

# Степенные ряды одной переменной с условием логарифмической выпуклости коэффициентов

А. В. Железняк

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина),  
Российская Федерация, 197376, Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, 5

**Для цитирования:** Железняк А. В. Степенные ряды одной переменной с условием логарифмической выпуклости коэффициентов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 1. С. 28–38.  
<https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.103>

В статье рассматривается обобщение теоремы Харди о степенных рядах, обратных к степенным рядам с положительными коэффициентами. А именно, доказывается, что достаточно требовать логарифмическую выпуклость коэффициентов, начиная с некоторого места. Такого рода результаты применяются в теории Неванлинны — Пика. В частности, это позволяет получить новые оценки на рост соответствующих аналитических функций в круге.

*Ключевые слова:* степенной ряд, ядра Неванлинны — Пика, логарифмическая выпуклость.

**1. Введение.** Давно известно, что у формального степенного ряда одной переменной с первым положительным коэффициентом и остальными отрицательными ряд, обратный исходному, будет иметь строго положительные коэффициенты (см. [1]). Однако обратное условие неверно, и в случае ряда Харди одной переменной было найдено простейшее достаточное условие того, что ряд, обратный формальному степенному ряду с положительными коэффициентами, будет иметь все отрицательные коэффициенты, кроме самого первого (см. [2]). Это условие впоследствии будет использовано в интерполяционной задаче Неванлинны — Пика, а именно при рассмотрении вопроса ее разрешимости (см. [3]). Особый интерес представляет случай формальных степенных рядов одной переменной.

Пусть дан формальный степенной ряд

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad (1)$$

с положительными коэффициентами. Рассмотрим формальный степенной ряд, обратный исходному,

$$g(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n, \quad f(x)g(x) = 1. \quad (2)$$

Мы хотим знать, при каких  $a_0, a_n$  коэффициенты  $b_0, b_n$  обратного ряда  $g(x)$  удовлетворяют условиям

$$b_0 > 0, \quad b_n \leq 0, \quad n > 0. \quad (3)$$

Это условие естественным образом возникает в интерполяционной задаче Неванлинны — Пика. Пусть  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ , а  $H^2(\mathbb{D})$  — пространство Харди в  $\mathbb{D}$ . Для данных точек  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{D}$  и значений  $w_1, w_2, \dots, w_n \in \mathbb{D}$  мы хотим найти функцию  $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$  такую, что  $\varphi(x_k) = w_k$  при всех  $k = 1, \dots, n$ . Известно, что задача Неванлинны — Пика разрешима тогда и только тогда, когда матрица  $A = \left(\frac{1-w_k\bar{w}_l}{1-x_k\bar{x}_l}\right)_{1 \leq k, l \leq n}$  положительно определена. Другими словами, матрица

$$A = ((1 - w_k\bar{w}_l)k(x_k, x_l))_{1 \leq k, l \leq n} \quad \text{положительно определена,} \quad (4)$$

где  $k(x, y) = \frac{1}{1-xy}$  — воспроизводящее ядро пространства Харди  $H^2(\mathbb{D})$ . Это условие впервые было получено Пиком в 1916 году. Более того, было доказано, что такое решение единственно и представимо в виде произведения Бляшке. А в 1919 году Неванлинна рассмотрел эту задачу независимо от Пика. Рассмотрим общую задачу Неванлинны — Пика. Пусть  $H$  — гильбертово пространство аналитических функций в  $\mathbb{D}$  такое, что функционал значения в точке непрерывен. Для данных  $x_1, x_2, \dots, x_n, w_1, w_2, \dots, w_n \in \mathbb{D}$  мы ищем мультипликатор пространства  $H$  такой, что  $\varphi(x_k) = w_k, k = 1, 2, \dots, n$ , и  $\|\varphi\| \leq 1$ . Известно (см. [1]), что условие положительной определенности матрицы  $A = ((1 - w_k\bar{w}_l)k(x_k, x_l))_{1 \leq k, l \leq n}$  является необходимым и может быть достаточным, если матрица

$$K = (k(x_k, x_l))_{1 \leq k, l \leq n} \quad \text{положительно определена,} \quad (5)$$

где  $k(x, y) = \frac{\varphi(x)\overline{\varphi(y)}}{1-b(x,y)}$ , причем

$$B = (b(x_k, x_l))_{1 \leq k, l \leq n} \quad \text{положительно определена.} \quad (6)$$

Такие ядра называются ядрами Неванлинны — Пика. Рассмотрим ядра следующего вида:  $k(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x\bar{y})^n$  (воспроизводящее ядро пространства  $H^2(\mathbb{D})$ ). Для выполнения условия (5) достаточно неотрицательности чисел, а для выполнения условия (6) достаточно, чтобы у степенного ряда  $1/k(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x\bar{y})^n$  все коэффициенты, кроме первого, были неположительны. Это условие в точности соответствует условию (3) (см. [1]). Для случая рядов одной переменной простейшее достаточное условие было получено Харди (см. [2]).

