

## Вращательные колебания цилиндра со стабилизатором в потоке газа

*Н. А. Киселев, А. Н. Рябинин*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** Киселев Н. А., Рябинин А. Н. Вращательные колебания цилиндра со стабилизатором в потоке газа // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 4. С. 672–679.

<https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.412>

Рассматривается математическая модель для описания вращательных колебаний цилиндра со стабилизатором в воздушном потоке. Уравнение движения цилиндра со стабилизатором содержит моменты аэродинамических сил и сопротивление подвески. Методом Крылова—Боголюбова уравнение сводится к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений для медленно меняющейся амплитуды колебаний и фазы. Найдены решения, соответствующие установившимся колебаниям с постоянной амплитудой. Модель предсказывает, что зависимость квадрата амплитуды колебаний является линейной функцией обратной скорости воздушного потока. Число Струхала колебаний цилиндра является линейной функцией квадрата амплитуды и, следовательно, зависимость числа Струхала от обратной скорости также является линейной. В аэродинамической трубе поставлены эксперименты, проверяющие предсказания модели. Проведено сравнение предсказаний математической модели с результатами экспериментов, проведенных в аэродинамической трубе. В экспериментах с колеблющимся цилиндром к кормовой части цилиндра крепилась лазерная указка, луч которой при поворотах цилиндра пересекал поверхность фотодиода. Сигнал с фотодиода регистрировался РС-осциллографом Velleman PCS500A, связанным с персональным компьютером. Расшифровка сигнала позволила определить период и амплитуду колебаний. Эксперименты подтвердили предсказания математической модели.

*Ключевые слова:* аэродинамическая труба, плохо обтекаемое тело, нестационарные силы, колебания, математическое моделирование.

**Введение.** При транспортировке груза, подвешенного на внешней подвеске под вертолетом, возникают колебания, которые необходимо прогнозировать. Для уменьшения лобового сопротивления к грузу прикрепляют стабилизатор, который удерживает груз в выгодном положении [1]. Однако для некоторых плохо обтекаемых тел, в частности, для кругового цилиндра, длина которого  $L$  в два раза больше диаметра  $D$ , снабженных хвостовым стабилизатором, в потоке возникают вращательные автоколебания вокруг вертикальной оси [2, 3]. Не представляющие опасности в некоторых диапазонах воздушной скорости вертолета, они могут стать причиной катастрофы, если их частота окажется близка к частоте колебаний груза на подвеске, как физического маятника [2, 3]. Ранее изучались колебания цилиндров, закрепленных на упругой подвеске, снабженной пружинами, в зависимости от удлинения цилиндров и от расположения оси вращения [4, 5]. В настоящей работе описывает-

ся математическая модель вращательных колебаний цилиндра со стабилизатором и эксперимент в аэродинамической трубе.

Изучаются колебания цилиндров вокруг оси, перпендикулярной вектору скорости набегающего потока и оси цилиндра. Момент аэродинамических сил, действующий на стабилизатор, возвращает цилиндр в равновесное положение. Пусть  $\beta$  — угол между осью цилиндра и вектором скорости набегающего потока. В равновесном положении  $\beta = 0$ . Цилиндр обладает одной степенью свободы, он может поворачиваться только вокруг одной оси.

В случаях, когда аэродинамические силы, действующие на тело, зависят лишь от мгновенных углов атаки и скольжения, для описания колебаний упруго закрепленных тел хорошо зарекомендовало себя квазистационарное приближение [6–9]. Однако к вращательным колебаниям плохо обтекаемых тел квазистационарное приближение неприменимо, поскольку аэродинамические силы в этом случае зависят не только от мгновенных углов атаки и скольжения, но и от производных этих углов по времени [10, 11].

