

## Об одном обобщении самоинъективных колец

*И. М. Зильберборд, С. В. Сотников*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** *Зильберборд И. М., Сотников С. В.* Об одном обобщении самоинъективных колец // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 1. С. 60–68. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.106>

Мы обобщаем понятие самоинъективного слева (справа) кольца, вводя в рассмотрение кольца, которые как левый (соответственно правый) модуль над собой являются прямой суммой инъективного модуля и полупростого модуля. Такие кольца мы называем полуинъективными слева (справа) и исследуем их свойства при помощи двустороннего пирсовского разложения данного кольца. В нашей работе получено описание полуинъективных слева нётеровых слева колец: доказано, что любое такое кольцо раскладывается в прямое произведение самоинъективного (слева и справа) кольца и нескольких факторколец (специального вида) колец верхнетреугольных матриц над телами. Из этого описания следует, что для полуинъективных слева колец верен аналог классического результата для самоинъективных колец: любое полуинъективное слева нётерово слева кольцо также полуинъективно справа и является двусторонне артиновым кольцом.

*Ключевые слова:* инъективный модуль, полупростой модуль, самоинъективное кольцо, пирсовское разложение.

**1. Введение.** Одним важным классом колец являются самоинъективные кольца. Напомним, что кольцо  $R$  называется самоинъективным слева (справа), если  $R$  — инъективный левый (правый)  $R$ -модуль. Этот класс колец хорошо изучен и включает в себя множество различных примеров, в частности, групповые алгебры конечных групп над полями (см. [1, примеры 4.12.1, 4.12.2]). Известно, что любое самоинъективное слева нётерово слева кольцо также самоинъективно справа и является двусторонне артиновым кольцом (см., например, [1, лемма 4.12.10, теорема 4.12.14\*]).

В данной работе производится попытка расширения этого класса в рамках класса нётеровых слева колец в духе открытой проблемы из книги А. А. Туганбаева [2, проблема 16.14]. Вводится понятие полуинъективного слева (или справа) кольца, обсуждаются его свойства, получено полное описание полуинъективных слева нётеровых слева колец. А именно, такое кольцо раскладывается в прямое произведение самоинъективного кольца и нескольких факторколец (специального вида) колец верхнетреугольных матриц над телами.

Наше описание позволяет установить, что любое полуинъективное слева нётерово слева кольцо также полуинъективно справа и является двусторонне артиновым кольцом.

В работе рассматриваются только ассоциативные кольца с 1. Если не оговорено противное, все модули — левые. Также мы рассматриваем произвольный левый модуль как правый модуль над своим кольцом эндоморфизмов.

**2. Определение полуинъективного кольца.** Назовем кольцо  $R$  *полуинъективным слева*, если  $R$  как левый модуль над собой можно представить в виде прямой суммы полупростого и инъективного модулей. Отметим, что если эти прямые слагаемые — двусторонние идеалы кольца  $R$ , то  $R$  представляется в виде прямого произведения полупростого кольца и самоинъективного слева кольца. Заметим, что в этом случае кольцо  $R$  самоинъективно слева.

Аналогично вводится понятие *полуинъективного справа* кольца.

Простейшим примером полуинъективного (слева) кольца, которое при этом не самоинъективно (слева), является кольцо верхнетреугольных матриц второго порядка с коэффициентами, принадлежащими некоторому телу  $T$ :

$$R = \begin{pmatrix} T & T \\ 0 & T \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Мы покажем далее в теореме 1, что кольцо  $R$  представляется в виде прямой суммы простого неинъективного и неразложимого инъективного левых  $R$ -модулей тогда и только тогда, когда оно изоморфно кольцу вида (1).

**3. Пирсовское разложение кольца.** Отметим, что описанный выше пример не случайно приводится в матричном виде, двустороннее пирсовское разложение помогает описать некоторые важные свойства таких колец.

