

Применение специальной формы дифференциальных уравнений для исследования движений нагруженной платформы Стюарта*

С. А. Зегжда, В. И. Петрова, М. П. Юшков

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: Зегжда С. А., Петрова В. И., Юшков М. П. Применение специальной формы дифференциальных уравнений для исследования движений нагруженной платформы Стюарта // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 1. С. 128–140. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.113>

В работе изучаются движения нагруженной платформы Стюарта. Для составления уравнений движения используется специальная форма дифференциальных уравнений (выводятся уравнения движения в избыточных координатах). В этой форме составляются векторные уравнения Лагранжа первого рода, использующие дифференцирование по радиус-вектору центра масс системы и ортам главных центральных осей инерции движущегося тела и по их производным. Эти векторы определяют положение твердого тела в пространстве. В качестве абстрактных голономных связей, налагаемых на векторы, описывающие движение твердого тела, учитываются неизменность длин ортов и их ортогональность. Обсуждается один технический эффект, проявляющийся в поведении платформы Стюарта, находящейся в положении равновесия («паразитные колебания»), который является одной из причин ухода системы из положения неустойчивого равновесия. Аналогично неустойчивым будет и такое стандартное движение платформы Стюарта, как вертикальные колебания платформы. Выясняется простейший механизм возникновения неустойчивости таких вертикальных движений платформы. Для получения устойчивого движения предлагается вводить классические обратные связи. Численные решения выведенных дифференциальных уравнений полностью соответствуют численным результатам, полученным при решении уравнений движения, составленных при использовании теорем о движении центра масс и об изменении кинетического момента при движении системы относительно центра масс.

Ключевые слова: платформа Стюарта, динамический имитационный стенд, специальная форма уравнений движения, обратные связи.

1. Введение. Платформа Стюарта [1] получила широкое распространение в самых различных областях техники — машиностроении, станкостроении, при создании радиотелескопов, роботов-манипуляторов и т. п. Ее активно используют и при динамических испытаниях различной техники, в том числе и космической. Успешно применяют ее и в медицине, но можно подчеркнуть особую роль платформы Стюарта при создании динамических имитационных стендов, для которых она оказывается неотъемлемой частью. В таких стендах на платформу крепится, например, кабина самолета, окна которой закрываются дисплеями. На них отражается картина полета из окон аэроплана, а движение платформы стенда осуществляется летчиком с

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 19.01.00208-а).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2020

помощью изменения им длин стержней, поддерживающих конструкцию. Это позволяет создать у пилота полную иллюзию полета, что требуется для его тренировок в конкретных условиях движения, например, при посадке на определенную полосу указанного аэродрома. Это особо важно для отработки действий летчика в условиях аварийных ситуаций.

Изучение поведения нагруженной платформы Стюарта встречает определенные трудности, обусловленные, в первую очередь, с одной стороны, нелинейностью задачи, а с другой стороны, тем, что платформа несет в себе признаки перевернутого маятника. Именно последнее обстоятельство играет ключевую роль в известной всем неустойчивости положений равновесия платформы и ее движений. Для получения устойчивой работы приходится вводить в систему обратные связи.

Теории движения нагруженной платформы Стюарта (гексапода) посвящена весьма обширная литература. Из этих работ можно упомянуть статьи [2–4], изучающие кинематику гексапода, и работы [5–14], рассматривающие динамику и управление системой, причем в большинстве последних работ активно обсуждается построение и использование обратных связей. В этом отношении представляют интерес статьи [15, 16], предлагающие новый способ построения обратных связей, обеспечивающих устойчивость положения равновесия платформы. Большое значение имеют работы [5, 6, 17], разрабатывающие методы отыскания области достижимости платформы Стюарта.

При исследовании движения гексапода обычно пользуются либо формализмом Ньютона — Эйлера (см., напр., [8, 18]), либо формализмом Лагранжа (см., напр., [4, 9, 16]). В этом отношении для изучения движений нагруженной платформы Стюарта может быть интересной и новая форма дифференциальных уравнений, называемая специальной формой [19]. Этому вопросу и посвящена настоящая работа.

