УДК 517.5 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 1
MSC 41A15, 41A17, 41A44

Точное неравенство типа Джексона — Черныха для приближений сплайнами на оси*

О. Л. Виноградов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Виноградов О. Л.* Точное неравенство типа Джексона — Черныха для приближений сплайнами на оси // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 1. С. 15–27.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.102

В работе устанавливается аналог неравенства Джексона — Черныха для приближений сплайнами в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. При $r \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$ через $A_{\sigma r}(f)_2$ обозначается наилучшее приближение функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ пространством сплайнов степени r минимального дефекта с узлами $\frac{j\pi}{\sigma}$, $j \in \mathbb{Z}$, а через $\omega(f,\delta)_2$ — ее первый модуль непрерывности в $L_2(\mathbb{R})$. Основной результат работы таков. Для любой $f \in L_2(\mathbb{R})$

$$A_{\sigma r}(f)_2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega\left(f, \frac{\theta_r \pi}{\sigma}\right)_2,$$

где ε_r — положительный корень уравнения

$$\frac{4\varepsilon^2(\operatorname{ch}\frac{\pi\varepsilon}{\tau} - 1)}{\operatorname{ch}\frac{\pi\varepsilon}{\tau} + \cos\frac{\pi}{\tau}} = \frac{1}{3^{2r-2}}, \quad \tau = \sqrt{1-\varepsilon^2},$$

$\theta_r = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon_r^2}}$. Константу $\frac{1}{\sqrt{2}}$ на всем классе $L_2(\mathbb{R})$ уменьшить нельзя, даже если увеличить шаг у модуля непрерывности.

Ключевые слова: неравенство Джексона, сплайны, точные константы.

1. Введение. Далее L_2 — пространство измеримых 2π-периодических функций с суммируемым квадратом, $L_2(\mathbb{R})$ — пространство измеримых на $\mathbb{R}$ функций с суммируемым квадратом; нормы в этих пространствах определяются формулой

$$\|f\|_2 = \left(\int_E |f|^2\right)^{1/2},$$

где $E = [-\pi, \pi]$ или $\mathbb{R}$ соответственно. Хорошо известны точные неравенства типа Джексона

$$E_n(f)_2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_2, \tag{1.1}$$

$$A_\sigma(f)_2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega\left(f, \frac{\pi}{\sigma}\right)_2. \tag{1.2}$$

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00055).

Здесь $n \in \mathbb{N}$, $E_n(f)_2$ — наилучшее приближение функции $f \in L_2$ тригонометрическими многочленами порядка меньше n, $\sigma > 0$, $A_\sigma(f)_2$ — наилучшее приближение функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ целыми функциями степени не выше σ, а

$$\omega(f, \delta)_2 = \sup_{0 \leqslant t \leqslant \delta} \|f(\cdot + t) - f\|_2$$

— первый модуль непрерывности в пространстве L_2 или $L_2(\mathbb{R})$. Константу $\frac{1}{\sqrt{2}}$ на всем классе L_2 и $L_2(\mathbb{R})$ уменьшить нельзя, даже если увеличить шаг у модуля непрерывности. Шаг $\frac{\pi}{n}$ и $\frac{\pi}{\sigma}$ при сохранении константы тоже уменьшить нельзя.

Неравенство (1.1) и его точность установил Черных [1]; см. также [2, теорема 6.2.4]. Он же [3] доказал невозможность уменьшить шаг. Неравенство (1.2) установили Ибрагимов и Насибов [4] и независимо Попов [5]. В [5] доказана еще и точность константы. Неулучшаемость шага в (1.2) доказал Московский [6]. Константам и оптимальному шагу в неравенствах типа Джексона, в том числе в различных весовых пространствах L_2, посвящена обширная литература. Укажем на статью [7], в которой обсуждается связь задачи о наименьшем шаге в неравенствах типа Джексона и задачи Логана [8] о функции, чье преобразование Фурье сохраняет знак вне некоторого множества.

В [9] автор установил аналог неравенства (1.1) для приближений периодических функций сплайнами. В настоящей работе устанавливается аналог неравенства (1.2) для приближений сплайнами в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. Через $A_{\sigma r}$ обозначается наилучшее приближение пространством $\mathbf{S}_{\sigma r}$ сплайнов степени r минимального дефекта с узлами $\frac{j\pi}{\sigma}$, $j \in \mathbb{Z}$ (см. § 2), т. е.

$$A_{\sigma r}(f)_2 = \inf_{s \in \mathbf{S}_{\sigma r} \cap L_2(\mathbb{R})} \|f - s\|_2, \quad f \in L_2(\mathbb{R}).$$

Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1. *Пусть $r \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$, ε_r — положительный корень уравнения*

$$\frac{4\varepsilon^2(\operatorname{ch}\frac{\pi\varepsilon}{\tau} - 1)}{\operatorname{ch}\frac{\pi\varepsilon}{\tau} + \cos\frac{\pi}{\tau}} = \frac{1}{3^{2r-2}}, \quad \tau = \sqrt{1 - \varepsilon^2},$$

$\theta_r = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon_r^2}}$*. Тогда для любой функции $f \in L_2(\mathbb{R})$*

$$A_{\sigma r}(f)_2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega\left(f, \frac{\theta_r \pi}{\sigma}\right)_2. \tag{1.3}$$

Отметим, что $\theta_1 < 1{,}166$, $\theta_2 < 1{,}0143$, $\theta_3 < 1{,}00155$. В [9] доказано, что θ_r убывает по r и экспоненциально стремится к 1 при $r \to \infty$.

