УДК 519.71 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 1
MSC 93C55

О проблеме Айзермана: коэффициентные условия существования цикла периода четыре в двумерной дискретной системе*

Т. Е. Звягинцева

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Звягинцева Т. Е.* О проблеме Айзермана: коэффициентные условия существования цикла периода четыре в двумерной дискретной системе // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 1. С. 50–59. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.105

В работе изучается система автоматического управления второго порядка с дискретным временем, нелинейность которой удовлетворяет обобщенному условию Рауса — Гурвица. Такие системы находят широкое применение при решении современных прикладных проблем, возникающих в инженерных задачах, в теории управления движением, в задачах механики, физики, робототехники. В недавних статьях У. Хита, Дж. Карраско, М. де ла Сена построены два примера дискретных систем с нелинейностями, лежащими в гурвицевом угле, которые показывают, что гипотезы Айзермана и Калмана в дискретном случае не верны даже для систем второго порядка. В построенных авторами примерах одна из таких систем имеет цикл периода три, а другая — цикл периода четыре. В этой статье предполагается, что нелинейность является 2-периодической и лежит в гурвицевом угле, и исследуется система при всех возможных значениях параметров. В явном виде выписываются условия на параметры, при выполнении которых может быть построена такая 2-периодическая нелинейность, что система с указанной нелинейностью не будет глобально асимптотически устойчивой. Указанная нелинейность может быть построена не единственным образом. В работе предложен способ построения такой нелинейности, что в системе существует семейство циклов периода четыре. Циклы не являются изолированными, любое решение системы с начальными данными, лежащими на некотором указанном луче, будет периодическим.

Ключевые слова: система второго порядка с дискретным временем, проблема Айзермана, абсолютная устойчивость, периодическое решение.

1. Введение. Теория абсолютной устойчивости динамических систем интенсивно развивается в течение последних десятилетий, ее результаты широко применяются при решении прикладных задач, возникающих в различных областях современной науки и техники, а также представляют значительный интерес в теоретическом плане.

Определение абсолютной устойчивости для систем вида $\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma)$, $\sigma = A^*x$, с нелинейностью, удовлетворяющей секторному условию $k_1\sigma^2 \le \varphi(\sigma)\,\sigma \le k_2\sigma^2$, $\sigma \in R$, было впервые дано А. И. Лурье и В. Н. Постниковым [1]. Если указанная система асимптотически устойчива при замене $\varphi(\sigma)$ на линейную функцию $S\sigma$ для

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-01-00388).

любой константы $S \in [k_1,\ k_2]$, то говорят, что нелинейность удовлетворяет обобщенным условиям Рауса — Гурвица, или лежит в гурвицевом угле. В работе [2] М. А. Айзерман сформулировал известную гипотезу, суть которой сводится к следующему. Если нелинейность лежит в гурвицевом угле, то система с такой нелинейностью будет глобально асимптотически устойчивой. Гипотеза Айзермана в общей формулировке была опровергнута В. А. Плиссом [3, 4], который построил контрпример для системы дифференциальных уравнений третьего порядка и разработал метод, позволяющий находить периодические колебания в системах, удовлетворяющих обобщенным условиям Рауса — Гурвица. В это же время Р. Э. Калман [5] сформулировал гипотезу о том, что абсолютная устойчивость систем автоматического управления с секторной нелинейностью будет иметь место, если $\varphi\,(\sigma)$ удовлетворяет более сильным требованиям. Позже гипотеза Калмана тоже была опровергнута.

Методам построения контрпримеров к проблемам Айзермана и Калмана в различных формулировках, методам поиска периодических колебаний в динамических системах с непрерывным временем посвящено большое число работ. В работах Г. А. Леонова и его учеников [6, 7] дан обзор известных подходов к построению контрпримеров и предложен новый метод поиска периодических решений в системах с нелинейностями, удовлетворяющими условиям Айзермана и Калмана. Обзор результатов и обширную библиографию по данной тематике можно найти в статье [8].

В последние годы интенсивно строится и развивается теория абсолютной устойчивости для систем с дискретным временем (например, [9–15]), которые являются математическими моделями, описывающими динамику поведения решений многих прикладных систем, возникающих в современных инженерных задачах, теории управления движением и проблемах естествознания. Дискретное представление математической модели необходимо в теории принятия решений, логическом управлении, цифровых автоматах. Результаты теории с непрерывным временем не переносятся полностью на дискретный случай, процессы в непрерывных и дискретных системах подчиняются разным закономерностям. В статьях [12, 13] представлены два примера дискретных систем второго порядка с нелинейностями, лежащими в гурвицевом угле, которые имеют циклы периода три и четыре. Эти примеры служат контрпримерами к аналогам гипотез Айзермана и Калмана в дискретном случае.