2. Специальная форма уравнений движения твердого тела. Согласно статье [19] будем характеризовать положение твердого тела в пространстве радиус-вектором его центра масс и ортами связанной системы координат $Sxyz$, направленными по главным центральным осям инерции тела:

$$\boldsymbol{\rho}, \quad \mathbf{i}, \quad \mathbf{j}, \quad \mathbf{k}. \quad (1.1)$$

При движении твердого тела на его «координаты» (1.1) наложены голономные связи

$$\begin{aligned} f^1 = \mathbf{i}^2 - 1 = 0, \quad f^2 = \mathbf{j}^2 - 1 = 0, \quad f^3 = \mathbf{k}^2 - 1 = 0, \\ f^4 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0, \quad f^5 = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad f^6 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

поэтому в работе [19] предлагается движение тела описывать векторными уравнениями Лагранжа первого рода:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{\rho}}} - \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\rho}} &= \mathbf{Q}_{\boldsymbol{\rho}}, \quad \varkappa = \overline{1, 6}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{i}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{i}} &= \mathbf{Q}_{\mathbf{i}} + \Lambda_{\varkappa} \frac{\partial f^{\varkappa}}{\partial \mathbf{i}} \equiv \mathbf{Q}_{\mathbf{i}} + 2\Lambda_1 \mathbf{i} + \Lambda_4 \mathbf{j} + \Lambda_6 \mathbf{k}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{j}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{j}} &= \mathbf{Q}_{\mathbf{j}} + \Lambda_{\varkappa} \frac{\partial f^{\varkappa}}{\partial \mathbf{j}} \equiv \mathbf{Q}_{\mathbf{j}} + 2\Lambda_2 \mathbf{j} + \Lambda_5 \mathbf{k} + \Lambda_4 \mathbf{i}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{k}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{k}} &= \mathbf{Q}_{\mathbf{k}} + \Lambda_{\varkappa} \frac{\partial f^{\varkappa}}{\partial \mathbf{k}} \equiv \mathbf{Q}_{\mathbf{k}} + 2\Lambda_3 \mathbf{k} + \Lambda_6 \mathbf{i} + \Lambda_5 \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь принято обозначение

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} = \frac{\partial}{\partial a_x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial a_y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial a_z} \mathbf{k},$$

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k};$$

$\Lambda_{\varkappa}, \varkappa = \overline{1, 6}$, являются множителями Лагранжа; кинетическая энергия равна (M — масса тела)

$$T = \frac{M\dot{\boldsymbol{\rho}}^2}{2} + \frac{I_x \dot{\mathbf{i}}^2}{2} + \frac{I_y \dot{\mathbf{j}}^2}{2} + \frac{I_z \dot{\mathbf{k}}^2}{2},$$

$$\text{где } I_x = \int_{\tau} x^2 \mu d\tau, \quad I_y = \int_{\tau} y^2 \mu d\tau, \quad I_z = \int_{\tau} z^2 \mu d\tau;$$

векторные обобщенные силы вычисляются по формулам

$$\mathbf{Q}_{\boldsymbol{\rho}} = \sum_{\nu} \mathbf{F}_{\nu}, \quad \mathbf{Q}_{\mathbf{i}} = \sum_{\nu} x_{\nu} \mathbf{F}_{\nu},$$

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{j}} = \sum_{\nu} y_{\nu} \mathbf{F}_{\nu}, \quad \mathbf{Q}_{\mathbf{k}} = \sum_{\nu} z_{\nu} \mathbf{F}_{\nu},$$

где через \mathbf{F}_{ν} обозначены силы, приложенные к телу в точках $N_{\nu} = (x_{\nu}, y_{\nu}, z_{\nu})$ (подробнее см. в монографии [20]).