**Теорема 1** (Харди). *Положим  $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  — формальный степенной ряд, рассмотрим  $g(x) = \frac{1}{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  — формальный степенной ряд, обратный к  $f(x)$ . Если коэффициенты  $a_n$  удовлетворяют условию логарифмической выпуклости*

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \geq \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad (7)$$

*то все коэффициенты ряда  $g(x)$  неположительны, за исключением нулевого.*

В дальнейшем нам потребуется следующее определение.

**Определение 1.** Пусть  $\{a_n\}$  — последовательность положительных чисел,  $K$  — натуральное число. Говорят, что *последовательность удовлетворяет условию К-Харди*, если при всех натуральных  $n \geq K$  выполнено условие (7).

## 2. Основная часть.

**Теорема 2.** Положим  $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  — формальный степенной ряд,

рассмотрим  $g(x) = \frac{1}{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  — формальный степенной ряд, обратный к  $f(x)$ .

Тогда для любой последовательности чисел  $a_1, a_2, \dots$ , удовлетворяющей условию *К-Харди*, существует число  $a_0$  такое, что  $b_n < 0$  при всех натуральных  $n$ .

Рассмотрим коэффициент  $b_l$  как функцию от  $a_0, a_1, \dots, a_l$ .

**Лемма 1.** Коэффициент  $b_l$  имеет вид  $\frac{1}{a_0^{l+1}} P_l(a_0)$ , где  $P_l$  — многочлен степени  $(l-1)$  от  $a_0$  с коэффициентами, зависящими только от  $(a_1, \dots, a_l)$ , причем старший коэффициент равен  $(-a_l)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.** Индукция по  $l$ . База  $l = 1$ . Перемножив формальные степенные ряды  $f(x)$  и  $g(x)$  и приравняв коэффициенты при нулевой и первой степенях, получим, что  $a_0 b_0 = 1$  и  $a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0$ , откуда  $b_0 = \frac{1}{a_0}$  и  $b_1 = \frac{-a_1}{a_0^2}$ .

Переход. Пусть набор  $b_1, \dots, b_l$  удовлетворяет условию леммы 1. Докажем, что  $b_{l+1}$  тоже представляется в требуемом виде.

Поскольку  $1 = f(x)g(x)$  и коэффициент при  $x^{l+1}$  равен 0, имеем

$$0 = a_0 b_{l+1} + a_1 b_l + \dots + a_{l+1} b_0.$$

Следовательно, по предположению индукции получаем

$$\begin{aligned} b_{l+1} a_0 &= -a_1 b_l - a_2 b_{l-1} - \dots - a_{l+1} b_0 = \\ &= - \left[ \frac{a_1 P_l(a_0)}{a_0^{l+1}} + \frac{a_2 P_{l-1}(a_0)}{a_0^l} + \dots + \frac{a_l P_1(a_0)}{a_0^2} + \frac{a_{l+1}}{a_0} \right] = \\ &= - \frac{1}{a_0^{l+1}} [a_1 P_l(a_0) + a_2 a_0 P_{l-1}(a_0) + a_3 a_0^2 P_{l-2}(a_0) + \dots + a_l a_0^{l-1} P_1(a_0)] - \\ &\quad - \frac{1}{a_0^{l+1}} a_{l+1} a_0^l = - \frac{1}{a_0^{l+1}} Q_l(a_0) - \frac{1}{a_0^{l+1}} a_{l+1} a_0^l, \end{aligned}$$

где  $Q_l(a_0)$  — многочлен степени  $(l-1)$  от  $a_0$ ,  $a_{l+1} a_0^l$  — многочлен степени  $l$ , старший коэффициент которого равен  $a_l$ .

Тем самым мы получили, что

$$b_{l+1} = \frac{1}{a_0^{l+2}} [-Q_l(a_0) - a_{l+1} a_0^l].$$

Лемма доказана.

Следующие два замечания показывают асимптотику коэффициентов  $b_l$ .

**Замечание 1.**  $b_l \sim \frac{-a_l}{a_0^2}$  при достаточно больших  $a_0$ .

**Замечание 2.** Существует положительное число  $A$  такое, что при всех  $a_0 > A$  выполнено

$$\left| b_s + \frac{a_s}{a_0^2} \right| < \frac{1}{2} \frac{a_s}{a_0^2} \quad \forall s = 1, 2, \dots, N.$$

**Следствие из замечания 2.**

$$-\frac{3}{2} \frac{a_s}{a_0^2} < b_s < -\frac{1}{2} \frac{a_s}{a_0^2} \quad \text{при всех } s.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Отрицательность чисел  $b_n$  при  $n \leq K$  вытекает из следствия. Докажем, что  $b_n < 0$  при  $n > K$ . Проведем доказательство по индукции  $n = K + l, l \geq 1$ .