Утверждение о точности константы $\frac{1}{\sqrt{2}}$ содержится в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $\sigma > 0$.*

1. Если $K < \frac{1}{\sqrt{2}}$, то ни при каком $\delta > 0$ неравенство

$$A_{\sigma r}(f)_2 \leqslant K\,\omega\left(f, \delta\right)_2$$

не может выполняться на всем пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

2. Если $\delta \in \left(0, \frac{\pi}{\sigma}\right)$, то неравенство

$$A_{\sigma r}(f)_2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega\,(f,\delta)_2 \tag{1.4}$$

не может выполняться на всем пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

Из теорем 1 и 2 следует, что при $r \in \mathbb{N}$ наименьший шаг δ в неравенстве (1.4) принадлежит отрезку $\left[\frac{\pi}{\sigma}, \frac{\theta_r \pi}{\sigma}\right]$. Вопрос о его точном значении остается открытым.

В работе используются следующие обозначения: $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$ — множества вещественных, целых, неотрицательных целых, натуральных чисел соответственно, L_p и $L_p(E)$ — стандартные пространства Лебега 2π-периодических функций и функций, заданных на множестве E, ℓ_p — пространство двусторонних последовательностей с суммируемой p-й степенью. Если из контекста не следует противное, пространства функций могут быть как вещественными, так и комплексными. Преобразование Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ определяется равенством

$$c(f,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-iyt}\,dt.$$

Индекс p у обозначений нормы, наилучшего приближения и т. п. указывает на пространство L_p или $L_p(\mathbb{R})$; если требуется уточнение, в качестве индекса используется обозначение пространства. Функции доопределяются в точке устранимого разрыва по непрерывности; в остальных случаях полагаем $\frac{0}{0} = 0$.

2. Элементы анализа Фурье для сплайнов. При $r \in \mathbb{Z}_+$, $\sigma > 0$ через $\mathbf{S}_{\sigma r}$ обозначается пространство сплайнов степени r минимального дефекта с узлами $\frac{j\pi}{\sigma}$, $j \in \mathbb{Z}$. При $r \in \mathbb{N}$ это множество $r-1$ раз непрерывно дифференцируемых функций, сужение которых на каждый интервал $\left(\frac{j\pi}{\sigma}, \frac{(j+1)\pi}{\sigma}\right)$ есть многочлен степени не выше r; $\mathbf{S}_{\sigma 0}$ есть множество функций, постоянных на каждом таком интервале (значения в точках разрыва несущественны). При $n \in \mathbb{N}$ через $\widetilde{\mathbf{S}}_{nr}$ обозначается пространство 2π-периодических сплайнов из $\mathbf{S}_{nr}$.

B-сплайн степени r определяется равенством

$$B_{\sigma r}(x) = \int_{\mathbb{R}} d_r\left(\frac{y}{\sigma}\right)e^{ixy}\,dy, \tag{2.1}$$

где

$$d_r(y) = \left(\frac{e^{i\pi y}-1}{i\pi y}\right)^{r+1}.$$

Другими словами, $c(B_{\sigma r}, y) = d_r\left(\frac{y}{\sigma}\right)$. Ясно, что $B_{\sigma r}(x) = \sigma B_{1r}(\sigma x)$. При выбранной нормировке $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} B_{\sigma r} = 1$. Обозначим еще

$$D_r(y) = \sum_{q\in\mathbb{Z}} |d_r(y+2q)|^2 = \left(\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi y}{2}\right)^{2r+2} \sum_{q\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(y+2q)^{2r+2}}. \tag{2.2}$$

Как известно [2, 10], всякий сплайн $s \in \mathbf{S}_{\sigma r}$ единственным образом представляется в виде

$$s(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \beta_j B_{\sigma r}\left(x - \frac{j\pi}{\sigma}\right). \tag{2.3}$$

Кроме того, для любого $p \in [1, +\infty]$ включения $s \in L_p(\mathbb{R})$ и $\beta \in \ell_p$ равносильны [10]. Отсюда следует вложение пространств сплайнов: если $1 \leqslant q < p \leqslant +\infty$, то $\mathbf{S}_{\sigma r} \cap L_q(\mathbb{R}) \subset \mathbf{S}_{\sigma r} \cap L_p(\mathbb{R})$.

Обозначим

$$\Phi_{\sigma r}(x, y) = \frac{1}{2\sigma} \sum_{j \in \mathbb{Z}} B_{\sigma r}\left(x - \frac{j\pi}{\sigma}\right) e^{i\frac{j\pi}{\sigma}y}.$$

Функции $\Phi_{\sigma r}(\cdot, y)$ называются *экспоненциальными сплайнами.*

Перечислим несколько свойств экспоненциальных сплайнов.

E1. $\Phi_{\sigma r}(x, y + 2\sigma) = \Phi_{\sigma r}(x, y)$, $\Phi_{\sigma r}\left(x + \frac{\pi}{\sigma}, y\right) = e^{i\frac{\pi}{\sigma}y}\Phi_{\sigma r}(x, y)$, $\overline{\Phi_{\sigma r}}(x, y) = \Phi_{\sigma r}(x, -y)$ и функция $\Phi_{\sigma r}$ ограничена на $\mathbb{R}^2$.

Свойство E1 очевидно.

E2. По формуле суммирования Пуассона

$$\Phi_{\sigma r}(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_r\left(\frac{y}{\sigma} + 2k\right) e^{i(y+2k\sigma)x}. \tag{2.4}$$

В частности, $\Phi_{\sigma r}(x, 0) = 1$.