В данной работе исследуется дискретная система автоматического управления второго порядка с 2-периодической нелинейностью, лежащей в гурвицевом угле, при всех возможных значениях параметров. Выписываются условия на параметры, при выполнении которых может быть построена такая нелинейность, что система с указанной нелинейностью не будет глобально асимптотически устойчивой.

В работе предложен один из способов построения такой нелинейности, что в системе существует семейство неизолированных циклов периода четыре: любое решение системы с начальными данными, лежащими на некотором указанном луче, является 4-периодическим.

2. Постановка задачи. Основной результат. Рассмотрим систему второго порядка с дискретным временем

$$\begin{cases} x_{j+1} = y_j, \\ y_{j+1} = -\alpha y_j - \beta x_j - \varphi\,(\sigma_j)\,, \end{cases} \tag{1}$$

где $\sigma_j = ay_j + bx_j$, $j \in N$, $a^2\beta - ab\alpha + b^2 \neq 0$. Считаем, что при $\varphi\,(\sigma_j) \equiv 0$ система (1) асимптотически устойчива, то есть $|\alpha| - 1 < \beta < 1$.

Будем полагать для определенности, что $a > 0$ (случай $a < 0$ приводится к рассматриваемому с помощью простой замены).

Обозначим через Ω множество таких $S = \text{const}$, для которых линейная система с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} x_{j+1} = y_j, \\ y_{j+1} = -\alpha y_j - \beta x_j - S\,(a y_j + b x_j) \end{cases} \tag{2}$$

асимптотически устойчива, то есть верно неравенство $|\alpha + aS| - 1 < \beta + bS < 1$.

Положим в системе (1)

$$\varphi\,(\sigma_j) = S_j \sigma_j = S_j\,(a y_j + b x_j)\,, \tag{3}$$

где $S_j \in \Omega$, $j \in N$. Заметим, что определенная таким образом нелинейность удовлетворяет обобщенным условиям Рауса — Гурвица.

Если $4\beta \le \alpha^2$, то обозначим через $b_\pm$ корни уравнения $b^2 - \alpha a b + \beta a^2 = 0$: $b_\pm = \frac{a}{2}\left(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}\right)$.

Теорема. *Если параметры системы* (1) *с нелинейностью вида* (3) *удовлетворяют одному из следующих условий 1–6:*

1) $\alpha > 0,\ 4\beta > \alpha^2,\ b \in \left(-\frac{a(1-\beta)}{\alpha},\ \frac{a(1+\beta)}{\alpha}\right)$;

2) $\alpha > 0,\ 4\beta \le \alpha^2,\ b \in \left(-\frac{a(1-\beta)}{\alpha},\ b_-\right) \cup \left(b_+,\ \frac{a(1+\beta)}{\alpha}\right)$;

3) $\alpha = 0,\ \beta > 0$;

4) $\alpha = 0,\ \beta \le 0,\ b \in (-\infty,\ b_-) \cup (b_+,\ +\infty)$;

5) $\alpha < 0,\ 4\beta > \alpha^2,\ b \in \left(\frac{a(1+\beta)}{\alpha},\ -\frac{a(1-\beta)}{\alpha}\right)$;

6) $\alpha < 0,\ 4\beta \le \alpha^2,\ b \in \left(\frac{a(1+\beta)}{\alpha},\ b_-\right) \cup \left(b_+,\ -\frac{a(1-\beta)}{\alpha}\right)$;

то существует 2-периодическая последовательность $\{S_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \Omega$ *такая, что система имеет периодические решения: любое решение системы с начальными условиями* $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, *где* $x_1 \in R$, $y_1 = \frac{1-(\beta+bS_1)}{\alpha+aS_1} x_1$, *является циклом периода четыре.*

3. Доказательство теоремы.