Введем обозначения:  $m = \frac{a_{K+1}}{a_K}$ ;  $M = \max \left[ \frac{a_S}{a_{S-1}} \right], S = 2, \dots, K, T = \max a_S, S = 1, \dots, K; \alpha = \frac{4(M+m)T}{m}$ .

База  $l = 1$ . Перемножим ряды  $f(x)$  и  $g(x)$  и запишем коэффициенты при  $x^{K+1}$  и  $x^K$ , равные 0:

$$a_{K+1}b_0 + a_Kb_1 + \dots + a_1b_K + a_0b_{K+1} = 0, \quad (8)$$

$$a_Kb_0 + a_{K-1}b_1 + \dots + a_1b_{K-1} + a_0b_K = 0. \quad (9)$$

Домножим (8) на  $a_K$ , а (9) на  $a_{K+1}$  и, вычитая одно из другого, получим

$$a_0a_Kb_{K+1} + b_K[a_1a_K - a_0a_{K+1}] + b_{K+1}[a_2a_K - a_1a_{K-1}] + \dots + b_1[a_Ka_K - a_{K-1}a_{K+1}] = 0. \quad (10)$$

Потребуем, чтобы  $a_0 > \frac{a_Ka_1}{a_{K+1}} = \frac{a_1}{m}$ , тогда будет выполняться  $(a_{K+1}a_0 - a_Ka_1) > 0$ .

Выражая из (10)  $b_{K+1}$ , имеем

$$a_0a_Kb_{K+1} = b_K[a_{K+1}a_0 - a_Ka_1] + b_{K-1}[a_{K+1}a_1 - a_Ka_2] + \dots + b_1[a_{K+1}a_{K-1} - a_K^2].$$

**Лемма 2.** Верно следующее неравенство:

$$\frac{1}{2}|b_K|(a_{K+1}a_0 - a_Ka_1) > \sum_{S=1}^{K-1} |b_S|(a_{K+1}a_S - a_Ka_{S+1}).$$

Если это доказать, то так как числа  $b_K$  отрицательны, то последние  $(K - 1)$  слагаемые будут меньше в два раза, чем первое по модулю, следовательно их сумма будет иметь знак первого слагаемого, которое отрицательно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Оценим правую часть:

$$\begin{aligned} \sum_{S=1}^{K-1} |b_{K-S}||a_{K+1}a_S - a_Ka_{S+1}| &= a_K \sum_{S=1}^{K-1} |b_{K-S}| |a_S| \left| \left( \frac{a_{K+1}}{a_K} - \frac{a_{S+1}}{a_S} \right) \right| < \\ < Ta_K \sum_{S=1}^{K-1} |b_{K-S}| \left| \frac{a_{K+1}}{a_K} - \frac{a_{S+1}}{a_S} \right| &\ll (M + m) T \sum_{S=1}^{K-1} |b_{K-S}| |a_K|. \end{aligned}$$

Следовательно, получим

$$\frac{1}{2}|b_K|a_0a_K \left( \frac{a_{K+1}}{a_K} - \frac{a_1}{a_0} \right) > (M + m) Ta_K \sum_{S=1}^{K-1} |b_{K-S}| = (M + m) Ta_K \sum_{S=1}^{K-1} |b_S|.$$

Поскольку выполнено условие  $a_0 > \frac{2a_1}{m}$ , то будет верно неравенство  $\frac{a_{K+1}}{a_K} - \frac{a_1}{a_0} > \frac{m}{2}$ , откуда следует, что

$$\frac{1}{2}|b_K|a_0a_K \left( \frac{a_{K+1}}{a_K} - \frac{a_1}{a_0} \right) > \frac{m}{4}|b_K|a_0a_K.$$

Доказали неравенство

$$\frac{m}{4}|b_K|a_0a_K > (M+m)Ta_K \sum_{S=1}^{K-1} |b_S|.$$

Очевидно, что при его выполнении лемма будет доказана. Сокращая на  $\frac{m}{4}a_K$ , получим

$$a_0|b_K| > \alpha \sum_{S=1}^{K-1} |b_S|. \quad (11)$$

**Лемма 3.** В условиях теоремы при выполнении условия  $a_0 > \frac{3\alpha}{a_K} \sum_{S=1}^{K-1} a_S$  неравенство (11) верно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. В силу замечания 2 при всех  $S = 1, \dots, K$  выполнены неравенства

$$\left| b_S + \frac{a_S}{a_0^2} \right| < \frac{1}{2} \frac{a_S}{a_0^2}, \quad \frac{1}{2} \frac{a_S}{a_0^2} < |b_S| < \frac{3}{2} \frac{a_S}{a_0^2},$$

$$a_0|b_K| > \frac{1}{2} a_0 \frac{a_K}{a_0^2} > \frac{3}{2} \frac{\alpha}{a_0^2} \sum_{S=1}^{K-1} a_S > \sum_{S=1}^{K-1} \alpha |b_S|.$$

Тем самым лемма 3 и лемма 2 доказаны и, следовательно, база в доказательстве теоремы 2 доказана.