Далее считаем, что рассматриваемое нами полуинъективное слева кольцо  $R$  не является самоинъективным слева. Пусть  $R$  как левый модуль над собой представляется в виде прямой суммы полупростого модуля  $M$  и инъективного модуля  $I$ . Зафиксируем какое-нибудь разложение модуля  $M = \bigoplus_{i=1}^k M_i$ , где все  $M_i$  — простые модули. Для определенности будем далее предполагать, что для любого  $i$  модуль  $M_i$  не инъективен. Тогда в силу теоремы Крулля — Шмидта в любом разложении  $M$  в прямую сумму простых модулей среди прямых слагаемых нет инъективных.

Обозначим через  $e_M, e_I$  ортогональные идемпотенты, соответствующие прямым слагаемым  $M$  и  $I$ ; тогда  $M = Re_M, I = Re_I$ .

Будем использовать эти обозначения на протяжении всей статьи.

Перейдем теперь к изучению свойств кольца  $R$ , исходя из соответствующего пирсовского разложения. Представим  $R$  в матричном виде:

$$R = \begin{pmatrix} e_M Re_M & e_M Re_I \\ e_I Re_M & e_I Re_I \end{pmatrix}.$$

Иначе говоря, кольцо  $R$  изоморфно кольцу матриц вида

$$\begin{pmatrix} \text{End}_R(M) & \text{Hom}_R(M, I) \\ \text{Hom}_R(I, M) & \text{End}_R(I) \end{pmatrix},$$

где, отметим, умножение гомоморфизмов записывается в порядке, обратном композиции:  $f \cdot g = g \circ f$ .

Учитывая, что у  $M$  нет ненулевых инъективных подмодулей, можно сразу отметить следующее свойство, упрощающее пирсовское разложение.

**Утверждение 1.**  $\text{Hom}_R(I, M) = 0$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $\varphi \in \text{Hom}_R(I, M) \setminus \{0\}$ . Тогда в силу полупростоты модуля  $M$   $\text{Im}(\varphi)$  — прямое слагаемое  $M$ , и потому  $\text{Im}(\varphi)$  проективен. Следовательно,  $\text{Im}(\varphi)$  — прямое слагаемое модуля  $I$ . Поэтому  $\text{Im}(\varphi)$  инъективен, и согласно нашим предположениям о модуле  $M$  имеем  $\varphi = 0$ .  $\square$

**Замечание 1.** Итак,  $R$  изоморфно кольцу матриц вида

$$\begin{pmatrix} \text{End}_R(M) & \text{Hom}_R(M, I) \\ 0 & \text{End}_R(I) \end{pmatrix},$$

где кольцо  $\text{End}_R(M) \simeq e_M R e_M$  классически полупросто в силу полупростоты модуля  $M$ .

**Замечание 2.** Наличие 0 на левой нижней позиции, как будет видно далее, заметно упрощает работу, если рассматривать  $R$  как кольцо формальных матриц. Например, не нужно задумываться над тем, как устроены гомоморфизмы, действующие на тензорном произведении бимодулей  $\text{Hom}_R(M, I) \otimes \text{Hom}_R(I, M) \rightarrow \text{End}_R(M)$  и  $\text{Hom}_R(I, M) \otimes \text{Hom}_R(M, I) \rightarrow \text{End}_R(I)$ , они будут нулевыми.

**4. Случай двух идемпотентов.** В данном параграфе рассматривается случай, когда модули  $M$  и  $I$  оказываются неразложимыми, в частности, модуль  $M$  прост. Целью этого параграфа является описание всех таких колец, не являющихся самоинъективными слева.

**Теорема 1.** Следующие условия равносильны для кольца  $R$ :

- (1)  $R$  как левый модуль над собой раскладывается в прямую сумму простого модуля  $M$  и неразложимого инъективного модуля  $I$ , причем  $M$  не инъективен;
- (2)  $R$  изоморфно кольцу матриц вида  $\begin{pmatrix} T & T \\ 0 & T \end{pmatrix}$  для некоторого тела  $T$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что выполнено условие (1). Определим  $T = \text{End}_R(M)$  и заметим, что согласно лемме Шура  $T$  — тело. Кроме того, так как  $e_I R e_M = 0$ , то  $T \simeq \text{End}_{e_M R e_M}(M)$ .

