-\alpha}\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha\right)^{-1} \mathbb{Q}_{-\alpha}[g_{\nu-1}]\Big) + (-1)^M \left(\boldsymbol{\mathcal{T}}_{-\alpha}\mathbb{Q}_\alpha\boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha\right)^M f. \end{aligned}$$

Автор выражает свою благодарность рецензентам, замечания которых способствовали улучшению текста статьи.

Литература

1. *Gürlebeck K., Sprössig W.* Quaternionic and Clifford calculus for Physicists and Engineers. New York: Wiley, Chichester, 1997.

2. *Kaehler U.* On a direct decomposition of the space $L_p(\Omega)$ // Z. Anal. Anwend. 1999. Vol. 18, No. 4. P. 839–848.

3. *Le H. T.* Hyperholomorphic structures and corresponding explicit orthogonal function systems in 3D and 4D. Ph. D. Thesis, Institute of Applied Analysis, 2014. Freiberg University of Mining and Technology, Germany.

4. *Le H. T., Morais J., Sprössig W.* Orthogonal decompositions of the complex quaternion Hilbert space and their applications // 9th International Conference on Clifford algebras and theirs Applications in Mathematical Physics, Weimar, Germany 15–20 July, 2011 / ed. K. Gürlebeck. 2011.

5. *Le H. T., Morais J., Sprössig W.* Orthogonal decompositions and their applications // Proceedings of the 19th International Conference on the Application of Computer Science and Mathematics in Architecture and Civil Engineering, Weimar, Germany 04–06 July, 2012 / eds. K. Gürlebeck, T. Lahmer, F. Werner. 2012.

6. *Le H. T., Morais J., Sprössig W.* Orthogonal decompositions of the complex quaternion Hilbert space and their applications // 9th International Conference on Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences: ICNPAA 2012. AIP Conf. Proc. 2012. Vol. 1493. P. 595–602.

7. *Sprössig W.* On decompositions of the Clifford valued Hilbert space and their applications to boundary value problems // Adv. Appl. Clifford Algebras. 1995. Vol. 5, No. 2. P. 167–186.

8. *Ammari H., Bao G., Wood A. W.* An integral equation method for the electromagnetic scattering from cavities // Math. Methods Appl. Sci. 2000. Vol. 23, no. 12. P. 1057–1072.

9. *Li D., Mao J. F.* A Koch-like sided fractal bow-tie dipole antenna // Antennas and Propagation, IEEE Transactions on. 2012. Vol. 60, no. 5. P. 2242–2251.

10. *Gürlebeck K., Sprössig W.* Quaternionic analysis and elliptic boundary value problems. Basel: Birkhauser, 1990.

11. *Kravchenko V.* Applied quaternionic analysis. In: Research and Exposition in Mathematics. Vol. 28. Germany: Heldermann Verlag, 2003.

12. *Kravchenko V., Shapiro M.* Integral representations for spatial models of mathematical physics. In: Pitman Res. Notes in Math. Ser. Vol. 351. Harlow: Longman, 1996.

13. *Gerus O. F., Shapiro M.* On boundary properties of metaharmonic simple and double layer potentials on rectifiable curves in $\mathbb{R}^2$ // Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr. 2004. Vol. 1, No. 3. P. 67–76.

14. *Gerus O. F., Shapiro M.* On a Cauchy-type integral related to the Helmholtz operator in the plane // Bol. Soc. Mat. Mex., III. Ser. 2004. Vol. 10, No. 1. P. 63–82.

15. *Shapiro M., Tovar L.* Two-dimensional Helmholtz operator and its hyperholomorphic solutions // J. Natur. Geom. 1997. Vol. 11. P. 77–100.

16. *Shapiro M., Tovar L.* On a class of integral representations related to the two-dimensional Helmholtz operator // Contemp. Math. 1998. Vol. 212. P. 229–244. Amer. Math. Soc., Providence, RI.

17. *Abreu Blaya R., Ávila-Ávila R., Bory Reyes J., Rodríguez-Dagnino R. M.* 2D Quaternionic Time-Harmonic Maxwell System in Elliptic Coordinates // Adv. Appl. Clifford Algebras. 2015. Vol. 25. Issue 2. P. 255–270.

18. *Bory Reyes J., Abreu Blaya R., Rodríguez-Dagnino R. M., Kats B. A.* On Riemann boundary value problems for null solutions of two dimensional Helmholtz equation // Anal. Math. Phys. 2019. Vol. 9. Issue 1. P. 483–496.