Утверждение 1. *Множество* Ω *— интервал* $(S_{\min},\ S_{\max})$, *где*

при $\alpha > 0$:

$$S_{\max} = \begin{cases} \frac{1-\alpha+\beta}{a-b}, & \text{если} \quad b \le \frac{a(1-\beta)}{2-\alpha}, \\ \frac{1-\beta}{b}, & \text{если} \quad b > \frac{a(1-\beta)}{2-\alpha}, \end{cases} \qquad S_{\min} = \begin{cases} \frac{1-\beta}{b}, & \text{если} \quad b < -\frac{a(1-\beta)}{2+\alpha}, \\ -\frac{1+\alpha+\beta}{a+b}, & \text{если} \quad -\frac{a(1-\beta)}{2+\alpha} \le b \le \frac{a(1+\beta)}{\alpha}, \\ \frac{1-\alpha+\beta}{a-b}, & \text{если} \quad b > \frac{a(1+\beta)}{\alpha}, \end{cases}$$

при $\alpha = 0$:

$$S_{\max} = \begin{cases} \frac{1+\beta}{a-b}, & \text{если} \quad b \le \frac{a(1-\beta)}{2}, \\ \frac{1-\beta}{b}, & \text{если} \quad b > \frac{a(1-\beta)}{2}, \end{cases} \qquad S_{\min} = \begin{cases} \frac{1-\beta}{b}, & \text{если} \quad b \le -\frac{a(1-\beta)}{2}, \\ -\frac{1+\beta}{a+b}, & \text{если} \quad b > -\frac{a(1-\beta)}{2}, \end{cases}$$

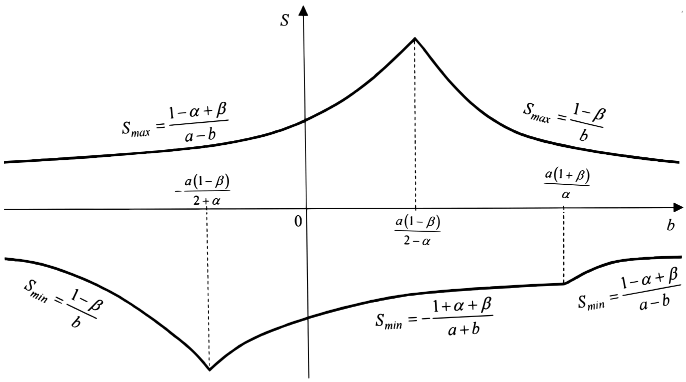

Рис. 1. Случай $\alpha > 0$.

и при $\alpha < 0$*:*

$$S_{\max}=\begin{cases} -\frac{1+\alpha+\beta}{a+b}, \ \textit{если} \quad b<\frac{a(1+\beta)}{\alpha}, \\ \frac{1-\alpha+\beta}{a-b}, \ \textit{если} \quad \frac{a(1+\beta)}{\alpha}\le b\le\frac{a(1-\beta)}{2-\alpha}, \\ \frac{1-\beta}{b}, \ \textit{если} \quad b>\frac{a(1-\beta)}{2-\alpha}, \end{cases} \quad S_{\min}=\begin{cases} \frac{1-\beta}{b}, \ \textit{если} \quad b\le-\frac{a(1-\beta)}{2+\alpha}, \\ -\frac{1+\alpha+\beta}{a+b}, \ \textit{если} \quad b>-\frac{a(1-\beta)}{2+\alpha}. \end{cases}$$

Доказательство утверждения 1. Достаточно заметить, что S_j принадлежит множеству Ω тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$|\alpha_j|-1<\beta_j<1, \tag{4}$$

где $\alpha_j=\alpha+aS_j$, $\beta_j=\beta+bS_j$. Из условия (4) нетрудно найти $S_{\min}$ и $S_{\max}$.

На рис. 1 изображены графики зависимости $S_{\min}$ и $S_{\max}$ от $b\in(-\infty,\ +\infty)$ при фиксированных a, $\alpha>0$ и β.

Систему (1) с нелинейностью (3) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} x_{j+1} \\ y_{j+1} \end{pmatrix} = P_j \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $P_j=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta_j & -\alpha_j \end{pmatrix}$, $\alpha_j=\alpha+aS_j$, $\beta_j=\beta+bS_j$.

Пусть матрица P_j — 2-периодическая (последовательность $\{S_j\}_{j=1}^{\infty}$ — 2-периодическая). Наряду с системой (5) рассмотрим линейную систему

$$\begin{pmatrix} x_{j+1} \\ y_{j+1} \end{pmatrix} = P_{j+1}P_j \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} \tag{6}$$

с постоянной матрицей $P_{j+1}P_j=P_2P_1=\begin{pmatrix} -\beta_1 & -\alpha_1 \\ \alpha_2\beta_1 & \alpha_2\alpha_1-\beta_2 \end{pmatrix}$, $j=2m-1,\ m\in N$.