**Замечание 4.** В дальнейшем нам потребуется модификация неравенства (11), а именно

$$Ca_0|b_K| > \alpha \sum_{S=1}^{K-1} |b_S|.$$

Очевидно, что если число  $a_0$  удовлетворяет условию

$$a_0 > \frac{3\alpha}{Ca_K} \sum_{S=1}^{K-1} a_S,$$

то требуемое неравенство следует из леммы 3.

В дальнейшем нам потребуются оценки коэффициента  $b_{K+1}$ .

Выразив  $b_{K+1}$  из (3), имеем

$$|b_{K+1}| = \left| \frac{1}{a_0a_K} \left[ \sum_{S=1}^{K-1} b_S(a_{K+1}a_S - a_Ka_{S+1}) + b_K(a_{K+1}a_0 - a_1a_K) \right] \right| >$$

$$> \frac{1}{a_0a_K} \left[ |b_K|(a_{K+1}a_0 - a_1a_K) - \sum_{S=1}^{K-1} |b_S|(a_{K+1}a_S - a_Ka_{S+1}) \right] >$$

$$> \frac{1}{2}|b_K| \left( \frac{a_{K+1}}{a_K} - \frac{a_1}{a_0} \right) > \frac{m}{4}|b_K|,$$

то есть

$$|b_{K+1}| > \frac{m}{4}|b_K| \quad (12)$$

или

$$|b_K| < \frac{4}{m}|b_{K+1}|. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПЕРЕХОДА В ТЕОРЕМЕ 2. Предположим, что  $b_{K+1}, \dots, b_{K+l-1}$  отрицательны. Докажем, что  $b_{K+l}$  будет меньше 0.

Перемножив ряды  $f(x)$  и  $g(x)$  и посмотрев на коэффициенты при  $x^{K+l}$  и  $x^{K+l-1}$ , равные 0, получим

$$a_{K+l}b_0 + a_{K+l-1}b_1 + \dots + a_1b_{K+l-1} + a_0b_{K+l} = 0, \quad (14)$$

$$a_{K+l-1}b_0 + a_{K+l-2}b_1 + \dots + a_1b_{K+l-2} + a_0b_{K+l-1} = 0. \quad (15)$$

Домножим (14) на  $a_{K+l-1}$ , (15) на  $a_{K+l}$ . Выразим  $b_{K+l}$ , вычитая (7) из (8). Получим

$$\begin{aligned} b_{K+l}a_{K+l-1}a_0 &= b_{K+l-1}(a_{K+l}a_0 - a_{K+l-1}a_1) + b_{K+l-2}(a_{K+l}a_1 - a_{K+l-1}a_2) + \dots + \\ &+ b_l(a_{K+l}a_{K-1} - a_{K+l-1}a_K) + b_{l-1}(a_{K+l}a_K - a_{K+l-1}a_{K+1} + \dots + \\ &+ b_1(a_{K+l}a_{K+l-2} - a_{K+l-1}^2)). \end{aligned} \quad (16)$$

Заметим, что коэффициенты при  $b_1, b_2, \dots, b_{l-1}$  положительны ввиду выполнения условия  $K$ -Харди  $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \geq \frac{a_{n+1}}{a_n}$  при  $n \geq K$ .

Если  $\frac{a_{K+l}}{a_{K+l-1}} \geq M$ , то коэффициенты при  $b_l, b_{l+1}, \dots, b_{K+l-1}$  будут больше или равны 0, так как  $M = \max \frac{a_S}{a_{S-1}}$ ,  $S = 2, \dots, K$ , поэтому будем считать, что  $\frac{a_{K+l}}{a_{K+l-1}} \leq M$ .