Используя уравнения связей (1.2), исключим обычным образом из уравнений (1.3) множители Лагранжа. Тогда получим

$$M\ddot{\boldsymbol{\rho}} = \sum_{\nu} \mathbf{F}_{\nu}, \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{i}} &= -\dot{\mathbf{i}}^2 \mathbf{i} - \frac{2I_y}{I_x + I_y} (\dot{\mathbf{i}} \cdot \dot{\mathbf{j}}) \mathbf{j} - \frac{2I_z}{I_z + I_x} (\dot{\mathbf{k}} \cdot \dot{\mathbf{i}}) \mathbf{k} + \frac{L_z}{I_x + I_y} \mathbf{j} - \frac{L_y}{I_z + I_x} \mathbf{k}, \\ \ddot{\mathbf{j}} &= -\dot{\mathbf{j}}^2 \mathbf{j} - \frac{2I_z}{I_y + I_z} (\dot{\mathbf{j}} \cdot \dot{\mathbf{k}}) \mathbf{k} - \frac{2I_x}{I_x + I_y} (\dot{\mathbf{i}} \cdot \dot{\mathbf{j}}) \mathbf{i} + \frac{L_x}{I_y + I_z} \mathbf{k} - \frac{L_z}{I_x + I_y} \mathbf{i}, \\ \ddot{\mathbf{k}} &= -\dot{\mathbf{k}}^2 \mathbf{k} - \frac{2I_x}{I_z + I_x} (\dot{\mathbf{k}} \cdot \dot{\mathbf{i}}) \mathbf{i} - \frac{2I_y}{I_y + I_z} (\dot{\mathbf{j}} \cdot \dot{\mathbf{k}}) \mathbf{j} + \frac{L_y}{I_z + I_x} \mathbf{i} - \frac{L_x}{I_y + I_z} \mathbf{j}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

где L_x, L_y, L_z являются проекциями главного момента активных сил относительно центра масс

$$\mathbf{L} = \sum_{\nu} (x_{\nu} \mathbf{i} + y_{\nu} \mathbf{j} + z_{\nu} \mathbf{k}) \times \mathbf{F}_{\nu}. \tag{1.6}$$

Уравнения (1.4), (1.5) и называются специальной формой уравнений динамики твердого тела [19]. Они называются также уравнениями движения твердого тела в избыточных координатах, так как определяемые ими 12 проекций «векторных координат» (1.1) вдвое больше числа степеней свободы твердого тела. Отметим, что уравнение (1.4) соответствует движению центра масс, а три уравнения (1.5), как увидим ниже, соответствуют вращению твердого тела относительно него [20].

При использовании системы дифференциальных уравнений (1.4), (1.5) для исследования поведения нагруженной платформы Стюарта приходится решать как прямую, так и обратную задачи динамики.

3. Решение прямой задачи динамики. Для определенности будем считать, что платформа динамического стенда приводится в движение гидроцилиндрами. Найдем усилия в штоках гидроцилиндров (\mathbf{F}_ν , $\nu = \overline{1,6}$) по заданному закону движения платформы (решим прямую задачу динамики). Силами инерции вращательного движения гидроцилиндров и моментами сил трения в их шаровых шарнирах можно пренебречь, поэтому можно считать, что силы \mathbf{F}_ν , $\nu = \overline{1,6}$, действуют по направлениям векторов \mathbf{l}_ν , $\nu = \overline{1,6}$, определяющих верхние концы штоков A_ν , $\nu = \overline{1,6}$ (математическую модель нагруженной платформы Стюарта см. на рис. 1). Силы \mathbf{F}_ν , $\nu = \overline{1,6}$, можно, таким образом, представить в виде

$$\mathbf{F}_\nu = \frac{u_\nu \mathbf{l}_\nu}{l_\nu} \equiv U_\nu \mathbf{l}_\nu, \quad l_\nu = |\mathbf{l}_\nu|, \quad \nu = \overline{1,6}. \quad (2.1)$$

Здесь u_ν , $\nu = \overline{1,6}$, — искомые управляющие параметры, обеспечивающие необходимое движение платформы.

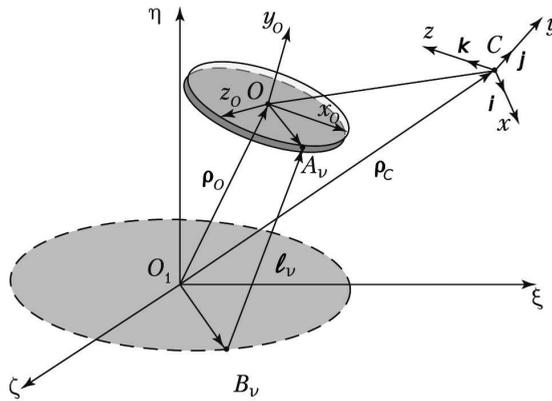


Рис. 1. Математическая модель нагруженной платформы Стюарта.