**1. Математическая модель.** Уравнение движения цилиндра со стабилизатором в воздушном потоке имеет вид

$$I\ddot{\beta} + \frac{\rho v^2}{2} S L m_{\beta} \beta = \frac{\rho}{2} S L^2 v m_{\dot{\beta}} \left( 1 - \delta \beta^2 - \delta_1 \frac{L}{v} \beta \dot{\beta} - \delta_2 \frac{L^2}{v^2} \dot{\beta}^2 \right) \dot{\beta} - r \dot{\beta}, \quad (1)$$

где  $I$  — момент инерции цилиндра относительно оси вращения,  $r$  — коэффициент трения в подвеске,  $S$  — характерная площадь цилиндра (площадь круга диаметра  $D$ ),  $\rho$  — плотность воздуха,  $v$  — скорость воздушного потока,  $m_{\beta}$ ,  $m_{\dot{\beta}}$  — аэродинамические вращательные производные момента,  $\delta$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  — безразмерные коэффициенты в членах разложения по степеням угла  $\beta$  и производной этого угла  $\dot{\beta}$ .

Второе слагаемое в левой части представляет собой момент аэродинамической силы, который возвращает цилиндр, отклонившийся от равновесного положения  $\beta = 0$ , в равновесное положение. В правой части уравнения (1) собраны члены, которые малы по сравнению с членами в левой части. Если бы в правой части содержались только линейные члены, то уравнение описывало бы либо затухающие, либо растущие колебания. Установившиеся колебания с постоянной амплитудой, наблюдающиеся в эксперименте, могут быть решениями только нелинейного уравнения. Мы добавили в уравнение нелинейную часть, при разложении которой в ряд по степеням малых величин  $\beta$  и  $\dot{\beta}$  оставили только члены третьего порядка.

Вводя новые обозначения

$$\omega^2 = \frac{k}{L^2} v^2, \quad k = \frac{\rho}{2I} S L^3 m_{\beta}, \quad \mu = \frac{\rho}{2I} S L^3 m_{\dot{\beta}}, \quad k_* = \frac{r}{I\mu},$$

перепишем уравнение (1):

$$\ddot{\beta} + \omega^2 \beta = \mu \frac{v}{L} \left( 1 - \delta \beta^2 - \delta_1 \frac{L}{v} \beta \dot{\beta} - \delta_2 \frac{L^2}{v^2} \dot{\beta}^2 \right) \dot{\beta} - \mu k_* \dot{\beta}. \quad (2)$$

Исключим из полученного выражения (2) скорость:

$$\ddot{\beta} + \omega^2 \beta = \mu \left( \frac{\omega}{\sqrt{k}} - k_* - \delta \frac{\omega}{\sqrt{k}} \beta^2 - \delta_1 \beta \dot{\beta} - \delta_2 \frac{\sqrt{k}}{\omega} \dot{\beta}^2 \right) \dot{\beta} = \mu f(\beta, \dot{\beta}). \quad (3)$$

Полагая  $\mu$  малым параметром, используем для решения уравнения (3) метод Крылова — Боголюбова [12]. Введем новые переменные: амплитуду  $A$  и фазу  $\psi$  колебаний, тогда

$$\beta = A \cos(\psi), \quad \psi = \omega t + \varphi.$$

Амплитуда  $A$  и сдвиг фаз  $\varphi$  являются медленными функциями времени. В первом приближении метода Крылова — Боголюбова для получения выражений для производных амплитуды и фазы используются следующие формулы:

$$\dot{A} = -\frac{\mu}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(A \cos \psi, -A\omega \sin \psi) \sin \psi \, d\psi, \quad (4)$$

$$\dot{\psi} = \omega - \frac{\mu}{2\pi A\omega} \int_0^{2\pi} f(A \cos \psi, -A\omega \sin \psi) \cos \psi \, d\psi. \quad (5)$$

После вычисления интегралов в выражениях (4) и (5) получаем приближенные уравнения движения в виде

$$\dot{A} = A \frac{\mu}{2} \left( \frac{\omega}{\sqrt{k}} - k_* - \frac{\delta}{4} \frac{\omega}{\sqrt{k}} A^2 - \frac{3\delta_2}{4} \sqrt{k\omega} A^2 \right), \quad (6)$$

$$\dot{\psi} = \omega - \frac{\delta_1}{8} \mu \omega A^2. \quad (7)$$

Полагая выражение в скобках уравнения (6) равным нулю, можно получить формулу для амплитуды установившихся колебаний:

$$A^2 = \frac{4}{\delta + 3k\delta_2} \left( 1 - \frac{k_* L}{v} \right). \quad (8)$$

Квадрат амплитуды колебаний является линейной функцией обратной скорости  $v^{-1}$ .