Система (6) асимптотически устойчива, если и только если

$$|Sp\,(P_2P_1)|-1<\mathrm{Det}\,(P_2P_1)<1,$$

то есть верны неравенства

$$-\left(1-\beta_2\right)\left(1-\beta_1\right)<\alpha_2\alpha_1<\left(1+\beta_2\right)\left(1+\beta_1\right), \tag{7}$$

$$\beta_2\beta_1<1. \tag{8}$$

Правая часть неравенства (7) и неравенство (8) верны всегда в силу условия (4). Левая часть неравенства (7) не выполнена (и система (6) не является асимптотически устойчивой), если

$$-\left(1+\beta_2\right)\left(1+\beta_1\right)<\alpha_2\alpha_1 \leq -\left(1-\beta_2\right)\left(1-\beta_1\right). \tag{9}$$

Утверждение 2. *Если верно равенство*

$$\alpha_2\alpha_1+\left(1-\beta_2\right)\left(1-\beta_1\right)=0, \tag{10}$$

то решения системы (5) *с начальными условиями* $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, *где* $x_1 \in R$, $y_1 = \frac{1-\beta_1}{\alpha_1}x_1$, *— циклы периода четыре.*

Доказательство утверждения 2. Легко показать, что система (5) переводит точку $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{1-\beta_1}{\alpha_1}x_1 \end{pmatrix}$ в точку $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ -\alpha_1 y_1-\beta_1 x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ -x_1 \end{pmatrix}$, которая (при выполнении условия (10)) переходит в точку $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\alpha_2 y_2-\beta_2 x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix}$. Точка $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$ переходит в точку $\begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_3 \\ -\alpha_1 y_3-\beta_1 x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$, которая затем переходит в точку $\begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_4 \\ -\alpha_2 y_4-\beta_2 x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$. Указанная последовательность точек образует цикл периода четыре. Утверждение доказано.

Не трудно показать, что система (5) имеет неограниченные решения (при j, стремящемся к бесконечности), если $\alpha_2\alpha_1 < -\left(1-\beta_2\right)\left(1-\beta_1\right)$.

Заметим, что равенство (10) может быть верно только, если $\alpha_2\alpha_1 < 0$, и $S = -\alpha/a$ принадлежит множеству Ω. Следовательно, система (5) с 2-периодической матрицей P_j может иметь цикл периода четыре только при $b \in \left(-\frac{a(1-\beta)}{\alpha},\ \frac{a(1+\beta)}{\alpha}\right)$, если $\alpha > 0$, и только при $b \in \left(\frac{a(1+\beta)}{\alpha},\ -\frac{a(1-\beta)}{\alpha}\right)$, если $\alpha < 0$.

Условие (10) выполнено, если

$$S_2 = -\frac{\left(a\alpha-b\left(1-\beta\right)\right)S_1+\left(\alpha^2+\left(1-\beta\right)^2\right)}{\left(a^2+b^2\right)S_1+\left(a\alpha-b\left(1-\beta\right)\right)}. \tag{11}$$

При этом

$$S_1-S_2 = \frac{\left(a^2+b^2\right)S_1^2+2\left(a\alpha-b\left(1-\beta\right)\right)S_1+\left(\alpha^2+\left(1-\beta\right)^2\right)}{\left(a^2+b^2\right)S_1+\left(a\alpha-b\left(1-\beta\right)\right)}. \tag{12}$$

Нетрудно показать, что функция $|S_1-S_2|$, где разность (S_1-S_2) определена (12), принимает минимальное значение, равное $\frac{2|a(1-\beta)+b\alpha|}{a^2+b^2}$, при $S_1 = \bar{S}$ и $S_1 = \bar{\bar{S}}$, где

$$\bar{S} = \frac{a\left(1-\alpha-\beta\right)+b\left(1+\alpha-\beta\right)}{a^2+b^2}, \quad \bar{\bar{S}} = \frac{-a\left(1+\alpha-\beta\right)+b\left(1-\alpha-\beta\right)}{a^2+b^2}. \tag{13}$$