E3. Справедливо равенство

$$\int_{\mathbb{R}} B_{\sigma r}(t)\overline{\Phi_{\sigma r}}(t, y)\, dt = 2\pi D_r\left(\frac{y}{\sigma}\right). \tag{2.5}$$

Действительно, по формулам (2.4), (2.1) и (2.2) находим

$$\int_{\mathbb{R}} B_{\sigma r}(t)\overline{\Phi_{\sigma r}}(t, y)\, dt = \int_{\mathbb{R}} B_{\sigma r}(t) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{d_r}\left(\frac{y}{\sigma} + 2k\right) e^{-i(y+2k\sigma)t}\, dt = 2\pi D_r\left(\frac{y}{\sigma}\right).$$

Экспоненциальные сплайны введены в рассмотрение Шёнбергом, основы теории и исторические комментарии содержатся в [10]. Периодические аналоги экспоненциальных сплайнов образуют ортогональные базисы в пространствах $\widetilde{\mathbf{S}}_{nr}$, подобно тому как экспоненты образуют ортогональные базисы в пространствах тригонометрических многочленов (см., например, [9]).

Получим континуальный аналог разложения сплайна по базису экспоненциальных сплайнов.

Пусть сплайн s выражается равенством (2.3) и пусть $s \in L_2(\mathbb{R})$. Положим

$$\zeta_{\sigma r}(s, y) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \beta_j e^{-i\frac{j\pi}{\sigma}y}.$$

Имеем $\beta \in \ell_2$ и потому $\zeta_{\sigma r}(s) \in L_2[-\sigma, \sigma]$, а $\Phi_{\sigma r}(x, \cdot)$ ограничена по свойству E1. По равенству Парсеваля для произведения двух функций имеем

$$s(x) = \int_{-\sigma}^{\sigma} \zeta_{\sigma r}(s, y)\Phi_{\sigma r}(x, y)\, dy. \tag{2.6}$$

Это и есть искомое разложение.

Следующая лемма утверждает, что для $s \in L_1(\mathbb{R})$ функция $\zeta_{\sigma r}(s)$ выражается формулой, аналогичной формуле для преобразования Фурье.

Лемма 1. *Если $s \in \mathbf{S}_{\sigma r} \cap L_1(\mathbb{R})$, то*

$$\zeta_{\sigma r}(s,y) = \frac{1}{2\pi D_r\left(\frac{y}{\sigma}\right)} \int_{\mathbb{R}} s(t)\overline{\Phi_{\sigma r}}(t,y)\,dt. \tag{2.7}$$

Доказательство. Последовательно применяя (2.3), E1 и (2.5), находим

$$\int_{\mathbb{R}} s(t)\overline{\Phi_{\sigma r}}(t,y)\,dt = \int_{\mathbb{R}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \beta_j B_{\sigma r}\left(t - \frac{j\pi}{\sigma}\right)\overline{\Phi_{\sigma r}}(t,y)\,dt =$$
$$= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \beta_j \int_{\mathbb{R}} B_{\sigma r}\left(t - \frac{j\pi}{\sigma}\right)\overline{\Phi_{\sigma r}}(t,y)\,dt = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \beta_j \int_{\mathbb{R}} B_{\sigma r}(t)\overline{\Phi_{\sigma r}}\left(t + \frac{j\pi}{\sigma}, y\right)dt =$$
$$= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \beta_j \int_{\mathbb{R}} B_{\sigma r}(t)\overline{\Phi_{\sigma r}}(t,y)e^{-i\frac{j\pi}{\sigma}y}\,dt = 2\pi D_r\left(\frac{y}{\sigma}\right)\zeta_{\sigma r}(s,y).$$

Почленное интегрирование законно, поскольку $\beta \in \ell_1$. □

Справедлив сплайновый аналог теоремы Планшереля.

Лемма 2. *Если $S, s \in \mathbf{S}_{\sigma r} \cap L_2(\mathbb{R})$, то*

$$\int_{\mathbb{R}} |s(x)|^2\,dx = 2\pi \int_{-\sigma}^{\sigma} |\zeta_{\sigma r}(s,y)|^2 D_r\left(\frac{y}{\sigma}\right)dy, \tag{2.8}$$

$$\int_{\mathbb{R}} S(x)\overline{s}(x)\,dx = 2\pi \int_{-\sigma}^{\sigma} \zeta_{\sigma r}(S,y)\overline{\zeta_{\sigma r}}(s,y) D_r\left(\frac{y}{\sigma}\right)dy. \tag{2.9}$$

Доказательство. Докажем (2.8). Достаточно доказать равенство для $s \in L_1(\mathbb{R})$, тогда по непрерывности оно будет верно и для $s \in L_2(\mathbb{R})$. Пользуясь (2.6) и (2.7), имеем

$$\int_{\mathbb{R}} |s(x)|^2\,dx = \int_{\mathbb{R}} \overline{s}(x)s(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \overline{s}(x)\int_{-\sigma}^{\sigma} \zeta_{\sigma r}(s,y)\Phi_{\sigma r}(x,y)\,dy\,dx =$$
$$= \int_{-\sigma}^{\sigma} \zeta_{\sigma r}(s,y)\int_{\mathbb{R}} \overline{s}(x)\Phi_{\sigma r}(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\sigma}^{\sigma} \zeta_{\sigma r}(s,y)\overline{\int_{\mathbb{R}} s(x)\overline{\Phi_{\sigma r}}(x,y)\,dx}\,dy =$$
$$= \int_{-\sigma}^{\sigma} \zeta_{\sigma r}(s,y)2\pi D_r\left(\frac{y}{\sigma}\right)\overline{\zeta_{\sigma r}}(s,y)\,dy = 2\pi \int_{-\sigma}^{\sigma} |\zeta_{\sigma r}(s,y)|^2 D_r\left(\frac{y}{\sigma}\right)dy.$$

Равенство (2.9) стандартно выводится из (2.8). □

Сплайновые преобразование Фурье и частичный интеграл Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ определим равенствами

$$\zeta_{\sigma r}(f,y) = \frac{1}{2\pi D_r\left(\frac{y}{\sigma}\right)} \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\Phi_{\sigma r}}(t,y)\,dt, \tag{2.10}$$

$$J_{\sigma\rho r}(f,x) = \int_{-\rho}^{\rho} \zeta_{\sigma r}(f,y)\Phi_{\sigma r}(x,y)\,dy, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant \sigma. \tag{2.11}$$

Поскольку функция $\zeta_{\sigma r}(f)$ непрерывна, определение $J_{\sigma\rho r}(f)$ корректно.