Круговая частота установившихся колебаний равна сумме  $\dot{\psi} = \omega + \dot{\varphi}$ .

Число Струхала, полученное обезразмериванием частоты колебаний, представляется в виде

$$\text{Sh} = \frac{\dot{\psi} L}{2\pi v} = \frac{\dot{\psi} \sqrt{k}}{2\pi \omega} = \frac{\sqrt{k}}{2\pi} \left( 1 - \frac{\delta_1}{8} \mu A^2 \right). \quad (9)$$

**2. Экспериментальная проверка.** Испытания проводились в аэродинамической трубе АТ-12 СПбГУ [13]. Испытуемый цилиндр был выполнен из дерева. Его длина  $L$  и диаметр  $D$  равны 0.28 м и 0.14 м соответственно. Стабилизатор имел форму прямоугольника с размерами  $0.21 \times 0.115 \text{ м}^2$ . Длинной стороной стабилизатор был прикреплен к цилиндру. Расстояние от переднего торца цилиндра до передней кромки стабилизатора составило 0.16 м. В первом эксперименте изучалась возможность представления аэродинамического момента сил в виде линейной функции угла наклона  $\beta$ . Момент измерялся с помощью аэродинамических весов с проволочной подвеской. При этом модель была неподвижной. Таким образом, измерялась только составляющая момента, представленная вторым слагаемым в левой части уравнения (1). На рис. 1 представлен график зависимости коэффициента момента  $m$  от угла наклона  $\beta$ . Момент принимался положительным, если он стремится увеличить угол  $\beta$ .

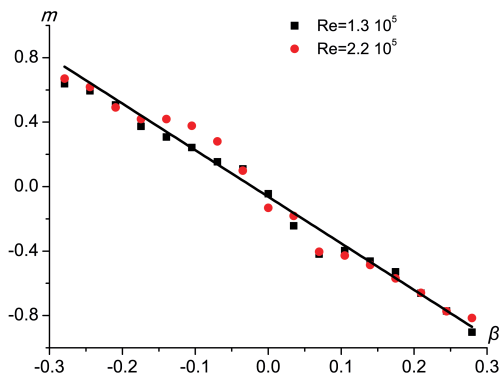


Рис. 1. Зависимость коэффициента момента  $m$  от угла наклона  $\beta$ .

Зависимость близка к линейной, наклон практически не зависит от числа Рейнольдса (исследования проводились в диапазоне  $1.3 \cdot 10^5 < Re < 2.2 \cdot 10^5$ ). Отличие коэффициента момента от нуля при нулевом угле наклона цилиндра объясняется погрешностями установки цилиндра со стабилизатором. Данные эксперимента позволили определить параметр  $m_\beta = 2.85$ . Погрешность, определенная по разбросу данных, составила 5%.

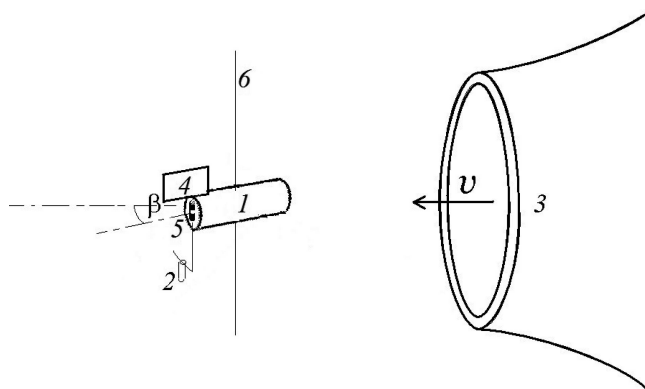


Рис. 2. Схема эксперимента. 1 — цилиндр, 2 — фотодиод, 3 — сопло аэродинамической трубы, 4 — стабилизатор, 5 — лазерная указка, 6 — ось вращения цилиндра.