Коэффициент при  $b_{K+l-1}$  больше 0, так как

$$a_{K+l}a_0 - a_{K+l-1}a_1 = a_{K+l-1}a_0 \left( \frac{a_{K+l}}{a_{K+l-1}} - \frac{a_1}{a_0} \right) \geq a_{K+l-1}a_0 \left( \frac{a_{K+1}}{a_K} - \frac{a_1}{a_0} \right) > 0.$$

**Лемма 4.** Докажем, что можно подобрать число  $a_0$  так, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$\frac{1}{2}|b_{K+l-1}|(a_{K+l}a_0 - a_{K+l-1}a_1) > \sum_{S=l}^{K+l-2} |b_S| |a_{K+l}a_{K+l-1-S} - a_{K+l-1}a_{K+l-S}| \quad (17)$$

и

$$|b_{K+l}| > \frac{m}{4}|b_{K+l-1}|.$$

Заметим, что выполнение неравенства (17) из леммы 4 гарантирует отрицательность суммы первых  $K$  слагаемых в правой части выражения (16), а поскольку в правой части выражения (16) последние  $l-1$  слагаемые отрицательны, то вся правая часть будет отрицательна, и, следовательно, теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Индукция. База  $l = 1$  — доказано ранее (леммы 2 и 3, неравенство (12)). Переход:

$$\begin{aligned} &\sum_{S=l}^{K+l-2} |b_S| |a_{K+l}a_{K+l-1-S} - a_{K+l-1}a_{K+l-S}| = \\ &= a_{K+l-1} \sum_{S=l}^{K+l-2} |b_S| |a_{K+l-1-S}| \left| \frac{a_{K+l}}{a_{K+l-1}} - \frac{a_{K+l-S}}{a_{K+l-1-S}} \right| = (*). \end{aligned}$$

Число  $K + l - 1 - S$  при  $S \in [l; K + l - 2]$  принадлежит  $[1; K - 1]$ , поэтому

$$|a_{K+l-1-S}| \leq T, \quad \left| \frac{a_{K+l}}{a_{K+l-1}} - \frac{a_{K+l-S}}{a_{K+l-1-S}} \right| \leq M,$$

так как оба числа  $\frac{a_{K+l}}{a_{K+l-1}}$  и  $\frac{a_{K+l-S}}{a_{K+l-1-S}}$  больше 0 и не больше  $M$  по предположению. Тогда

$$(*) \leq a_{K+l-1} T \sum_{S=l}^{K+l-2} |b_S| M < a_{K+l-1} T (M + m) \sum_{S=l}^{K+l-2} |b_S|.$$

Тем самым осталось доказать, что

$$\frac{1}{2} |b_{K+l-1}| (a_{K+l} a_0 - a_{K+l-1} a_1) \geq a_{K+l-1} T (M + m) \sum_{S=l}^{K+l-2} |b_S|.$$

Разделив на  $a_{K+l-1}$ , получим, что осталось доказать истину цепочки неравенств

$$\frac{1}{2} a_0 |b_{K+l-1}| \left( \frac{a_{K+l}}{a_{K+l-1}} - \frac{a_1}{a_0} \right) \geq \frac{m}{4} a_0 |b_{K+l-1}| \geq T (M + m) \sum_{S=l}^{K+l-2} |b_S|.$$

Первое верно по выводу  $a_0$ . Если доказать второе неравенство, первая часть леммы 4 будет доказана. Поделив на  $\frac{m}{4}$ , получим

$$a_0 |b_{K+l-1}| \geq \alpha \sum_{S=l}^{K+l-2} |b_S|.$$

**Лемма 5.** В условиях теоремы можно подобрать число  $a_0$ , чтобы выполнялось неравенство

$$a_0 |b_{K+l-1}| \geq \alpha \sum_{S=l}^{K+l-2} |b_S|.$$

Доказательство леммы 5.

*Случай 1.* Пусть  $l > K - 1$ , тогда по индукционному предположению (неравенство (13))

$$|b_{K+l-1}| \geq \frac{m}{4} |b_{K+l-2}| \geq \left(\frac{m}{4}\right)^2 |b_{K+l-3}| \geq \dots \geq \left(\frac{m}{4}\right)^{K-1} |b_l|,$$

следовательно,

$$\alpha \sum_{S=l}^{K+l-2} |b_S| \leq \alpha |b_{K+l-1}| \left( \frac{4}{m} + \left(\frac{4}{m}\right)^2 + \dots + \left(\frac{4}{m}\right)^{K-1} \right) \leq a_0 |b_{K+l-1}|.$$

Значит,  $a_0$  должно удовлетворять следующему неравенству:

$$a_0 \geq \alpha \left( \frac{4}{m} + \left(\frac{4}{m}\right)^2 + \dots + \left(\frac{4}{m}\right)^{K-1} \right).$$

Случай 2. Пусть  $l \leq K - 1$ , тогда, применяя замечание 4, получим

$$\begin{aligned} \alpha \sum_{S=l}^{K+l-2} |b_S| &= \alpha \sum_{S=l}^{K-1} |b_S| + \alpha \sum_{S=K}^{K+l-2} |b_S| \leq \alpha \sum_{S=1}^{K-1} |b_S| + \alpha \sum_{S=K}^{K+l-2} |b_S| \leq \\ &\leq Ca_0 |b_K| + \alpha \sum_{S=K}^{K+l-2} |b_S| \leq \\ &\leq Ca_0 |b_K| + \alpha \left( \frac{4}{m} + \left( \frac{4}{m} \right)^2 + \dots + \left( \frac{4}{m} \right)^{l-1} \right) |b_{K+l-1}| \leq \\ &\leq \left( Ca_0 \left( \frac{4}{m} \right)^{l-1} + \alpha \left( \frac{4}{m} + \left( \frac{4}{m} \right)^2 + \dots + \left( \frac{4}{m} \right)^{l-1} \right) \right) |b_{K+l-1}|. \end{aligned}$$