Распространим эти определения на функции из $L_2(\mathbb{R})$. Пусть $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, $s \in \mathbf{S}_{\sigma r} \cap L_2(\mathbb{R})$. Имеем

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{s}(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) \int_{-\sigma}^{\sigma} \overline{\zeta_{\sigma r}}(s,y)\overline{\Phi_{\sigma r}}(t,y)\,dy\,dt =$$
$$= \int_{-\sigma}^{\sigma} \overline{\zeta_{\sigma r}}(s,y) \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\Phi_{\sigma r}}(t,y)\,dt\,dy = 2\pi \int_{-\sigma}^{\sigma} \overline{\zeta_{\sigma r}}(s,y)\zeta_{\sigma r}(f,y) D_r\left(\frac{y}{\sigma}\right)\,dy.$$

Заметим еще, что $\zeta_{\sigma r}(f) \in L_2[-\sigma,\sigma]$, откуда $J_{\sigma\rho r}(f) \in L_2(\mathbb{R})$. По равенству (2.9)

$$\int_{\mathbb{R}} J_{\sigma\rho r}(f,t)\overline{s}(t)\,dt = 2\pi \int_{-\rho}^{\rho} \overline{\zeta_{\sigma r}}(s,y)\zeta_{\sigma r}(f,y) D_r\left(\frac{y}{\sigma}\right)\,dy.$$

При $\rho = \sigma$ получаем, что $f - J_{\sigma\sigma r}(f) \perp \mathbf{S}_{\sigma r} \cap L_2(\mathbb{R})$, т.е. $J_{\sigma\sigma r}(f)$ — ортогональная проекция f на $\mathbf{S}_{\sigma r} \cap L_2(\mathbb{R})$. Кроме того,

$$2\pi \int_{-\rho}^{\rho} |\zeta_{\sigma r}(f,y)|^2 D_r\left(\frac{y}{\sigma}\right)\,dy = \int_{\mathbb{R}} |J_{\sigma\rho r}(f,x)|^2\,dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx. \tag{2.12}$$

Поскольку $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ плотно в $L_2(\mathbb{R})$, оператор $\zeta_{\sigma r}$ допускает единственное непрерывное продолжение на $L_2(\mathbb{R})$, которое мы обозначим тем же символом. Имеем $\zeta_{\sigma r}\colon L_2(\mathbb{R}) \to L_2[-\sigma,\sigma]$. Равенство (2.10) остается верным, если понимать интеграл в смысле сходимости в $L_2[-\sigma,\sigma]$. Определим $J_{\sigma\rho r}(f)$ для $f \in L_2(\mathbb{R})$ формулой (2.11). Тогда по-прежнему $J_{\sigma\sigma r}(f)$ есть ортогональная проекция f на $\mathbf{S}_{\sigma r} \cap L_2(\mathbb{R})$ и верны соотношения (2.12).

Выразим сплайновое преобразование Фурье и наилучшее приближение сплайнами через тригонометрическое преобразование Фурье.

Лемма 3. *Если $f \in L_2(\mathbb{R})$, то*

$$\zeta_{\sigma r}(f,y) = \frac{1}{D_r\left(\frac{y}{\sigma}\right)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c(f, y+2k\sigma)\overline{d_r}\left(\frac{y}{\sigma} + 2k\right), \tag{2.13}$$

$$A^2_{\sigma r}(f)_2 = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |c(f,y)|^2\,dy - 2\pi \int_{-\sigma}^{\sigma} \left| \frac{1}{D_r\left(\frac{y}{\sigma}\right)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c(f, y+2k\sigma)\overline{d_r}\left(\frac{y}{\sigma} + 2k\right) \right|^2 dy. \tag{2.14}$$

Доказательство. Достаточно доказать формулы для $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, тогда по непрерывности они будут верны и для $f \in L_2(\mathbb{R})$. Равенство (2.13) сразу следует из (2.10) и (2.4). По свойствам ортогональной проекции имеем

$$A^2_{\sigma r}(f)_2 = \|f - J_{\sigma\sigma r} f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|J_{\sigma\sigma r} f\|_2^2.$$

Отсюда по теореме Планшереля и формулам (2.12) и (2.13) получаем

$$A^2_{\sigma r}(f)_2 = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |c(f,y)|^2\,dy - 2\pi \int_{-\sigma}^{\sigma} |\zeta_{\sigma r}(f,y)|^2 D_r\left(\frac{y}{\sigma}\right)\,dy =$$
$$= 2\pi \int_{\mathbb{R}} |c(f,y)|^2\,dy - 2\pi \int_{-\sigma}^{\sigma} \left| \frac{1}{D_r\left(\frac{y}{\sigma}\right)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c(f, y+2k\sigma)\overline{d_r}\left(\frac{y}{\sigma} + 2k\right) \right|^2 dy.$$

Лемма доказана. □

3. Оценки сверху. Отметим, что при доказательстве теорем 1 и 2 достаточно ограничиться случаем $\sigma = 1$, так как случай произвольного σ получается из этого частного случая переходом к функции $f(\sigma\cdot)$.

В этом параграфе доказывается теорема 1.