Уравнение (1.4) для нагруженной платформы стенда можно переписать в виде

$$\mathbf{F} \equiv \sum_{\nu=1}^6 \mathbf{F}_\nu = M\dot{\boldsymbol{\rho}} - M\mathbf{g}. \quad (2.2)$$

Вектор-функция $\boldsymbol{\rho}(t)$ позволяет, таким образом, определить, как изменяется во времени главный вектор \mathbf{F} системы сил \mathbf{F}_ν , $\nu = \overline{1,6}$. Действительно, векторное уравнение (2.2) в скалярной форме переписывается следующим образом:

$$\begin{cases} F_x(t) = M(\ddot{\boldsymbol{\rho}} - \mathbf{g}) \cdot \mathbf{i}(t) = \\ = M[\ddot{\xi}(t)\beta_{11}(t) + \ddot{\eta}(t)\beta_{12}(t) + \ddot{\zeta}(t)\beta_{13}(t) - g\beta_{13}(t)], \\ F_y(t) = M[\ddot{\xi}(t)\beta_{21}(t) + \ddot{\eta}(t)\beta_{22}(t) + \ddot{\zeta}(t)\beta_{23}(t) - g\beta_{23}(t)], \\ F_z(t) = M[\ddot{\xi}(t)\beta_{31}(t) + \ddot{\eta}(t)\beta_{32}(t) + \ddot{\zeta}(t)\beta_{33}(t) - g\beta_{33}(t)]. \end{cases} \quad (2.3)$$

Появившиеся здесь косинусы направляющих углов $\beta_{\sigma\tau}(t)$, $\sigma, \tau = \overline{1,3}$, ортов связанной системы координат при заданном движении платформы являются известными функциями времени (см. [21]).

Рассмотрим теперь систему (1.5). Выпишем проекцию второго уравнения на ось Cz связанной системы координат, затем проекцию третьего уравнения на ось Cx , а первого — на ось Cy :

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{k} &= -\frac{2I_z}{I_y + I_z}(\dot{\mathbf{j}} \cdot \dot{\mathbf{k}}) + \frac{L_x}{I_y + I_z}, \\ \ddot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{i} &= -\frac{2I_x}{I_z + I_x}(\dot{\mathbf{k}} \cdot \dot{\mathbf{i}}) + \frac{L_y}{I_z + I_x}, \\ \ddot{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{j} &= -\frac{2I_y}{I_x + I_y}(\dot{\mathbf{i}} \cdot \dot{\mathbf{j}}) + \frac{L_z}{I_x + I_y}.\end{aligned}\quad (2.4)$$

Легко проверить, что эти три скалярных уравнения эквивалентны динамическим уравнениям Эйлера. Уравнения (2.4) выражают, таким образом, теорему моментов относительно центра масс. В то же время для нас в случае решения прямой задачи динамики важно, что при заданном движении платформы из них может быть определен момент сил относительно центра масс $\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z)$.

Обратим теперь внимание на то, что согласно формуле (2.1) и определению главного момента сил штоков (1.6) имеем

$$F_x(t) = \sum_{\nu=1}^6 U_\nu \ell_{\nu x}, \quad F_y(t) = \sum_{\nu=1}^6 U_\nu \ell_{\nu y}, \quad F_z(t) = \sum_{\nu=1}^6 U_\nu \ell_{\nu z}, \quad (2.5)$$

$$\left. \begin{aligned}L_x &= \sum_{\nu=1}^6 U_\nu (y_\nu \ell_{\nu z} - z_\nu \ell_{\nu y}), \\ L_y &= \sum_{\nu=1}^6 U_\nu (z_\nu \ell_{\nu x} - x_\nu \ell_{\nu z}), \\ L_z &= \sum_{\nu=1}^6 U_\nu (x_\nu \ell_{\nu y} - y_\nu \ell_{\nu x}),\end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