Рассмотрим теперь в чуть более общей ситуации  $\text{Hom}_R(M, I)$  как бимодуль.

**Утверждение 2.** Пусть  $R$  — произвольное кольцо,  $M$  — простой  $R$ -модуль,  $I$  — такой неразложимый инъективный  $R$ -модуль, что  $\text{Hom}_R(M, I) \neq \{0\}$ ,  $T = \text{End}_R(M)$ ,  $L = \text{End}_R(I)$ . Тогда  $\text{Hom}_R(M, I)$  прост как левый  $T$ -модуль и как правый  $L$ -модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как модуль  $M$  прост, то любой ненулевой гомоморфизм  $g \in \text{Hom}_R(M, I)$  является инъекцией, а его образ — простой модуль, изоморфный модулю  $M$ . Пусть  $g, g_0 \in \text{Hom}_R(M, I) \setminus \{0\}$ . В силу однородности модуля  $I$  получаем, что  $\text{Im}(g) \cap \text{Im}(g_0) \neq 0$  и, следовательно,  $\text{Im}(g) = \text{Im}(g_0)$ . Пусть  $M_1 = \text{Im}(g_0)$ ,  $\tau : M_1 \rightarrow I$  — соответствующее вложение подмодуля  $M_1$  в  $I$ .

Ясно, что  $g = \tau \circ \tilde{g}$ ,  $g_0 = \tau \circ \tilde{g}_0$ , где  $\tilde{g}, \tilde{g}_0 : M \rightarrow M_1$  — некоторые изоморфизмы. Следовательно, существует  $h \in T$  такой, что  $\tilde{g} = \tilde{g}_0 \circ h$ , и потому  $g = g_0 \circ h = h \cdot g_0$ .

Заметим также, что  $\tilde{g} = s \circ \tilde{g}_0$  для некоторого гомоморфизма  $s : M_1 \rightarrow M_1$ . В силу инъективности модуля  $I$  существует  $f \in L$  такой, что  $f \circ \tau = \tau \circ s$ . Остается заметить, что тогда  $g = \tau \circ s \circ \tilde{g}_0 = f \circ \tau \circ \tilde{g}_0 = f \circ g_0$ , иначе говоря,  $g = g_0 \cdot f$ .  $\square$

**Следствие 1.** В условиях утверждения 2 левые  $T$ -модули  $\text{Hom}_R(M, I)$  и  $T$  изоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из того, что  $T$  — тело. □

Вернемся к доказательству теоремы и перейдем к исследованию кольца  $\text{End}_R(I)$ . Обозначим  $S = \text{Hom}_R(M, I)$ ,  $L = \text{End}_R(I)$ , и представим кольцо  $R$  в следующем виде:

$$R = \begin{pmatrix} T & S \\ 0 & L \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим некоторый левый  $R$ -модуль  $X$ . Запишем его также в матричном виде:

$$X = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

Здесь  $B$  — левый  $L$ -модуль,  $A$  — левый  $T$ -модуль, причем задано отображение  $\tilde{f} : S \otimes_L B \rightarrow A$ , определяющее умножение элементов  $S$  на элементы  $B$ .

Учитывая сопряженность функторов  $\text{Hom}$  и  $\otimes$ , можно считать, что это умножение задано при помощи отображения  $f : B \rightarrow \text{Hom}_R(e_M \text{Re}_I, A) = \text{Hom}_{e_M \text{Re}_M}(e_M \text{Re}_I, A)$ . Заметим, что  $f$  является гомоморфизмом левых  $L$ -модулей.

Переформулируем для нужного нам случая критерий инъективности для модуля над кольцом «формальных» матриц (см. [3, следствие 5.5.2]).