Пусть $r \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$. Воспользуемся равенством

$$\|f(\cdot + t) - f\|_2^2 = 2\int_{\mathbb{R}} |c(f,y)|^2(1-\cos yt)\,dy.$$

Для любой возрастающей на $[\,0,\delta]$ непостоянной функции μ верно неравенство

$$\frac{1}{2}\,\omega^2\,(f,\delta)_2 \geqslant \frac{1}{2\widehat{d\mu}(0)}\int_0^\delta \|f(\cdot+t)-f\|_2^2\,d\mu(t) =$$

$$= 2\pi\int_{\mathbb{R}}|c(f,y)|^2\,dy - 2\pi\int_{\mathbb{R}}|c(f,y)|^2\frac{\widehat{d\mu}(y)}{\widehat{d\mu}(0)}\,dy,$$

где $\widehat{d\mu}(y) = \int_0^\delta \cos yt\,d\mu(t)$. Записывая наилучшее приближение по формуле (2.14), получаем

$$\sup_{f\in L_2(\mathbb{R})}\frac{2A_{1r}^2(f)_2}{\omega^2\big(f,\delta\big)_2} \leqslant \inf_\mu \sup_{c\in L_2(\mathbb{R})} \frac{\int_{\mathbb{R}}|c(y)|^2\,dy - \int_{-1}^1 \frac{1}{D_r(y)}\left|\sum\limits_{\nu\in\mathbb{Z}} c(y+2\nu)\overline{d_r}(y+2\nu)\right|^2 dy}{\int_{\mathbb{R}}|c(y)|^2\,dy - \int_{\mathbb{R}}|c(y)|^2\frac{\widehat{d\mu}(y)}{\widehat{d\mu}(0)}\,dy}. \tag{3.1}$$

Чтобы значение обеих частей (3.1) было равно 1 (т. е. чтобы неравенство Джексона выполнялось с константой $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и шагом δ), достаточно найти такую функцию μ, что

$$\int_{\mathbb{R}}|c(y)|^2\,\widehat{d\mu}(y)\,dy \leqslant \widehat{d\mu}(0)\int_{-1}^1\frac{1}{D_r(y)}\left|\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}c(y+2\nu)\overline{d_r}(y+2\nu)\right|^2 dy \tag{3.2}$$

для любой функции $c \in L_2(\mathbb{R})$. Разбив ось на промежутки длины 2, перепишем (3.2) в виде

$$\int_{-1}^1\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}|c(y{+}2\nu)|^2\widehat{d\mu}(y{+}2\nu)\,dy \leqslant \widehat{d\mu}(0)\int_{-1}^1\frac{1}{D_r(y)}\left|\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}c(y+2\nu)\overline{d_r}(y+2\nu)\right|^2 dy. \tag{3.3}$$

При фиксированном y подынтегральные функции зависят только от значений c в точках $y+2\nu$, и эти наборы точек не пересекаются при различных $y \in (-1,1)$. Умножив c на характеристическую функцию множества $E + 2\mathbb{Z}$, мы получим, что интеграл в (3.3) можно брать по любому измеримому подмножеству E отрезка $[-1,1]$. Следовательно, неравенство (3.3) равносильно неравенству между подынтегральными функциями

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\widehat{d\mu}(y+2\nu)|u_\nu|^2 \leqslant \frac{\widehat{d\mu}(0)}{D_r(y)}\left|\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\overline{d_r}(y+2\nu)u_\nu\right|^2, \tag{3.4}$$

выполненному при почти всех $y \in (-1,1)$ для любой последовательности $u \in \ell_2$. Здесь мы обозначили $u_\nu = c(y+2\nu)$. Так как обе части (3.4) непрерывны по y, нет разницы, говорить ли о всех или почти всех y, а тип промежутка, которому принадлежит y, неважен. Кроме того, поскольку при замене y и ν на $-y$ и $-\nu$ неравенство (3.4) не меняется, можно ограничиться значениями $y \in (0,1)$.

Сделаем три простых наблюдения о неравенстве (3.4).

1. Для выполнения неравенства (3.4) при $y=0$ необходимо и достаточно условие $\widehat{d\mu}(2\nu) \leqslant 0$ при всех $\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Действительно, $d_r(2\nu) = 0$ при всех $\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, а $d_r(0) = D_r(0) = 1$, поэтому правая часть (3.4) равна $\widehat{d\mu}(0)|u_0|^2$.

2. Если при некотором y есть два неотрицательных значения $\widehat{d\mu}(y+2\nu_1)$ и $\widehat{d\mu}(y+2\nu_2)$, хотя бы одно из которых положительно, то неравенство (3.4) не выполняется. Действительно, тогда можно взять $u_\nu = 0$ при $\nu \neq \nu_1, \nu_2$ и подобрать u_{ν_1} и u_{ν_2} так, что левая часть будет положительна, а правая равна нулю.

3. Для выполнения неравенства (3.4) при $y=1$ необходимо и достаточно условие $\widehat{d\mu}(1+2\nu) \leqslant 0$ при всех $\nu \in \mathbb{Z}$. Необходимость вытекает из второго утверждения и четности $\widehat{d\mu}$, а достаточность очевидна.

Юдин [11] доказал, что второе свойство влечет абсолютную непрерывность μ. Более того, $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{d\mu}(k)| < +\infty$. Обозначим $g = \mu'$; тогда

$$\widehat{d\mu}(y) = \widehat{g}(y) = \int_0^\delta g(t) \cos yt \, dt$$

(мы используем обозначение $\widehat{g}$ вместо $c(g)$ ввиду отличия в нормировке) и (3.4) принимает вид

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(y+2\nu)|u_\nu|^2 \leqslant \frac{\widehat{g}(0)}{D_r(y)} \left| \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{d_r}(y+2\nu) u_\nu \right|^2. \tag{3.5}$$

Продолжим g нулем на $(\delta, +\infty)$. Получим, что

$$g(t) \geqslant 0 \text{ при } t \in [0,\delta], \quad g(t) = 0 \text{ при } t > \delta. \tag{3.6}$$

В [9] была построена функция g указанного вида, удовлетворяющая неравенству (3.5). Напомним некоторые детали построения и воспользуемся результатами из [9].