Если доказать следующее неравенство, то лемма 5 будет доказана:

$$\left( Ca_0 \left( \frac{4}{m} \right)^{l-1} + \alpha \left( \frac{4}{m} + \left( \frac{4}{m} \right)^2 + \dots + \left( \frac{4}{m} \right)^{l-1} \right) \right) |b_{K+l-1}| \leq a_0 |b_{K+l-1}|.$$

Для его истинности  $a_0$  должно удовлетворять неравенству

$$Ca_0 \left( \frac{4}{m} \right)^{l-1} + \alpha \sum_{S=1}^{l-1} \left( \frac{4}{m} \right)^S \leq a_0 \quad \text{для всех } l = 1, \dots, K - 1$$

или, усилив предыдущее,

$$Ca_0 \left( \frac{4}{m} \right)^{l-1} + \alpha \sum_{S=1}^{K-1} \left( \frac{4}{m} \right)^{S-1} \leq a_0.$$

Константа  $C$  в замечании 4 подбирается по правилу

$$C = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{при } \frac{4}{m} \leq 1, \\ \frac{1}{2} \left( \frac{4}{m} \right)^{K-1}, & \text{при } \frac{4}{m} > 1. \end{cases}$$

Тем самым  $C \left( \frac{4}{m} \right)^{l-1} \leq \frac{1}{2}$ , следовательно,  $a_0$  подобрать можно:

$$2\alpha \sum_{S=1}^{K-1} \left( \frac{4}{m} \right)^{S-1} \leq a_0.$$

Лемма 5 доказана.

Докажем теперь вторую часть леммы 4, т. е. неравенство  $|b_{K+l}| > \frac{m}{4} |b_{K+l-1}|$ . Перепишем выражение (16):

$$\begin{aligned} |b_{K+l} a_{K+l-1} a_0| &= |b_{K+l-1} (a_{K+l} a_0 - a_{K+l-1} a_1) + b_{K+l-2} (a_{K+l} a_1 - a_{K+l-1} a_2) + \dots + \\ &\quad + b_l (a_{K+l} a_{K-1} - a_{K+l-1} a_K) + \\ &\quad + b_{l-1} (a_{K+l} a_K - a_{K+l-1} a_{K+1} + \dots + b_1 (a_{K+l} a_{K+l-1} - a_{K+l-1}^2))|. \end{aligned}$$



Из доказанного (17) следует, что

$$b_{K+l-1}(a_{K+l}a_0 - a_{K+l-1}a_1) + \dots + b_l(a_{K+l}a_{K-1} - a_{K+l-1}a_K) < 0.$$

Из условия  $K$ -Харди следует, что

$$\sum_{S=1}^{l-1} b_S(a_{K+l}a_{K+l-1-S} - a_{K+l-1}a_{K+l-S}) < 0.$$

Поэтому, используя неравенство 10 из леммы 4, имеем

$$\begin{aligned} |b_{K+l}a_{K+l-1}a_0| &= \left| \sum_{S=1}^{l-1} b_S(a_{K+l}a_{K+l-1-S} - a_{K+l-1}a_{K+l-S}) \right| + \\ &+ \left| \sum_{S=l}^{K+l-1} b_S(a_{K+l}a_{K+l-1-S} - a_{K+l-1}a_{K+l-S}) \right| \geq \\ &\geq \left| \sum_{S=l}^{K+l-1} b_S(a_{K+l}a_{K+l-1-S} - a_{K+l-1}a_{K+l-S}) \right| \geq \frac{1}{2}|b_{K+l-1}|(a_{K+l}a_0 - a_{K+l-1}a_1), \\ |b_{K+l}| &\geq \frac{1}{2}|b_{K+l-1}| \left( \frac{a_{K+l}}{a_{K+l-1}} - \frac{a_1}{a_0} \right) \geq \frac{m}{4}|b_{K+l-1}|. \end{aligned}$$

Лемма 4 доказана.