**Критерий.** Левый модуль  $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$  над кольцом  $\begin{pmatrix} T & S \\ 0 & L \end{pmatrix}$  инъективен тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- 1)  $A$  — инъективный  $T$ -модуль,
- 2)  $\text{Ann}(S) = \{b \in B \mid Sb = 0\}$  — инъективный  $L$ -модуль,
- 3)  $f : B \rightarrow \text{Hom}_T(S, A)$  — эпиморфизм.

Применим этот критерий к модулю  $I = \text{Re}_I$ , тогда  $A = S$  и  $B = L$ . Непосредственно проверяется, что соответствующий эпиморфизм  $f : L \rightarrow \text{End}_T(S) = \text{End}_R(S)$  является гомоморфизмом колец. Заметим также, что  $\text{Ker}(f) = \text{Ann}(S)$ .

Докажем, что  $f$  — изоморфизм. Действительно, модуль  $I = \begin{pmatrix} S \\ L \end{pmatrix}$  содержит два подмодуля  $\begin{pmatrix} 0 \\ \text{Ann}(S) \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} S \\ 0 \end{pmatrix}$  с нулевым пересечением. В силу однородности модуля  $I$  один из этих подмодулей нулевой. Но в случае  $S = 0$  модуль  $M$  был бы инъективным  $R$ -модулем, что противоречит условию. Следовательно,  $\text{Ann}(S) = 0$ .

Итак, мы получили, что кольца  $L$  и  $\text{End}_T(S)$  изоморфны. Согласно следствию 1 левые  $T$ -модули  $S$  и  $T$  изоморфны, и потому кольцо  $L \simeq \text{End}_T(T) \simeq T$ .

Используя полученные изоморфизмы, можем предполагать, что  $R$  — кольцо матриц вида

$$\begin{pmatrix} T & S \\ 0 & T \end{pmatrix},$$

где  $S$  —  $(T, T)$ -бимодуль, причем как левый  $T$ -модуль  $S = T$ , а как правый  $T$ -модуль  $S$  изоморфен  $T$  и, в частности, прост.

Пусть  $t \star t_1$  — соответствующее произведение элемента  $t \in S$  на  $t_1 \in T$ . Так как  $S$  — бимодуль, а  $\text{End}_T(T) \simeq T$ , отображение  $\Phi : T \rightarrow T$  такое, что  $\Phi(t_1) = 1 \star t_1$ ,

является мономорфизмом колец. Запишем  $t \star t_1 = (t \cdot 1) \star t_1 = t \cdot (1 \star t_1) = t \cdot \Phi(t_1)$ . Поскольку  $S_T$  порождается любым своим элементом (и, в частности, 1),  $\Phi$  — изоморфизм.

Но тогда остается заметить, что отображение  $\bar{\Phi} : \begin{pmatrix} T & T \\ 0 & T \end{pmatrix} \rightarrow R$ , сопоставляющее матрице  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$  матрицу  $\begin{pmatrix} \Phi(a) & \Phi(b) \\ 0 & c \end{pmatrix}$ , является изоморфизмом колец.

Теперь покажем, что верна обратная импликация. Пусть  $R = \begin{pmatrix} T & T \\ 0 & T \end{pmatrix}$ . Ясно, что  $\text{Ann}(T) = \{0\}$ , а любой ненулевой гомоморфизм левых  $T$ -модулей  $f : T \rightarrow \text{End}_T(T)$  сюръективен. Следовательно, выполнены условия критерия.  $\square$

**Следствие 2.** *Если кольцо  $R$  полуинъективно слева (но не самоинъективно слева), и его разложение из определения полуинъективного кольца содержит лишь два неразложимых слагаемых, то  $R$  полуинъективно справа и двусторонне артиново.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следует из явного описания в теореме 1.  $\square$

**5. Нётеровы слева полуинъективные слева кольца.** В данном параграфе будем дополнительно предполагать, что кольцо  $R$  нётерово слева. Тогда любой инъективный левый  $R$ -модуль (и, в частности, рассматриваемый нами левый идеал  $I$ ) раскладывается в прямую сумму неразложимых слагаемых (см., например, [4, теорема 25.6]). Это главное из того, что нам дает условие нётеровости  $R$  слева.