Схема второго эксперимента представлена на рис. 2. Цилиндр 1 со стабилизатором 2 устанавливался в рабочей части аэродинамической трубы таким образом, чтобы он мог поворачиваться только вокруг вертикальной оси 6, проходящей через геометрический центр цилиндра. Подвеска реализована в виде стальных натянутых струн диаметром 0.3 мм, длиной более 1 м, расположенных вертикально выше и ниже цилиндра и прикрепленных к цилиндру в двух диаметрально противоположных точках. Поперечные перемещения цилиндра исключались с помощью тонких стальных шайб, через которые пропущены струны у поверхности цилиндра. Положение шайб фиксировалось проволочными растяжками. На места контакта струн с шайбами наносилась смазка. На кормовом торце цилиндра была прикреплена лазерная

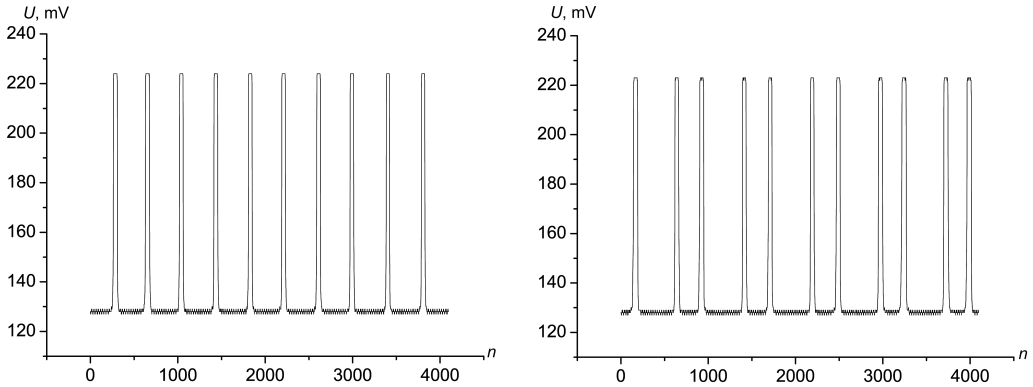


Рис. 3. Два примера зависимости сигнала на фотодиоде от номера считывания. Слева — фотодиод помещен в центре. Справа — фотодиод смещен.

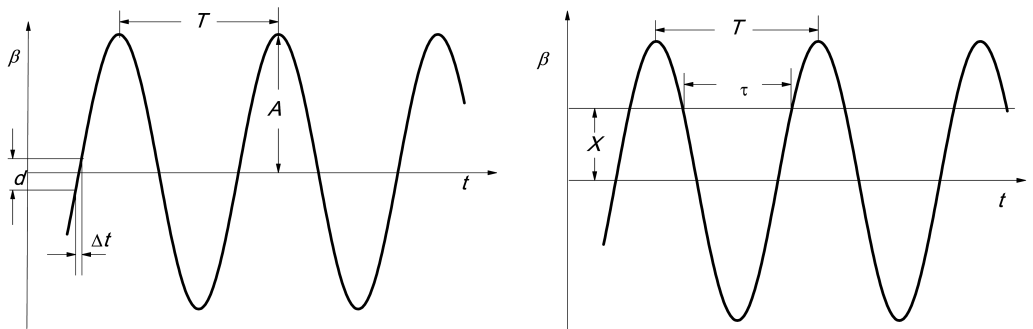


Рис. 4. К расшифровке сигнала на фотодиоде. Слева — фотодиод помещен в центре. Справа — фотодиод смещен.