Неравенство (3.5) означает, что квадратичная форма

$$\langle Au, u\rangle = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(y+2\nu)|u_\nu|^2 - \frac{\widehat{g}(0)}{D_r(y)} \left| \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{d_r}(y+2\nu) u_\nu \right|^2$$

неположительна. Здесь оператор $A = A_y$ выражается равенством

$$(Au)_\nu = \widehat{g}(y+2\nu)u_\nu - \frac{\widehat{g}(0)}{D_r(y)} d_r(y+2\nu) \sum_{j\in\mathbb{Z}} \overline{d_r}(y+2j) u_j.$$

Это компактный самосопряженный оператор в ℓ_2. Неположительность его квадратичной формы равносильна неположительности всех его собственных чисел.

Будем искать g в классе функций, удовлетворяющих дополнительному требованию:

$$\widehat{g}(y) > 0 \text{ при } |y| < 1, \quad \widehat{g}(y) \leqslant 0 \text{ при } |y| \geqslant 1. \tag{3.7}$$

Это требование обеспечивает выполнение (3.5) при $y = 1$.

Запишем уравнение для собственных чисел и собственных векторов A, причем будем искать положительные собственные числа: $(Au)_\nu = \lambda u_\nu$,

$$(\widehat{g}(y+2\nu) - \lambda)u_\nu = \frac{\widehat{g}(0)}{D_r(y)} d_r(y+2\nu) \sum_{j\in\mathbb{Z}} \overline{d_r}(y+2j)u_j.$$

Заметим, что $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} \overline{d_r}(y+2j)u_j \neq 0$. В противном случае хотя бы два значения u_ν отличны от нуля, а тогда $\widehat{g}(y+2\nu) = \lambda$ хотя бы для двух номеров ν. Последнее невозможно при положительном λ, так как $\widehat{g} \leqslant 0$ вне $(-1,1)$.

Поэтому $\widehat{g}(y+2\nu) \neq \lambda$ ни при каком ν. Умножим равенство на $\overline{d_r}(y+2\nu)$, поделим на $\widehat{g}(y+2\nu) - \lambda$ и просуммируем по ν. Получим

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{d_r}(y+2\nu)u_\nu = \frac{\widehat{g}(0)}{D_r(y)} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{|d_r(y+2\nu)|^2}{\widehat{g}(y+2\nu)-\lambda} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \overline{d_r}(y+2j)u_j \right),$$

что равносильно

$$H(\lambda, y) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{|d_r(y+2\nu)|^2}{\widehat{g}(y+2\nu)-\lambda} - \frac{D_r(y)}{\widehat{g}(0)} = 0. \tag{3.8}$$

Верно и обратное: если $H(\lambda, y) = 0$, то λ — собственное число, а вектор с координатами $u_\nu = \frac{d_r(y+2\nu)}{\widehat{g}(y+2\nu)-\lambda}$ — собственный вектор оператора A. Таким образом, отсутствие положительных собственных чисел оператора A означает, что уравнение (3.8) не имеет положительных решений λ.

Ясно, что $H(\lambda, y) < 0$ при $\lambda > \widehat{g}(y)$, так как все слагаемые отрицательны. При $\lambda = \widehat{g}(y)$ функция H не определена. Она возрастает по λ на промежутке $\big(0, \widehat{g}(y)\big)$ и стремится к $+\infty$ при $\lambda \to \widehat{g}(y)-$. Поэтому отсутствие у нее корней на $\big(0, \widehat{g}(y)\big)$ равносильно неравенству $H(0, y) \geqslant 0$, т. е.

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{|d_r(y+2\nu)|^2}{\widehat{g}(y+2\nu)} \geqslant \frac{D_r(y)}{\widehat{g}(0)}. \tag{3.9}$$

Если $\delta = \pi$, то, как доказал Логан [8], единственная функция со свойствами (3.6) и (3.7) (с точностью до постоянного множителя) — это функция $g_0(t) = \sin t$ на $[0, \pi]$. Именно эту функцию использовал Черных при доказательстве неравенства (1.1). Для нее

$$\widehat{g_0}(y) = \frac{1 + \cos \pi y}{1 - y^2}.$$

Неравенству (3.9) она не удовлетворяет. Действительно, все нечетные числа, кроме ± 1, — нули $\widehat{g_0}$ второй кратности, а ± 1 — лишь первой, поэтому левая часть (3.9) стремится к $-\infty$ при $y \to 1$.

Таким образом, при $\delta = \pi$ удовлетворить условиям (3.6), (3.7) и (3.9) невозможно. Мы приходим к следующей задаче: найти наименьшее значение δ, при котором существует функция g со свойствами (3.6), (3.7) и (3.9). Из сказанного ясно, что

$\delta > \pi$. Попытаемся удовлетворить им при $\delta = \frac{\pi}{\tau}$ с как можно большим $\tau < 1$. Эту экстремальную задачу точно решить не удалось.