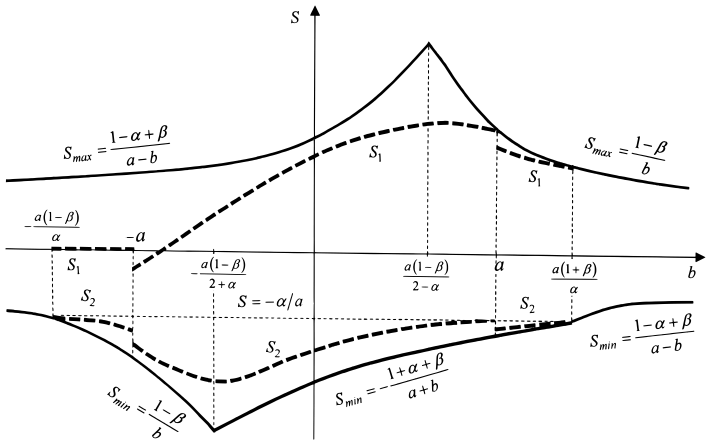

Рис. 2. Случай $\alpha > 0$, $\beta \leq 1 - \alpha$ при $4\beta > \alpha^2$.

При этом из равенства (11) следует, что $S_2 = \bar{\bar{S}}$, если $S_1 = \bar{S}$, и наоборот, $S_2 = \bar{S}$, если $S_1 = \bar{\bar{S}}$.

Определим теперь 2-периодическую последовательность $\{S_j\}_{j=1}^{\infty} \in \Omega$ ($S_{2k-1} = S_1$, $S_{2k} = S_2$, $k \in N$) для всех α, β таких, что $|\alpha| - 1 < \beta < 1$.

А. Рассмотрим сначала значения параметров $\alpha > 0$, $\beta \leq 1 - \alpha$. В этом случае $-\frac{a(1-\beta)}{\alpha} \leq -a < a < \frac{a(1+\beta)}{\alpha}$.

Если $4\beta > \alpha^2$, $b \in (-a,\ a)$ или $4\beta \leq \alpha^2$, $b \in (-a,\ b_-) \cup (b_+,\ a)$, то положим $S_1 = \bar{S}$, $S_2 = \bar{\bar{S}}$, где $\bar{S}$, $\bar{\bar{S}}$ определены равенствами (13).

Заметим, что $\left|\bar{S} - \bar{\bar{S}}\right| \geq S_{\max} - S_{\min}$, если $4\beta \leq \alpha^2$, $b \in (b_-,\ b_+)$, и в этом случае не существует S_1 и S_2 из множества Ω, удовлетворяющих условию (11).

Если $b \in \left(-\frac{a(1-\beta)}{\alpha},\ -a\right]$, то положим, например, $S_1 = 0$, и $S_2 = -\frac{\alpha^2+(1-\beta)^2}{a\alpha - b(1-\beta)}$ согласно условию (11).

Если $b \in \left[a,\ \frac{a(1+\beta)}{\alpha}\right)$, то положим, например,

$$S_1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{\alpha}{a} + S_{\min}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{a} + \frac{1+\alpha+\beta}{a+b}\right) = -\frac{a\,(1+2\alpha+\beta) + b\alpha}{2a\,(a+b)}, \qquad (14)$$

и согласно (11)

$$S_2 = -\frac{a^2\left(2\,(1-\beta)^2 - \alpha\,(1+\beta)\right) + ab\left((1-\beta+\alpha)^2 + 2\,(1-\beta)\right) + b^2\alpha\,(1-\beta)}{a^3\,(1+\beta) - a^2 b\,(\alpha+2\beta-2) + ab^2\,(2\alpha-\beta+3) + b^3\alpha}. \quad (15)$$

На рис. 2, 3 пунктирной линией показаны графики зависимости S_1 и S_2 от b в случае $\alpha > 0$, $\beta \leq 1 - \alpha$ при $4\beta > \alpha^2$ и $4\beta \leq \alpha^2$ соответственно.

Б. Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 1 - \alpha$. В этом случае $-a < -\frac{a(1-\beta)}{\alpha} < a < \frac{a(1+\beta)}{\alpha}$.

Если $4\beta > \alpha^2$, $b \in \left(-\frac{a(1-\beta)}{\alpha},\ a\right)$ или $4\beta \leq \alpha^2$, $b \in \left(-\frac{a(1-\beta)}{\alpha},\ b_-\right) \cup (b_+,\ a)$, то положим $S_1 = \bar{S}$, $S_2 = \bar{\bar{S}}$.

Если $b \in \left[a,\ \frac{a(1+\beta)}{\alpha}\right)$, то определим S_1 и S_2 формулами (14), (15).