**Замечание 3.** Поскольку кольца эндоморфизмов неразложимых инъективных модулей локальны [4, лемма 25.4], а кольца эндоморфизмов простых модулей являются телами в силу леммы Шура, то по теореме Крулля — Шмидта — Ремака — Адзумаи [4, теорема 12.6] разложение любого модуля в прямую сумму модулей таких видов единственно с точностью до перестановки изоморфных слагаемых.

Так как кольцо  $R$  Морита эквивалентно своему базисному кольцу, мы можем предполагать, что само кольцо  $R$  раскладывается в прямую сумму неразложимых слагаемых, среди которых нет попарно изоморфных. Таким образом,

$$R = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_k \oplus I_1 \oplus I_2 \oplus \dots \oplus I_l,$$

где все модули  $M_i$  — простые, но не инъективные, все модули  $I_j$  — неразложимые инъективные, причем  $M_i \not\cong M_j$  при  $i \neq j$ ,  $I_m \neq I_n$  при  $m \neq n$ .

**Замечание 4.** Рассмотрим теперь соответствующее пирсовское разложение кольца  $R$ :

$$\begin{pmatrix} \text{End}(M_1) & \text{Hom}(M_1, M_2) & \dots & \text{Hom}(M_1, M_k) & \text{Hom}(M_1, I_1) & \dots & \text{Hom}(M_1, I_l) \\ \text{Hom}(M_2, M_1) & \text{End}(M_2) & \dots & \text{Hom}(M_2, M_k) & \text{Hom}(M_2, I_1) & \dots & \text{Hom}(M_2, I_l) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{Hom}(M_k, M_1) & \text{Hom}(M_k, M_2) & \dots & \text{End}(M_k) & \text{Hom}(M_k, I_1) & \dots & \text{Hom}(M_k, I_l) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \text{End}(I_1) & \dots & \text{Hom}(I_1, I_l) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \text{Hom}(I_l, I_1) & \dots & \text{End}(I_l) \end{pmatrix}$$

(все гомоморфизмы — левых  $R$ -модулей).

Итак, мы можем фиксировать полный ортогональный набор неразложимых идемпотентов  $e_{M_1}, e_{M_2}, \dots, e_{M_k}, e_{I_1}, e_{I_2}, \dots, e_{I_l}$  такой, что  $Re_{M_s} = M_s$ ,  $Re_{I_j} = I_j$ , сразу предполагая, что для любых идемпотентов  $e, f$  из этого набора  $eRf = \text{Hom}_R(A, B)$ , где  $e$  соответствует модулю  $A$ ,  $f$  — модулю  $B$ . Кроме того, для определенных ранее идемпотентов  $e_M, e_I$  имеем  $e_M = e_{M_1} + e_{M_2} + \dots + e_{M_k}$ ,  $e_I = e_{I_1} + e_{I_2} + \dots + e_{I_l}$ ,  $M = Re_M$ ,  $I = Re_I$ ,  $S = e_M Re_I$ . Обозначим также кольцо  $L = e_I Re_I$ , и напомним обозначение  $T = e_M Re_M$ .