Для приближения к решению в [9] было взято семейство функций

$$g_\varepsilon(t) = \frac{1}{\tau}\operatorname{ch}\left(\frac{\pi\varepsilon}{\tau} - \varepsilon t\right)\sin\tau t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{\tau}.$$

Здесь $\varepsilon, \tau \in (0,1)$ и $\varepsilon^2 + \tau^2 = 1$, т. е. $\tau = \tau(\varepsilon) = \sqrt{1-\varepsilon^2}$. Максимизации τ отвечает минимизация ε. Легко проверить, что

$$\widehat{g_\varepsilon}(y) = (1-y^2)\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi\varepsilon}{\tau} + \cos\frac{\pi y}{\tau}}{(1-y^2)^2 + 4\varepsilon^2 y^2}.$$

Выполнение условий (3.6) и (3.7) очевидно. Основная трудность состоит в проверке условия (3.9) для как можно меньшего ε. В [9] оно было доказано для $\varepsilon = \varepsilon_r$ (ε_r определено в теореме 1).

Тем самым теорема 1 доказана.

Укажем несколько свойств последовательности $\{\varepsilon_r\}$, установленных в [9].

1. ε_r убывает по r.

2. Приведем три первых значения ε_r с избытком, $\tau_r = \sqrt{1-\varepsilon_r^2}$ с недостатком и $\theta_r = \frac{1}{\tau_r}$ с избытком. Имеем $\varepsilon_1 < 0{,}514$, $\varepsilon_2 < 0{,}168$, $\varepsilon_3 < 0{,}0556$; $\tau_1 > 0{,}857$, $\tau_2 > 0{,}985$, $\tau_3 > 0{,}998$; $\theta_1 < 1{,}166$, $\theta_2 < 1{,}0143$, $\theta_3 < 1{,}00155$.

3. Справедливо неравенство

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3^{2r-2}} < \varepsilon_r^2 < \frac{1}{2+\sqrt{4-3^{2-2r}}}\cdot\frac{1}{3^{2r-2}}.$$

Таким образом, ε_r экспоненциально стремится к 0, а τ_r и θ_r — к 1.

В заключение параграфа сделаем два замечания.

Замечание 1. Выбранная функция g не позволяет доказать теорему 1 при $r = 0$, т. е. для приближений кусочно-постоянными функциями. Этот случай требует отдельного рассмотрения.

Замечание 2. В отличие от тригонометрических и некоторых других приближений (см., например, [12]), у нас нет доказательства того, что неравенство (3.1) является равенством.

4. Оценки снизу. Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$. Через $E_{nr}(f)_p$ обозначается наилучшее приближение пространством $\widetilde{\mathbf{S}}_{nr}$ в пространстве L_p, через $\omega_m(f,\delta)_p$ — модуль непрерывности порядка m в пространстве L_p или $L_p(\mathbb{R})$, т. е.

$$\omega_m(f,\delta)_p = \sup_{0\leqslant t\leqslant\delta}\left\|\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}C_m^k f(\cdot + kt)\right\|_p.$$

В [9] доказаны следующие утверждения о приближении периодических функций.

1. Если $K < \frac{1}{\sqrt{2}}$, то ни при каком $\delta > 0$ неравенство

$$E_{nr}(f)_2 \leqslant K\,\omega(f,\delta)_2$$

не может выполняться на всем пространстве L_2.

2. Если $\delta \in \left(0, \frac{\pi}{n}\right)$, то неравенство

$$E_{nr}(f)_2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega(f,\delta)_2$$

не может выполняться на всем пространстве L_2.

Теорема 2 сразу вытекает из приведенных фактов и следующей леммы, которую мы докажем в несколько более общей ситуации.

Лемма 4. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $p \in [1, +\infty)$, константы $K > 0$ и $\delta > 0$ таковы, что*

$$A_{nr}(f)_{L_p(\mathbb{R})} \leqslant K\,\omega_m(f,\delta)_{L_p(\mathbb{R})}$$

для всех $f \in L_p(\mathbb{R})$. Тогда

$$E_{nr}(f)_{L_p} \leqslant K\,\omega_m(f,\delta)_{L_p}$$

для всех $f \in L_p$.

Доказательство. Пусть $f \in L_p$. При $N \in \mathbb{N}$ положим $f_N = f$ на $[-N\pi, N\pi]$, $f_N = 0$ вне $[-N\pi, N\pi]$. Обозначим через s сплайн наилучшего приближения функции f в L_p, а через s_N — сплайн наилучшего приближения функции f_N в $L_p(\mathbb{R})$. Имеем

$$\begin{aligned} NE_{nr}(f)_{L_p} = N\|f - s\|_{L_p[-\pi,\pi]} = \|f - s\|_{L_p[-N\pi,N\pi]} \leqslant \\ \leqslant \|f - s_N\|_{L_p[-N\pi,N\pi]} \leqslant \|f_N - s_N\|_{L_p(\mathbb{R})} \leqslant \\ \leqslant K\omega_m(f_N,\delta)_{L_p(\mathbb{R})} = NK\omega_m(f,\delta)_{L_p} + O(1). \end{aligned}$$

Деля неравенство на N и устремляя N к ∞, получаем требуемое. □

Замечание 3. Применение леммы 4 позволяет вывести из неравенства (1.3) его периодический вариант, ранее доказанный в [9].

Литература

1. *Черных Н. И.* О неравенстве Джексона в L_2 // Труды МИАН СССР. 1967. Т. 88. С. 71–74.

2. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987.

3. *Arestov V. V., Chernykh N. I.* On the L_2-approximation of periodic functions by trigonometric polynomials // Approximation and function spaces. Proc. Conf., Gdańsk, 1979. Amsterdam: North-Holland Publ., 1981. P. 25–43.

4. *Ибрагимов И. И., Насибов Ф. Г.* Об оценке наилучшего среднеквадратичного приближения суммируемой функции на вещественной оси посредством целых функций конечной степени // Доклады АН СССР. 1970. Т. 194, № 5. С. 1013–1016.