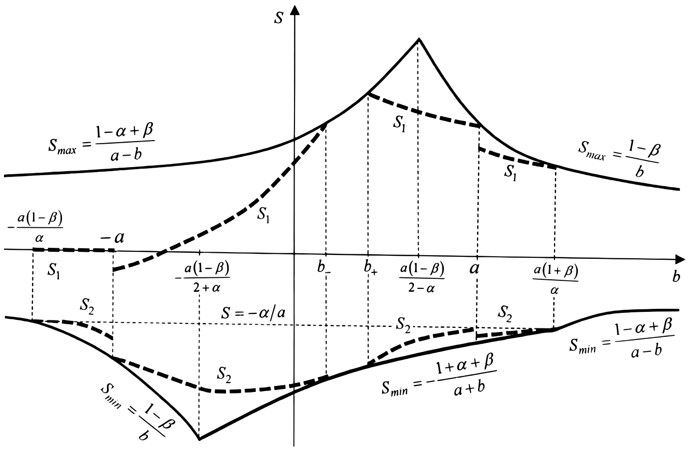

Рис. 3. Случай $\alpha > 0$, $\beta \le 1 - \alpha$ при $4\beta \le \alpha^2$.

В. В случае $\alpha = 0$: если $4\beta > \alpha^2$, $b \in (-a,\ a)$ или $4\beta \le \alpha^2$, $b \in (-a,\ b_-) \cup (b_+,\ a)$ положим $S_1 = \bar{S}$, $S_2 = \bar{\bar{S}}$.

Если $b \in [a,\ +\infty)$, то положим $S_1 = k_1 S_{\max} = \frac{k_1(1-\beta)}{b}$, где $k_1 \in (0,\ 1)$, и подберем k_1 так, чтобы значение S_2, определенное равенством (11), содержалось в множестве Ω. Неравенство $S_2 > S_{\min} = -\frac{1+\beta}{a+b}$ равносильно в этом случае неравенству $k_1 > k_{10} = \frac{ab(1-\beta)+2b^2}{a^2(1+\beta)+ab(1-\beta)+2b^2}$, и можно положить, например, $k_1 = \frac{1+k_{10}}{2}$.

Если $b \in (-\infty,\ -a]$, то положим $S_1 = k_2 S_{\min} = \frac{k_2(1-\beta)}{b}$, где $k_2 \in (0,\ 1)$, и подберем k_2 так, чтобы значение S_2, определенное формулой (11), содержалось в Ω. Неравенство $S_2 < S_{\max} = \frac{1+\beta}{a-b}$ равносильно в этом случае неравенству $k_2 > k_{20} = \frac{-ab(1-\beta)+2b^2}{a^2(1+\beta)-ab(1-\beta)+2b^2}$, и можно положить $k_2 = \frac{1+k_{20}}{2}$.

Г. Пусть $\alpha < 0$, $\beta \le 1 + \alpha$. Тогда $\frac{a(1+\beta)}{\alpha} < -a < a \le -\frac{a(1-\beta)}{\alpha}$.

Если $4\beta > \alpha^2$, $b \in (-a,\ a)$ или $4\beta \le \alpha^2$, $b \in (-a,\ b_-) \cup (b_+,\ a)$, то положим $S_1 = \bar{S}$, $S_2 = \bar{\bar{S}}$.

При $b \in \left[a,\ -\frac{a(1-\beta)}{\alpha}\right)$ положим $S_1 = 0$, тогда $S_2 = -\frac{\alpha^2+(1-\beta)^2}{a\alpha - b(1-\beta)}$.

Если $b \in \left(\frac{a(1+\beta)}{\alpha},\ -a\right]$, то положим, например,

$$S_1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{\alpha}{a} + S_{\max}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\alpha}{a} + \frac{1-\alpha+\beta}{a-b}\right) = -\frac{a\,(1-2\alpha+\beta)+b\alpha}{2a\,(a-b)}, \tag{16}$$

и согласно (11)

$$S_2 = -\frac{a^2\left(2\,(1-\beta)^2 + \alpha\,(1+\beta)\right) - ab\left((1-\beta-\alpha)^2 + 2\,(1-\beta)\right) - b^2\alpha\,(1-\beta)}{a^3\,(1+\beta) - a^2 b\,(\alpha - 2\beta + 2) - ab^2\,(2\alpha+\beta-3) + b^3\alpha}. \tag{17}$$

Д. Пусть $\alpha < 0$, $\beta > 1 + \alpha$. В этом случае $\frac{a(1+\beta)}{\alpha} < -a < -\frac{a(1-\beta)}{\alpha} < a$.