указка 5. Световой луч от указки был направлен вниз и при колебаниях цилиндра попадал на фотодиод 2, который закреплялся в двух положениях. Сигнал фотодиода регистрировался РС-осциллографом Velleman-PC5500A. Осциллограф связан с компьютером, на котором зависимость сигнала от времени записывалась в файл. Считывание сигнала с фотодиода производилось с частотой 1250 Гц. Один файл измерений содержал 4095 считываний. Два примера зависимости сигнала от номера считывания приведены на рис. 3. Эти примеры отличаются расположением фотодиода. При расположении фотодиода в центре лазерный луч пересекает поверхность фотодиода дважды за период через равные промежутки времени. При смещении фотодиода на некоторое расстояние луч также пересекает фотодиод дважды, но время между соседними пересечениями принимает поочередно два разных значения.

Оба варианта позволяют измерить период колебаний  $T$  и определить число Струхала по формуле

$$\text{Sh} = \frac{D}{Tv}.$$

Амплитуда колебаний определялась двумя способами. Для пояснения способов определения амплитуды приведен рис. 4.

Чтобы найти амплитуду по данным, полученным при расположении фотодиода в центре, нужно определить, за какое время  $\Delta t$  луч пересечет поверхность фотоди-

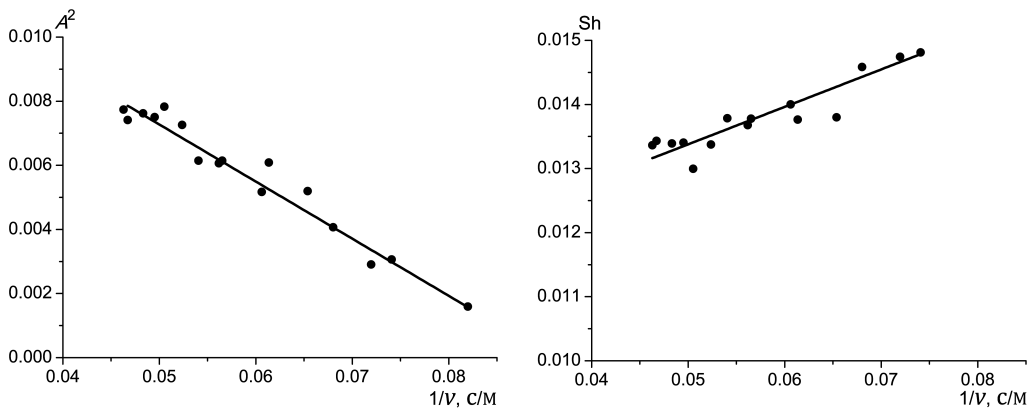


Рис. 5. Зависимости квадрата амплитуды и числа Струхала от обратной скорости.

ода, имеющую форму круга диаметром  $d$ . Если фотодиод смещен на угол  $X$ , нужно определить максимальное время  $\tau$  между соседними импульсами. Амплитуда вычислялась по следующим формулам:

$$A = \frac{d/2}{\sin(2\pi\Delta t/T)}, \quad A = \frac{X}{\sin(\pi\tau/T - \pi/2)}.$$

Оба метода расчета дали близкие значения амплитуды.

На рис. 5 приведены графики зависимостей квадрата амплитуды  $A^2$  и числа Струхала  $Sh$  от  $1/v$ . Как предсказывает математическая модель, эти зависимости представляют собой линейные функции. Косвенно это свидетельствует о справедливости сделанного предположения о том, что трение в подвеске пропорционально скорости вращения цилиндра. Аппроксимируя данные на графике зависимости  $A^2$  от  $1/v$  прямой линией, продолжим ее до пересечения с осью ординат. В точке пересечения с осью получим значение скорости потока, ниже которой колебания будут затухающими. Если бы удалось полностью исключить сопротивление подвески, амплитуда колебаний не зависела бы от скорости набегающего потока. Разумеется, сказанное справедливо только в области автомодельности течения по числу Рейнольдса. Сам механизм автоколебаний связан, по-видимому, с отрывом и присоединением пограничного слоя к поверхности цилиндра. В настоящей работе цилиндр и стабилизатор рассматриваются как одно тело. Можно полагать, что уменьшение площади стабилизатора повлечет за собой уменьшение возвращающего момента и уменьшение частоты колебаний. Без стабилизатора цилиндр не будет ориентироваться по потоку. Желающие могут ознакомиться с результатами исследований колебаний цилиндра без стабилизатора, в которых возвращающий момент создается пружинами, в работах [4, 5].