5. *Попов В. Ю.* О наилучших среднеквадратичных приближениях целыми функциями экспоненциального типа // Изв. вузов. Математика. 1972. Т. 6, № 121. С. 65–73.

6. *Московский А. В.* Теоремы Джексона в пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)$ и $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+)$ // Изв. Тульского гос. ун-та. Сер. Мат. Мех. Инф. 1997. Т. 3, № 1. С. 44–70.

7. *Бердышева Е. Е.* Две взаимосвязанные экстремальные задачи для целых функций многих переменных // Математические заметки. 1999. Т. 66, № 3. С. 336–350.

8. *Logan B. F.* Extremal problems for positive-definite bandlimited functions. II. Eventually negative functions // SIAM Journal of Mathematical Analysis. 1993. Vol. 14, No. 2. P. 253–257.

9. *Виноградов О. Л.* Точное неравенство Джексона — Черных для приближений периодических функций сплайнами // Сибирский математический журнал. 2019. Т. 60, № 3. С. 537–555.

10. *Schoenberg I. J.* Cardinal Spline Interpolation. 2 ed. Philadelphia: SIAM, 1993.

11. *Юдин В. А.* Одна экстремальная задача для функций распределения // Математические заметки. 1998. Т. 63, № 2. С. 316–320.

12. *Бабенко А. Г.* О точной константе в неравенстве Джексона в L^2 // Математические заметки. 1986. Т. 39, № 5. С. 651–664.

Статья поступила в редакцию 3 июня 2019 г.;
после доработки 6 июля 2019 г.;
рекомендована в печать 19 сентября 2019 г.

Контактная информация:

Виноградов Олег Леонидович — д-р физ.-мат. наук, доц., проф.; olvin@math.spbu.ru

Sharp Jackson — Chernykh type inequality for spline approximations on the line*

O. L. Vinogradov

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Vinogradov O. L. Sharp Jackson — Chernykh type inequality for spline approximations on the line. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 1, pp. 15–27. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.102 (In Russian)

An analog of the Jackson — Chernykh inequality for spline approximations in the space $L_2(\mathbb{R})$ is established. For $r \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$, we denote by $A_{\sigma r}(f)_2$ the best approximation of a function $f \in L_2(\mathbb{R})$ by the space of splines of degree r and of minimal defect with knots $\frac{j\pi}{\sigma}$, $j \in \mathbb{Z}$, and by $\omega(f, \delta)$ its first order modulus of continuity in $L_2(\mathbb{R})$. The main result of the paper is the following. For every $f \in L_2(\mathbb{R})$

$$A_{\sigma r}(f)_2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega\left(f, \frac{\theta_r \pi}{\sigma}\right)_2,$$

where ε_r is the positive root of the equation

$$\frac{4\varepsilon^2(\operatorname{ch}\frac{\pi\varepsilon}{\tau} - 1)}{\operatorname{ch}\frac{\pi\varepsilon}{\tau} + \cos\frac{\pi}{\tau}} = \frac{1}{3^{2r-2}}, \quad \tau = \sqrt{1-\varepsilon^2},$$

$\theta_r = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon_r^2}}$. The constant $\frac{1}{\sqrt{2}}$ cannot be reduced on the whole class $L_2(\mathbb{R})$, even if one insreases the step of the modulus of continuity.

Keywords: Jackson inequality, splines, sharp constants.

References

1. Chernykh N. I., "Jackson's inequality in L_2", *Proc. Steklov Inst. Math.* **88**, 75–78 (1967).

2. Korneichuk N. P., *Exact Constants in Approximation Theory*, in: *Encyclopedia of Mathematics and its Applications* **38** (Cambridge University Press, Cambridge, 1991).

3. Arestov V. V., Chernykh N. I., "On the L_2-approximation of periodic functions by trigonometric polynomials", *Approximation and function spaces. Proc. Conf., Gdańsk, 1979*, 25–43 (North-Holland Publ., Amsterdam, 1981).

*This work is supported by the Russian Science Foundation under grant No. 18-11-00055.

4. Ibragimov I. I., Nasibov F. G., “The estimation of the best approximation of a summable function on the real axis by means of entire functions of finite degree”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **194**(5), 1013–1016 (1970). (In Russian)

5. Popov V. Yu., “Best mean square approximations by entire functions of exponential type”, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Matematika* **6**(121), 65–73 (1972). (In Russian)

6. Moskovskii A. V., “Jackson’s theorems in the spaces $L_p(\mathbb{R}^n)$ and $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+)$”, *Izv. Tul. gos. univ. Ser. Mat. Mekh. Inf.* **3**(1), 44–70 (1997). (In Russian)

7. Berdysheva E. E., “Two related extremal problems for entire functions of several variables”, *Mathematical Notes* **66**(3), 271–282 (1999).

8. Logan B. F., “Extremal problems for positive-definite bandlimited functions. II. Eventually negative functions”, *SIAM Journal of Mathematical Analysis* **14**(2), 253–257 (1993).

9. Vinogradov O. L., “An exact inequality of Jackson — Chernykh type for spline approximations of periodic functions”, *Siberian Mathematical Journal* **60**(3), 412–428 (2019).

10. Schoenberg I. J., *Cardinal Spline Interpolation* (2 ed., SIAM, Philadelphia, 1993).

11. Yudin V. A., “An extremum problem for distribution functions”, *Mathematical Notes* **63**(2), 279–282 (1998).

12. Babenko A. G., “The exact constant in the Jackson inequality in L^2”, *Mathematical Notes* **39**(5), 355–363 (1986).

Received: June 3, 2019
Revised: July 6, 2019
Accepted: September 19, 2019

Author’s information:

Oleg L. Vinogradov — olvin@math.spbu.ru