**Утверждение 3.** *Отображение, сопоставляющее  $M_i$  такой модуль  $I_j$ , что  $\text{Hom}_R(M_i, I_j) \neq 0$ , корректно определено и является инъекцией.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Сначала отметим, что если для некоторого  $i$  и любого  $j$   $\text{Hom}_R(M_i, I_j) = 0$ , то кольцо  $R$  раскладывается в прямое произведение колец, и модуль  $M_i$  инъективен вопреки нашим предположениям. Если же  $\text{Hom}_R(M_i, I_j) \neq 0$ , то ясно, что  $I_j$  является инъективной оболочкой  $M_i$ . Так как инъективная оболочка модуля единственна с точностью до изоморфизма, получаем, что данное отображение корректно определено. Кроме того,  $\text{Im}(M_i)$  — единственный простой подмодуль в  $I_j$  (см. доказательство утверждения 2), поэтому это отображение — инъекция.  $\square$

**Замечание 5.** Ясно, что образ данного отображения равен  $\{I_j | Se_{I_j} \neq 0\}$ .

Упростим матрицу из замечания 4 уже известными методами теоремы 1.

**Теорема 2.** *Пусть  $R$  — нётерово слева полуинъективное слева не самоинъективное слева кольцо. Тогда  $R$  Морита эквивалентно кольцу матриц вида*

$$\begin{pmatrix} T_1 & 0 & \dots & 0 & S_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & T_k & 0 & \dots & S_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & L_1 & \dots & 0 & L_{1,k+1} & \dots & L_{1,l} \\ \vdots & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & L_k & L_{k,k+1} & \dots & L_{k,l} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & L_{k+1,k+1} & \dots & L_{k+1,l} \\ \vdots & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & L_{l,k+1} & \dots & L_{l,l} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где  $T_1, \dots, T_k$  — тела,  $S_j \simeq T_j$  как левый  $T_j$ -модуль и  $S_j \cdot L_{j,i} = 0$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим сначала первые  $k$  строк матрицы, полученной при помощи пирсовского разложения кольца  $R$ . Так как в наших предположениях различные простые прямые слагаемые не изоморфны между собой, имеем  $\text{Hom}_R(M_i, M_j) = 0$  для  $i \neq j$ . Используя утверждение 3, перенумеруем при необходимости модули  $I_1, \dots, I_l$  (и соответствующие им идемпотенты) так, чтобы  $\text{Hom}_R(M_j, I_j) \neq 0$ . Теперь для любого  $j > k$  имеем  $Se_{I_j} = 0$ , а для любого  $j \leq k$  получаем, что  $Se_{I_j} = e_{M_j} Se_{I_j} \neq 0$ . Кроме того, в силу следствия 1  $S_j = \text{Hom}_R(M_j, I_j)$  изоморфен  $T_j = \text{End}_R(M_j)$  как левый модуль над телом  $T_j$ .

Изучим теперь правый аннулятор  $\text{Ann}(S)$  бимодуля  $S$ . Пусть  $j \leq k$ ,  $M'$  — образ некоторого мономорфизма  $M_j \rightarrow I_j$ , и  $t \in Re_{I_j} \setminus \{0\}$ . Заметим, что  $Rt$  — ненулевой подмодуль однородного модуля  $I_j$ , а  $M'$  — простой подмодуль  $I_j$ , поэтому  $M' \subset Rt$ . Поскольку  $M_j = Re_{M_j}$ , имеем  $e_{M_j} Rt \neq 0$  и, следовательно,  $St \neq 0$ .

Если, в частности,  $t \in e_{I_i} Re_{I_j} \setminus \{0\}$ , причем  $i \neq k$ , то  $e_{M_j} Rt \subset (e_{M_j} Re_{I_i}) Re_{M_j} = 0$ . В силу предыдущего рассуждения в этом случае имеем  $e_{I_i} Re_{I_j} = 0$ . Поэтому столбец с номером  $k + j$  действительно имеет указанный в условии вид.