**Заключение.** Предложена математическая модель для описания вращательных колебаний цилиндра со стабилизатором в воздушном потоке. Модель предсказывает, что зависимость квадрата амплитуды колебаний является линейной функцией обратной скорости воздушного потока. Число Струхала колебаний цилиндра является линейной функцией квадрата амплитуды и, следовательно, зависимость числа Струхала от обратной скорости также является линейной. Проведено сравне-

ние предсказаний математической модели с результатами экспериментов, проведенных в аэродинамической трубе. Эксперименты подтвердили предсказания.

## Литература

1. Устройство для перевозки крупногабаритных грузов на внешней подвеске вертолета. Пат. Рос. Федерации № 2002676; заявка 90 4907895 10.12.1990; опубл. 15.11.1993. Бюл. № 41–42. 4 с.
2. *Рябинин А. Н., Тюрин Б. Ф.* Поведение груза, подвешенного под вертолетом // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 1993. Вып. 1. С. 87–91.
3. *Рябинин А. Н.* Колебания маятника со стабилизатором в воздушном потоке // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 1997. Вып. 2. С. 71–77.
4. *Рябинин А. Н., Киселев Н. А.* Влияние положения оси вращения цилиндра на его вращательные колебания в воздушном потоке // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3(61). Вып. 2. С. 315–323.
5. *Ryabinin A. N., Kiselev N. A.* Rotational oscillation of a cylinder in air flow // ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences. 2017. Vol. 12, No. 23. P. 6803–6808.
6. *Parkinson G. V., Brooks N. P.* On the aeroelastic instability of bluff cylinders // Journal of Applied Mechanics. 1961. Vol. 28. P. 252–258.
7. *Parkinson G. V., Smith J. D.* The square prism as an aeroelastic non-linear oscillator // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 1964. Vol. 17. P. 225–239.
8. *Novak M.* Aeroelastic galloping of prismatic bodies // ASCE Journal of Engineering Mechanics Division. 1969. Vol. 95. P. 115–142.
9. *Alonso G., Meseguer J., Perez-Grande I.* Galloping instabilities of two-dimensional triangular cross-section bodies // Experiments in Fluids. 2005. Vol. 38. P. 789–795.
10. *Bratt J. B.* Wind-tunnel techniques for the measurements of oscillatory derivatives // Aeronautical research council report and memoranda. 1963. No. 3310. P. 1–53.
11. *Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К., Табачников В. Г.* Крыло в нестационарном потоке газа. М.: Наука, 1971.
12. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. 4-е изд. М.: Наука, 1974.
13. *Ковалев М. А.* О расчете и исследовании аэродинамических труб // Уч. зап. Ленингр. ун-та. 1939. Вып. 7. С. 61–86.

Статья поступила в редакцию 19 марта 2019 г.;  
после доработки 26 марта 2019 г.;  
рекомендована в печать 13 июня 2019 г.