Если $4\beta > \alpha^2$, $b \in \left(-a,\ -\frac{a(1-\beta)}{\alpha}\right)$ или $4\beta \le \alpha^2$, $b \in (-a,\ b_-) \cup \left(b_+,\ -\frac{a(1-\beta)}{\alpha}\right)$, то положим $S_1 = \bar{S}$, $S_2 = \bar{\bar{S}}$.

При $b \in \left(\frac{a(1+\beta)}{\alpha},\ -a\right]$ определим S_1 и S_2 формулами (16), (17).

Нетрудно показать, что определенные выше S_1 и S_2 принадлежат множеству Ω для всех значений параметров из условий 1–6 теоремы. Теорема доказана.

Заметим, что теорему можно переформулировать следующим образом:

Если $S = -\alpha/a \in \Omega$ *и* $b^2 - ab\alpha + a^2\beta > 0$, *то существует 2-периодическая последовательность* $\{S_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \Omega$, *такая, что система* (1) *с нелинейностью вида* (3) *имеет циклы периода четыре.*

Очевидно, что для любых рассмотренных значений параметров a, b, α и β найдутся ε_1, $\varepsilon_2 > 0$ (зависящие от параметров) такие, что S_1 и S_2 принадлежат отрезку $[S_{\min} + \varepsilon_1, S_{\max} - \varepsilon_2] \subset \Omega$, поэтому теорема может быть сформулирована не только для интервала Ω, но и для отрезка $[S_{\min} + \varepsilon_1, S_{\max} - \varepsilon_2]$, как это было сделано в классическом случае.

Литература

1. *Лурье А. И., Постников В. Н.* К теории устойчивости регулируемых систем // Прикладная математика и механика. 1944. Т. 8, № 3. С. 246–248.

2. *Айзерман М. А.* Об одной проблеме, касающейся устойчивости «в большом» динамических систем // Успехи математических наук. 1949. Т. 4. Вып. 4. С. 187–188.

3. *Плисс В. А.* О проблеме Айзермана для случая системы трех дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 1958. Т. 121, № 3. С. 422–425.

4. *Плисс В. А.* Некоторые проблемы теории устойчивости движения в целом. Л.: Изд-во ЛГУ. 1958.

5. *Kalman R. E.* Physical and mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems // Transactions of the ASME. 1957. No. 79. P. 553–566.

6. *Леонов Г. А.* О проблеме Айзермана // Автоматика и телемеханика. 2009. № 7. С. 37–49.

7. *Леонов Г. А., Кузнецов Н. В., Брагин В. О.* О проблемах Айзермана и Калмана // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2010. Вып. 3. С. 31–47.

8. *Либерзон М. Р.* Очерки о теории абсолютной устойчивости // Автоматика и телемеханика. 2006. № 10. С. 86–119.

9. *Hu T., Lin Z.* A complete stability analysis of planar discrete-time linear systems under saturation // IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications. 2001. Vol. 48, no. 6. P. 710–725.

10. *Gonzaga C. A., Jungers M., Daafouz J.* Stability analysis of discrete-time Lur'e systems // Automatica. 2012. Vol. 48, no. 9. P. 2277–2283.

11. *Ahmad N. S., Heath W. P., Li G.* LMI-based stability criteria for discrete-time Lur'e systems with monotonic, sector- and slope-restricted nonlinearities // IEEE Trans-actions on Automatic Control. 2013. Vol. 58, no. 2. P. 459–465.

12. *Heath W. P., Carrasco J., de la Sen M.* Second-order counterexample to the discrete-time Kalman conjecture // Proceedings of the European Control Conference (ECC15). 2015. Linz, Austria. 2015. P. 981–985.

13. *Heath W. P., Carrasco J., de la Sen M.* Second-order counterexamples to the discrete-time Kalman conjecture // Automatica. 2015. Vol. 60. Issue C. P. 140–144.

14. *Heath W. P., Carrasco J.* Global asymptotic stability for a class of discrete-time systems // Proceedings of the European Control Conference (ECC15). 2015. Linz, Austria. 2015. P. 969–974.

15. *Park B. J., Park P., Kwon N. K.* An improved stability criterion for discrete-time Lur'e systems with sector- and slope-restrictions // Automatica. 2015. Vol. 51, no. 1. P. 255–258.

Статья поступила в редакцию 1 августа 2019 г.;
после доработки 18 сентября 2019 г.;
рекомендована в печать 19 сентября 2019 г.