19. *Bory Reyes J., Abreu Blaya R., Pérez de la Rosa M. A., Schneider B.* On the 2D Quaternionic Metaharmonic Layer Potentials // Mediterranean Journal of Mathematics. 2017. Vol. 14. Issue 4. Art. no. 195.

20. *Luna-Elizarrarás M. E., Pérez-de la Rosa M. A., Rodríguez-Dagnino R. M., Shapiro M.* On quaternionic analysis for the Schrödinger operator with a particular potential and its relation with the Mathieu functions // Math. Methods Appl. Sci. 2013. Vol. 36, No. 9. P. 1080–1094.

21. *Bory-Reyes J., Abreu-Blaya R., Hernández-Simon L. M., Schneider B.* Dirichlet-Type Problems for the Two-Dimensional Helmholtz Operator in Complex Quaternionic Analysis // Mediterranean Journal of Mathematics. 2016. Vol. 13. P. 4901–4916.

22. *Wloka J.* Partielle Differentialgleichungen [Partial differential equations]. Sobolevräume und Randwertaufgaben [Sobolev spaces and boundary value problems]. Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks]. Stuttgart: B. G. Teubner, 1982.

23. *Garnir H. G.* Les Problèmes aux Limites de la Physique Mathèmatique, Basel: Birkhaüser, 1958.

24. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables / Eds. M. Abramowitz, I. A. Stegun. New York etc.: John Wiley & Sons, 1972.

25. *Arfken G. B., Weber H. J., Harris F. H.* Mathematical Methods for Physicists. 7th edn. Waltham: Academic Press, Elsevier, 2013.

26. *Watson G. N.* A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2nd edn. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

Статья поступила в редакцию 20 марта 2019 г.;
после доработки 5 июня 2019 г.;
рекомендована в печать 13 июня 2019 г.

Контактная информация:

Шнайдер Барух — Ph.D.; baruch.schneider@osu.cz; baruch_schneider@yahoo.com

Higher order Dirichlet type problems for the two-dimensional Helmholtz operator in complex quaternionic analysis

B. Schneider

University of Ostrava, 30.dubna, 22, Ostrava, 70103, Czech Republic

For citation: Schneider B. Higher order Dirichlet type problems for the two-dimensional Helmholtz operator in complex quaternionic analysis. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2019, vol. 6 (64), issue 4, pp. 646–658.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.410 (In Russian)

It is well known that the development of methods for solving Dirichlet problems is important and relevant for various areas of mathematical physics related to the Laplace equation, the Helmholtz equation, the Stokes equation, the Maxwell equation, the Dirac equation, and others. In the previous work, the author studied the solvability of Dirichlet problem of the first order and the second order in the quaternion analysis. In the present paper studies the Dirichlet boundary value problem of high order, associated with the two-dimensional Helmholtz equation with complex potential. In this paper, the existence and uniqueness and a representation formula for the solution of Dirichlet boundary value problems in the two-dimensional case are proved. Most of Dirichlet boundary value problems are focused to the 3D case. Note that the case is not a simple consequence of the three-dimensional case. For solving the problem, we use the method of orthogonal decomposition of the quaternion Sobolev space. This orthogonal decomposition of space is also the basis for the study of many elliptic boundary value problems that are in various areas of mathematics and mathematical physics. Orthogonal decompositions of the quaternionic-valued Sobolev space with respect to the Dirac operator of high order as well as the corresponding orthoprojections onto the subspaces of theses decompositions are obtained.

Keywords: quaternion analysis, Helmholtz operator, boundary problems of Dirichlet type.

References

1. Gürlebeck K., Sprössig W., *Quaternionic and Clifford calculus for Physicists and Engineers* (Wiley, Chichester, New York, 1997).

2. Kaehler U., "On a direct decomposition of the space $L_p(\Omega)$", *Z. Anal. Anwend.* **18**(4), 839–848 (1999).

3. Le H. T., *Hyperholomorphic structures and corresponding explicit orthogonal function systems in 3D and 4D* (Ph. D. Thesis, Institute of Applied Analysis, 2014. Freiberg University of Mining and Technology, Germany).

4. Le H. T., Morais J., "Sprössig W. Orthogonal decompositions of the complex quaternion Hilbert space and their applications", *9th International Conference on Clifford algebras and theirs Applications in Mathematical Physics, Weimar, Germany 15-20 July, 2011* (ed. K. Gürlebeck, 2011).

5. Le H. T., Morais J., Sprössig W., "Orthogonal decompositions and their applications", *Proceedings of the 19th International Conference on the Application of Computer Science and Mathematics in Architecture and Civil Engineering, Weimar, Germany 04–06 July, 2012* (eds. Gürlebeck K., Lahmer T., Werner F., 2012).