**3. Заключение.** Предположим, что функции  $f(z)$  и  $g(z)$  имеют ненулевой радиус сходимости представляющих их степенных рядов, скажем  $R > 0$ . Тогда условие Харди влечет ограничение на поведение функции  $g(z)$  при приближении к граничной окружности. Пусть  $0 < r < R$ ,  $g(re^{i\theta}) = \frac{1}{f(re^{i\theta})} = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^n e^{in\theta}$ , где  $b_0 > 0$ ,  $b_n \leq 0$ ,  $n > 0$ . Имеем, что при  $0 < \alpha < 1$  все коэффициенты  $c_n(\alpha)$  ряда  $(1-z)^{-\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\alpha)z^n$  положительны. Взяв  $0 < \rho < 1$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(re^{i\theta})(1 - \rho e^{-i\theta})^{-\alpha} d\theta &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^n e^{in\theta} \right) \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\alpha) \rho^n e^{-in\theta} \right) d\theta = \\ &= b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n c_n(\alpha) r^n \rho^n < b_0. \end{aligned} \quad (18)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(re^{i\theta})(1 - \rho e^{i\theta})^{-\alpha} d\theta &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^n e^{in\theta} \right) \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\alpha) \rho^n e^{in\theta} \right) d\theta = b_0. \end{aligned} \quad (19)$$

Тогда (18) и (19) влекут

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(re^{i\theta}) \operatorname{Re}(1 - \rho e^{i\theta})^{-\alpha} d\theta &= \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(re^{i\theta}) ((1 - \rho e^{-i\theta})^{-\alpha} + (1 - \rho e^{i\theta})^{-\alpha}) d\theta < b_0. \end{aligned} \quad (20)$$

Переходя в (20) к пределу при  $\rho \rightarrow 1 - 0$ , получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(re^{i\theta}) \operatorname{Re}(1 - e^{i\theta})^{-\alpha} d\theta < b_0. \quad (21)$$

При  $0 < \alpha < 1$ ,  $0 < \theta < \pi$  имеем, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(1 - e^{i\theta})^{-\alpha} &= \operatorname{Re} \left( e^{\frac{-i\theta\alpha}{2}} \left( e^{\frac{-i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}} \right)^{-\alpha} \right) = \operatorname{Re} \left( e^{\frac{-i\theta\alpha}{2}} \left( -2i \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \right)^{-\alpha} \right) = \\ &= 2^{-\alpha} \operatorname{Re} \left( e^{\frac{-i\theta\alpha}{2}} e^{\frac{i\pi\alpha}{2}} \left( \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \right)^{-\alpha} \right) = 2^{-\alpha} \left( \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \right)^{-\alpha} \operatorname{Re} \left( e^{\frac{i(\pi-\theta)\alpha}{2}} \right) = \\ &= 2^{-\alpha} \left( \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \right)^{-\alpha} \cos \left( \frac{(\pi-\theta)\alpha}{2} \right). \end{aligned}$$

Аналогично, при  $0 < \alpha < 1$ ,  $-\pi < \theta < 0$  имеем, что

$$\operatorname{Re}(1 - e^{i\theta})^{-\alpha} = 2^{-\alpha} \left( \sin \left( \frac{|\theta|}{2} \right) \right)^{-\alpha} \cos \left( \frac{(\pi - |\theta|)\alpha}{2} \right).$$

Поэтому из (21) получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(re^{i\theta}) \operatorname{Re}(1 - e^{i\theta})^{-\alpha} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(re^{i\theta}) \frac{\cos \left( \frac{(\pi - |\theta|)\alpha}{2} \right)}{2^\alpha \left( \sin \left( \frac{|\theta|}{2} \right) \right)^\alpha} d\theta < b_0 = \frac{1}{a_0} = \frac{1}{f(0)}. \quad (22)$$

Поскольку интеграл в (22) вещественный, то окончательно получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{f(re^{i\theta})} \right) \frac{\cos \left( \frac{(\pi - |\theta|)\alpha}{2} \right)}{\left( \sin \left( \frac{|\theta|}{2} \right) \right)^\alpha} d\theta < \frac{2^\alpha}{f(0)}. \quad (23)$$

## Литература

1. *Agler J., McCarthy J.E.* Pick interpolation and Hilbert function spaces. In Ser.: Graduate Studies in Mathematics. Vol. 44. Providence: American Mathematical Society, 2002.
2. *Hardy G. H.* Divergent Series. Oxford: Clarendon Press, 1949.
3. *Поляк З. Г., Сега Г.* Задачи и теоремы из анализа. М.: Наука, 1978.

Статья поступила в редакцию 30 мая 2019 г.;  
после доработки 12 июня 2019 г.;  
рекомендована в печать 19 сентября 2019 г.