Контактная информация:

*Киселев Николай Андреевич* — аспирант; [kisnikn@mail.ru](mailto:kisnikn@mail.ru)

*Рябинин Анатолий Николаевич* — д-р физ.-мат. наук, проф.; [a.ryabinin@spbu.ru](mailto:a.ryabinin@spbu.ru)

## Rotational oscillations of the cylinder with stabilizer in the gas flow

*N. A. Kiselev, A. N. Ryabinin*

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

**For citation:** Kiselev N. A., Ryabinin A. N. Rotational oscillations of the cylinder with stabilizer in the gas flow. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2019, vol. 6 (64), issue 4, pp. 672–679. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.412> (In Russian)

A mathematical model for describing the rotational oscillations of a cylinder with a stabilizer in the air flow is considered. The equation of motion of a cylinder with a stabilizer contains moments of aerodynamic forces and suspension resistance. The Krylov —

Bogolyubov method transforms the equation to a system of two ordinary differential equations for a slowly varying amplitude of oscillations and a phase. Solutions are found that correspond to steady-state oscillations with a constant amplitude. The model predicts that the dependence of the square of the oscillation amplitude is a linear function of the reverse velocity of the air flow. The Strouhal number of cylinder oscillations is a linear function of the square of the amplitude and, therefore, the dependence of the Strouhal number on the inverse velocity is also linear. In the wind tunnel, experiments were conducted that tested the model predictions. A comparison of the predictions of the mathematical model with the results of experiments conducted in a wind tunnel was made. In experiments with an oscillating cylinder, a laser pointer was attached to the aft part of the cylinder, the beam of which crossed the surface of the photodiode as the cylinder rotated. The photodiode signal was recorded by a Velleman PCS500A PC oscilloscope connected to a personal computer. Decoding the signal allowed us to determine the period and amplitude of oscillations. Experiments confirmed the predictions of the mathematical model.

*Keywords:* wind tunnel, bluff body, unsteady forces, oscillations, mathematical simulation.

## References

1. *The device for the transport of bulky cargo on external suspension of a helicopter* (Patent of Russian Federation No. 2002676; appl. 90 4907895 10.12.1990; published 15.11.1993. Bulletin No. 41–42). (In Russian)
2. Ryabinin A. N., Tyurin B. F., “The behavior of the load suspended under a helicopter”, *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, issue 1, 87–91 (1993). (In Russian)
3. Ryabinin A. N., “Oscillations of the pendulum with stabilizer in the air stream”, *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, issue 2, 71–77 (1997). (In Russian)
4. Ryabinin A. N., Kiselev N. A., “Effect of rotation axis position of the cylinder on its rotational oscillations in the air stream”, *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **3(61)**, issue 2, 315–323 (2016). (In Russian)
5. Ryabinin A. N., Kiselev N. A., “Rotational oscillation of a cylinder in air flow”, *ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences* **12(23)**, 6803–6808 (2017).
6. Parkinson G. V., Brooks N. P., “On the aeroelastic instability of bluff cylinders”, *Journal of Applied Mechanics* **28**, 252–258 (1961).
7. Parkinson G. V., Smith J. D., “The square prism as an aeroelastic non-linear oscillator”, *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* **17**, 225–239 (1964).
8. Novak M., “Aeroelastic galloping of prismatic bodies”, *ASCE Journal of Engineering Mechanics Division* **95**, 115–142 (1969).
9. Alonso G., Meseguer J., Perez-Grande I., “Galloping instabilities of two-dimensional triangular cross-section bodies”, *Experiments in Fluids* **38**, 789–795 (2005).
10. Bratt J. B., “Wind-tunnel techniques for the measurements of oscillatory derivatives”, *Aeronautical research council report and memoranda* (3310), 1–53 (1963).
11. Belotserkovskii S. M., Skripach B. K., Tabachnikov V. G., *A Wing in an Unsteady Gas Stream* (Nauka Publ., Moscow, 1971). (In Russian)
12. Bogoliubov N. N., Mitropolski Y. A., *Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations* (Gordon and Breach, New York, 1961).
13. Kovalev M. A., “On calculation and investigation of wind tunnels”, *Uchenye zapiski Leningradskogo universiteta* **7**, 61–86 (1939). (In Russian)

Received: March 19, 2019

Revised: March 26, 2019

Accepted: June 13, 2019

## Authors' information:

Nikolai A. Kiselev — kismnik@mail.ru

Anatoly N. Ryabinin — a.ryabinin@spbu.ru