6. Le H. T., Morais J., Sprössig W., "Orthogonal decompositions of the complex quaternion Hilbert space and their applications", *9th International Conference on Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences: ICNPAA 2012. AIP Conf. Proc.* **1493**, 595–602 (2012).

7. Sprössig W., "On decompositions of the Clifford valued Hilbert space and their applications to boundary value problems", *Adv. Appl. Clifford Algebras* **5**(2), 167–186 (1995).

8. Ammari H., Bao G., Wood A. W., "An integral equation method for the electromagnetic scattering from cavities", *Math. Methods Appl. Sci.* **23**(12), 1057–1072 (2000).

9. Li D., Mao J. F., "A Koch-like sided fractal bow-tie dipole antenna", *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on* **60**(5), 2242–2251 (2012).

10. Gürlebeck K., Sprössig W., *Quaternionic analysis and elliptic boundary value problems* (Birkhauser, Basel, 1990).

11. Kravchenko V., *Applied quaternionic analysis*, in: *Research and Exposition in Mathematics* **28** (Heldermann Verlag, Germany, 2003).

12. Kravchenko V., Shapiro M., *Integral representations for spatial models of mathematical physics*, in: *Pitman Res. Notes in Math. Ser.* **351** (Longman, Harlow, 1996).

13. Gerus O. F., Shapiro M., "On boundary properties of metaharmonic simple and double layer potentials on rectifiable curves in $\mathbb{R}^2$", *Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr.* **1**(3), 67–76 (2004).

14. Gerus O. F., Shapiro M., "On a Cauchy-type integral related to the Helmholtz operator in the plane", *Bol. Soc. Mat. Mex., III. Ser.* **10**(1), 63–82 (2004).

15. Shapiro M., Tovar L., "Two-dimensional Helmholtz operator and its hyperholomorphic solutions", *J. Natur. Geom.* **11**, 77–100 (1997).

16. Shapiro M., Tovar L., "On a class of integral representations related to the two-dimensional Helmholtz operator", *Contemp. Math.* **212**, 229–244 (Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998).

17. Abreu Blaya R., Ávila-Ávila R., Bory Reyes J., Rodríguez-Dagnino R. M., “2D Quaternionic Time-Harmonic Maxwell System in Elliptic Coordinates”, *Adv. Appl. Clifford Algebras* **25**, issue 2, 255–270 (2015).

18. Bory Reyes, J., Abreu Blaya, R., Rodríguez-Dagnino R. M., Kats B. A., “On Riemann boundary value problems for null solutions of two dimensional Helmholtz equation”, *Anal. Math. Phys.* **9**, issue 1, 483–496 (2019).

19. Bory Reyes J., Abreu Blaya R., Pérez de la Rosa M. A., Schneider B., “On the 2D Quaternionic Metaharmonic Layer Potentials”, *Mediterranean Journal of Mathematics* **14**, issue 4, 195 (2017).

20. Luna-Elizarrarás M. E., Pérez-de la Rosa M. A., Rodríguez-Dagnino R. M., Shapiro M., “On quaternionic analysis for the Schrödinger operator with a particular potential and its relation with the Mathieu functions”, *Math. Methods Appl. Sci.* **36**(9), 1080–1094 (2013).

21. Bory-Reyes J., Abreu-Blaya R., Hernández-Simon L. M., Schneider B., “Dirichlet-Type Problems for the Two-Dimensional Helmholtz Operator in Complex Quaternionic Analysis”, *Mediterranean Journal of Mathematics* **13**, 4901–4916 (2016).

22. Wloka J., *Partielle Differentialgleichungen [Partial differential equations]. Sobolevräume und Randwertaufgaben [Sobolev spaces and boundary value problems]* (Mathematische Leitfäden, B. G. Teubner, Stuttgart, 1982).

23. Garnir H. G., *Les Problèmes aux Limites de la Physique Mathèmatique* (Birkhaüser, Basel, 1958).

24. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (Eds. M. Abramowitz, I. A. Stegun, John Wiley & Sons, New York etc., 1972).

25. Arfken G. B., Weber H. J., Harris F. H., *Mathematical Methods for Physicists* (7th edn., Academic Press, Elsevier, Waltham, 2013).

26. Watson G. N., *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* (2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1995).

Received: March 20, 2019
Revised: June 5, 2019
Accepted: June 13, 2019

Author’s information:

Baruch Schneider — baruch.schneider@osu.cz; baruch_schneider@yahoo.com