Кроме того, если  $x \in \text{Ann}(S)$ , то ясно, что для  $j \leq k$   $x e_{I_j} = 0$ . Таким образом,  $\text{Ann}(S) = \bigoplus_{k+1}^l Re_{I_j} = \bigoplus_{k+1}^l Le_{I_j}$ . □

**Теорема 3.** Пусть  $R$  — неразложимое нётерово слева полуинъективное слева самобазисное кольцо. Тогда  $R$  либо самоинъективно, либо изоморфно факторкольцу кольца верхнетреугольных матриц некоторого порядка над некоторым телом  $K$  по идеалу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & K & K & K \dots K \\ 0 & 0 & 0 & K & K \dots K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K \dots K \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 \end{pmatrix}.$$

**Доказательство.** Будем использовать обозначения и результаты из предыдущей теоремы. Докажем сначала, что можно считать, что в матрице (2)  $S_i = L_i = T_i$  для любого  $i \leq k$ . Перенумеруем идемпотенты в нашем наборе (переставив  $e_{I_i}$  на второе место) так, чтобы кольцо  $R$  имело вид  $\begin{pmatrix} T'_i & S'_i \\ 0 & L'_i \end{pmatrix}$ , где  $T'_i = \begin{pmatrix} T_i & S_i \\ 0 & L_i \end{pmatrix}$ . Применив критерий к  $R$ -модулю  $I_i$ , получим, что левый  $T'_i$ -модуль  $\begin{pmatrix} S_i \\ L_i \end{pmatrix}$  инъективен.

Кроме того, ясно, что  $\begin{pmatrix} T_i \\ 0 \end{pmatrix}$  прост как левый  $T'_i$ -модуль, а  $S_i \neq 0$ . Поэтому кольцо  $T'_i$  удовлетворяет предположениям теоремы 1, и в силу этой теоремы кольца  $T'_i$  и  $\begin{pmatrix} T_i & T_i \\ 0 & T_i \end{pmatrix}$  изоморфны.

Итак, матрица (2) после соответствующей перестановки строк и столбцов приобрела следующий вид:

$$\begin{pmatrix} T_1 & T_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \dots 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \dots 0 & L_{1,k+1} & \dots & L_{1,l} \\ 0 & 0 & T_2 & \dots & 0 & T_2 \dots 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & T_k & 0 \dots T_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & T_2 \dots 0 & L_{2,k+1} & \dots & L_{2,l} \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \dots 0 & L_{l,k+1} & \dots & L_{l,l} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Докажем теперь теорему индукцией по числу идемпотентов в данном полном наборе в  $R$ . Можем сразу предположить, что  $R$  не самоинъективно. База индукции была рассмотрена в теореме 1.

Запишем матрицу (3) в виде  $\begin{pmatrix} T_1 & S'' \\ 0 & L'' \end{pmatrix}$ , где  $S'' = (T_1 \ 0 \ \dots \ 0)$ . Будем считать идемпотенты  $e_{M_i}$  (где  $i > 1$ ) и  $e_{I_j}$  элементами кольца  $L''$ . Ясно, что среди

$L''$ -модулей  $L''e_{M_i}$  ( $i > 1$ ),  $L''e_{I_j}$  нет изоморфных. Заметим также, что все модули  $L''e_{M_i}$  просты.

Применив критерий к  $R$ -модулю  $I_j$ , мы получим, что  $\text{Ann}(S'') = L''e_{I_j}$  инъективен как  $L''$ -модуль. Поэтому кольцо  $L''$  полуинъективно слева, кроме того, оно нётерово слева и самобазисно.

Разложим кольцо  $L''$  в прямое произведение неразложимых колец и рассмотрим прямой множитель  $F$ , которому принадлежит простой модуль  $U = L''e_{I_1}$ . Легко видеть, что кольцо  $F$  полуинъективно слева. Если  $F$  самоинъективно, то  $U$  инъективен как  $F$ -модуль, и тогда  $L_{1,m} = 0$  для всех  $m$ . Следовательно, в этом случае  $F = T_1$  и  $R = \begin{pmatrix} T_1 & T_1 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$ . В противном случае в силу индукционного предположения для некоторого  $n$  кольцо  $F$  изоморфно факторкольцу кольца верхнетреугольных матриц порядка  $n$  над некоторым телом  $K$  по указанному в условии идеалу. Остается заметить, что тогда  $K = \text{End}_F(U) \simeq T_1$ , и  $R$  изоморфно факторкольцу кольца верхнетреугольных матриц порядка  $n + 1$  над телом  $T_1$  по соответствующему идеалу.  $\square$

**Замечание 6.** Указанные в условии теоремы 3 факторкольца колец верхнетреугольных матриц полуинъективны слева и справа. Это легко проверяется при помощи критерия и индукции по порядку матриц. Кроме того, эти факторкольца двусторонне артиновы (и, следовательно, нётеровы), а также самобазисны и неразложимы.