Контактная информация:

Железняк Александр Владимирович — ст. преп.; ferrum2001@mail.ru

# Power series of one variable with condition of logarithmical convexity

A. V. Zheleznyak

St. Petersburg Electrotechnical University “LETI”, ul. Professora Popova, 5,  
197376, St. Petersburg, Russian Federation

**For citation:** Zheleznyak A. V. Power series of one variable with condition of logarithmical convexity. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 1, pp. 28–38. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.103> (In Russian)

We obtain a new version of Hardy theorem about power series reciprocal to the power series with positive coefficients. We prove that if the sequence  $\{a_n\}$ ,  $n \geq K$  is logarithmically convex, then reciprocal power series has only negative coefficients  $b_n$ ,  $n > 0$  for any  $K$  if the first coefficient  $a_0$  is sufficiently large. The classical Hardy theorem corresponds to the case  $K = 0$ . Such results are useful in Nevanlinna – Pick theory. For example, if function  $k(x, y)$  can be represented as power series  $\sum_{n \geq 0} a_n (x\bar{y})^n$ ,  $a_n > 0$ , and reciprocal function  $\frac{1}{k(x, y)}$  can be represented as power series  $\sum_{n > 0} b_n (x\bar{y})^n$  such that  $b_n < 0$ ,  $n > 0$ , then  $k(x, y)$  is a reproducing kernel function for some Hilbert space of analytic functions in the unit disc  $\mathbb{D}$  with Nevanlinna – Pick property. The reproducing kernel  $\frac{1}{1-x\bar{y}}$  of the classical Hardy space  $H^2(\mathbb{D})$  is a prime example for our theorems. In addition, we get new estimates on growth of analytic functions reciprocal to analytic functions with positive Taylor coefficients.

*Keywords:* power series, Nevanlinna – Pick kernels, logarithmical convexity.

## References

1. Agler J., McCarthy J. E., *Pick interpolation and Hilbert function spaces*, in Ser. *Graduate Studies in Mathematics* 44 (American Mathematician Society, Providence, 2002).
2. Hardy G. H., *Divergent Series* (Clarendon Press, Oxford, 1949).
3. Polia Z. G., Sege G., *Problems and theorems of analysis* (Nauka Publ., Moscow, 1978).

Received: May 30, 2019  
Revised: June 12, 2019  
Accepted: September 19, 2019

Author's information:

Alexandr V. Zheleznyak — [ferrum2001@mail.ru](mailto:ferrum2001@mail.ru)

## Об одном разложении аддитивных случайных полей\*

М. Зани<sup>1</sup>, А. А. Хартов<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> Институт Дени Пуассона, Университет Орлеана,  
Франция, 45067, Орлеан, В.Р. 6759, ул. Шартр, Математический корпус

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

<sup>3</sup> Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет  
информационных технологий, механики и оптики,  
Российская Федерация, 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

**Для цитирования:** Зани М., Хартов А. А. Об одном разложении аддитивных случайных полей // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 1. С. 39–49. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.104>

Рассматривается аддитивное случайное поле на  $[0, 1]^d$ , представляющее собой сумму  $d$  некоррелированных случайных процессов, зависящих от  $d$  независимых параметров. Предполагается, что эти процессы имеют нулевое математическое ожидание и одинаковую непрерывную ковариационную функцию. К изучению такого рода случайных полей проявляется определенный интерес. Они возникают в теории пересечений и самопересечений процессов броуновских движений, рассматриваются в задачах о малых отклонениях и в задачах конечноранговой аппроксимации при сколь угодно большой параметрической размерности  $d$ . В последних задачах ключевую роль играют спектральные характеристики ковариационного оператора. Для данного аддитивного случайного поля зависимость собственных чисел его ковариационного оператора от собственных чисел ковариационного оператора маргинальных случайных процессов достаточно проста в случае, когда последний имеет тождественную единицу в качестве собственного вектора. В другом случае, когда условие о тождественной единице не выполнено, вышеуказанная зависимость сложна, что затрудняет изучение такого рода случайных полей. Здесь при разложении случайного поля на сумму его интеграла и его центрированной версии слагаемые будут ортогональны в пространстве  $L_2([0, 1]^d)$ , но, вообще говоря, коррелированы. В настоящей статье мы приводим для данного случайного поля другое интересное разложение, существование которого было замечено авторами при решении задач конечноранговой аппроксимации этого поля в постановке в среднем. В полученном разложении слагаемые ортогональны в пространстве  $L_2([0, 1]^d)$  и некоррелированы, а при больших  $d$  они близки соответственно к интегралу от случайного поля и центрированной версии поля с малой относительной средней квадратической ошибкой.

*Ключевые слова:* аддитивные случайные поля, разложение, ковариационная функция, ковариационный оператор, собственные пары, сложность аппроксимации в среднем.

**1. Введение.** Пусть на некотором вероятностном пространстве задан набор случайных процессов  $X_1(t), X_2(t), \dots, X_d(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , где  $d$  — произвольное натуральное число. Пусть данные процессы имеют нулевое математическое ожидание, одинаковую непрерывную ковариационную функцию  $\mathcal{K}(t, s)$ ,  $t, s \in [0, 1]$ , и являются

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ (грант СПбГУ-ННИО 6.65.37.2017).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2020