Контактная информация:

Звягинцева Татьяна Евгеньевна — канд. физ.-мат. наук, доц.; zv_tatiana@mail.ru, t.zvyagintceva@spbu.ru

On the problem of Aizerman: coefficient conditions for an existence of four-period cycle in a second-order discrete-time system*

T. E. Zvyagintseva

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Zvyagintseva T. E. On the problem of Aizerman: coefficient conditions for an existence of four-period cycle in a second-order discrete-time system. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 1, pp. 50–59. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.105 (In Russian)

In this paper, an automatic control discrete-time system of the second order is studied. Nonlinearity of this system satisfies the generalized Routh — Hurwitz conditions. Systems of this type are widely used in solving modern applied problems that arise in engineering, theory of motion control, mechanics, physics and robotics. In the recent papers published by W. Heath, J. Carrasco, and M. de la Sen, two examples of planar discrete-time systems with nonlinearity that lies in the Hurwitz angle are constructed. These examples demonstrate that discrete-time Aizerman and Kalman conjectures are false even for second-order systems. One of the systems constructed by the authors has a non-trivial periodic solution of period three, and the other one has a non-trivial periodic solution of period four. In this paper, we assume that the nonlinearity is two-periodic and lies in the Hurwitz angle, and we study the system for all possible values of the parameters. We explicitly indicate the conditions for the parameters under which it is possible to construct such a two-periodic nonlinearity that system is not globally asymptotically stable. Indicated nonlinearity can be constructed in more than one way. We provide a method for its construction. We prove that in a system with this nonlinearity a family of non-trivial periodic solutions of period four exists. Cycles are not isolated, any solution of the system with the initial data lying on some specified ray is periodic.

Keywords: second-order discrete-time system, Aizerman conjecture, absolute stability, periodic solution.

References

1. Lur'e A. I., Postnikov V. N., "On the theory of stability of control system", *Applied mathematics and mechanics* **8**(3), 246–248 (1944).

2. Aizerman M. A., "On a problem concerning the stability "in the large" of dynamical systems", *Uspekhi Mat. Nauk* **4**(4), 186–188 (1949). (In Russian)

3. Pliss V. A., "On the Aizerman's problem in the case of three simultaneous differential equations", *Dokl. Acad. Nauk USSR. Mathematics* **121**(3), 422–425 (1958). (In Russian)

4. Pliss V. A., *Some Problems of Theory of Motion Stability* (Leningr. Univ. Publ., Leningrad, 1958). (In Russian)

5. Kalman R. E., "Physical and mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems", *Transactions ASME* **79**(3), 553–566 (1957).

6. Leonov G. A., "On the Aizerman problem",*Avtomatika i Telemekhanika* **70**(7), 1120–1131 (2009).

7. Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Bragin V. O., "On problems of Aizerman and Kalman", *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics* **43**, issue 3, 148–162 (2010).

8. Liberzon M. R., "Essays on the absolute stability theory", *Avtomatika i Telemekhanika* **67**, 1610–1644 (2006).

9. Hu T., Lin Z., "A complete stability analysis of planar discrete-time linear systems under saturation", *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications* **48**(6), 710–725 (2001).

10. Gonzaga C. A., Jungers M., Daafouz J., "Stability analysis of discrete-time Lur'e systems", *Automatica* **48**(9), 2277–2283 (2012).

*The work is supported in part by Russian Foundation for Basic Research (grant N 19-01-00388).

11. Ahmad N. S., Heath W. P., Li G., "LMI-based stability criteria for discrete-time Lur'e systems with monotonic, sector- and slope-restricted nonlinearities", *IEEE Transactions on Automatic Control* **58**(2), 459–465 (2013).

12. Heath W. P., Carrasco J., M. de la Sen, "Second-order counterexample to the discrete-time Kalman conjecture", *Proceedings of the European Control Conference, ECC15, Linz, 2015*, 981–985 (2015).

13. Heath W. P., Carrasco J., M. de la Sen, "Second-order counterexamples to the discrete-time Kalman conjecture", *Automatica* **60**, issue C, 140–144 (2015).

14. Heath W. P., Carrasco J., "Global asymptotic stability for a class of discrete-time systems", *Proceedings of the European Control Conference, ECC15, Linz, 2015*, 969–974 (2015).

15. Park B. J., Park P., Kwon N. K., "An improved stability criterion for discrete-time Lur'e systems with sector- and slope-restrictions", *Automatica* **51**(1), 255–258 (2015).

Received: August 1, 2019
Revised: September 18, 2019
Accepted: September 19, 2019

Author's information:

Tatiana E. Zvyagintseva — zv_tatiana@mail.ru, t.zvyagintceva@spbu.ru