**Следствие 3.** Любое полуинъективное слева нётерово слева кольцо полуинъективно справа и двусторонне артиново.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Следует из полученного в теореме 3 описания таких колец, замечания 6 и аналогичного результата для самоинъективных колец.  $\square$

**Следствие 4.** Полуинъективное слева нётерово слева кольцо является прямым произведением самоинъективного кольца и полуцепного артинового кольца.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Ясно, что кольцо верхнетреугольных матриц над телом и, следовательно, любое его факторкольцо — полуцепное. Поэтому данный результат непосредственно следует из теоремы 3 и замечания 6.  $\square$

## Литература

1. Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V. V. Algebras, rings and modules. Vol. 2. In: Mathematics and Its Applications. Springer, 2007.
2. Туганбаев А. А. Теория колец. Арифметические модули и кольца. МЦНМО, 2009.
3. Крылов П. А., Туганбаев А. А. Модули над кольцами формальных матриц // *Фундаментальная и прикладная математика*. 2009. Т. 15. Вып. 8. С. 145–211.
4. Anderson F., Fuller K. Rings and categories of modules. Springer-Verlag, 1992.

Статья поступила в редакцию 5 августа 2019 г.;  
после доработки 17 сентября 2019 г.;  
рекомендована в печать 19 сентября 2019 г.

Контактная информация:

Зильберборд Игорь Михайлович — канд. физ.-мат. наук, доц.; i.zilberbord@mail.spbu.ru  
Сотников Сергей Васильевич — студент; st040116@student.spbu.ru

# On a generalization of self-injective rings

I. M. Zilberbord, S. V. Sotnikov

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

**For citation:** Zilberbord I. M., Sotnikov S. V. On a generalization of self-injective rings. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 1, pp. 60–68. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.106> (In Russian)

In this work the notion of left (right) self-injective ring is generalized. We consider rings that are direct sum of injective module and semisimple module as a left (respectively, right) module above itself. We call such rings left (right) semi-injective and research their properties with the help of two-sided Peirce decomposition of the ring. The paper contains the description of left Noetherian left semi-injective rings. It is proved that any such ring is a direct product of (two-sided) self-injective ring and several quotient rings (of special kind) of rings of upper-triangular matrices over skew fields. From this description it follows that for left semi-injective rings we have the analogue of the classical result for self-injective rings. Namely, if a ring is left Noetherian and left semi-injective then this ring is also right semi-injective and two-sided Artinian.

*Keywords:* injective module, semisimple module, self-injective ring, Peirce decomposition.

## References

1. Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V. V., *Algebras, rings and modules 2*, in: *Mathematics and Its Applications* (Springer, 2007).
2. Tuganbaev A. A., *Theory of rings. Arithmetical modules and rings* (MCNMO Publ., 2009). (In Russian)
3. Krylov P. A., Tuganbaev A. A., “Modules over formal matrix rings”, *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* **15**(8), 145–211 (2009). (In Russian)
4. Anderson F., Fuller K., *Rings and categories of modules* (Springer-Verlag, 1992).

Received: August 5, 2019  
Revised: September 17, 2019  
Accepted: September 19, 2019

## Authors' information:

Igor M. Zilberbord — [i.zilberbord@mail.spbu.ru](mailto:i.zilberbord@mail.spbu.ru)  
Sergei V. Sotnikov — [st040116@student.spbu.ru](mailto:st040116@student.spbu.ru)