при этом проекции вектора ℓ_ν запишутся в виде

$$\left\{ \begin{aligned}\ell_{\nu x} &= \xi(t)\beta_{11}(t) + \eta(t)\beta_{12}(t) + \zeta(t)\beta_{13}(t) + x_\nu - \xi_\nu\beta_{11}(t) - \zeta_\nu\beta_{13}(t), \\ \ell_{\nu y} &= \xi(t)\beta_{21}(t) + \eta(t)\beta_{22}(t) + \zeta(t)\beta_{23}(t) + y_\nu - \xi_\nu\beta_{21}(t) - \zeta_\nu\beta_{23}(t), \\ \ell_{\nu z} &= \xi(t)\beta_{31}(t) + \eta(t)\beta_{32}(t) + \zeta(t)\beta_{33}(t) + z_\nu - \xi_\nu\beta_{31}(t) - \zeta_\nu\beta_{33}(t), \\ \nu &= \overline{1, 6}.\end{aligned} \right. \quad (2.7)$$

Рассматривая совокупность формул (2.5), (2.6) как систему линейных алгебраических уравнений относительно U_ν , $\nu = \overline{1, 6}$, найдем искомые управляющие параметры

$$u_\nu(t) = \ell_\nu(t)U_\nu(t), \quad \nu = \overline{1, 6}.$$

Таким образом, задача отыскания искомых управляющих усилий $u_\nu(t)$, $\nu = \overline{1, 6}$, обеспечивающих заданное движение системы, решена.

4. Решение обратной задачи динамики. Рассмотрим теперь определение закона движения нагруженной платформы стенда по заданным усилиям, создаваемым гидроцилиндрами (решим обратную задачу динамики). При этом будем пользоваться скалярной формой специальных уравнений движения (2.3), (2.4).

Чтобы определить векторные «координаты» твердого тела (1.1), требуется найти 12 скалярных величин — 3 проекции радиус-вектора ρ и 9 направляющих косинусов $\beta_{\sigma\tau}(t)$, $\sigma, \tau = \overline{1,3}$, ортов \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} . Для их вычисления имеем 6 скалярных дифференциальных уравнений (2.3), (2.4), при работе с которыми учитываем формулы (2.5)–(2.7). К дифференциальным уравнениям следует добавить 6 уравнений связей (1.2). При численном решении требуется еще задать начальные условия

$$\left. \begin{aligned} \xi(0) &= \xi^0, & \eta(0) &= \eta^0, & \zeta(0) &= \zeta^0, \\ \dot{\xi}(0) &= 0, & \dot{\eta}(0) &= 0, & \dot{\zeta}(0) &= 0, \\ \beta_{\sigma\tau}(0) &= \beta_{\sigma\tau}, & \dot{\beta}_{\sigma\tau}(0) &= 0, \\ \sigma, \tau &= \overline{1,3}. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Итак, полученные в последних двух пунктах уравнения позволяют решать как прямую, так и обратную задачи динамики. Для полноты исследования этих двух задач система скалярных уравнений специальной формы дифференциальных уравнений (2.3), (2.4) записывалась в безразмерном виде. За единицу длины принимался радиус R_b окружности, на которой расположены нижние концы гидроцилиндров B_ν , $\nu = \overline{1,6}$ (см. рис. 1), единицей силы являлась сила тяжести Mg всей системы, за безразмерное время было принято $\tau = \omega t$ ($\omega = \sqrt{g/R_b}$). В дальнейшем безразмерное время будем обозначать через t , а дифференцирование по нему будем отмечать точкой. Для решения использовался пакет Mathematica, позволяющий представлять результаты как в аналитической, так и в графической формах.

5. Обсуждение одного технического эффекта, проявляющегося в поведении платформы Стюарта, находящейся в положении равновесия. Рассмотрим положение равновесия нагруженной платформы Стюарта (напомним, что, как отмечалось выше, оно является неустойчивым), поддерживаемой гидроцилиндрами (пневмоцилиндрами). Для удержания платформы в этом положении в цилиндрах создаются требуемые давления. Но при работе моторов, поддерживающих эти давления, платформа обычно испытывает некоторое небольшое «дрожание», которое в технике называют «паразитными колебаниями». Рассмотрим существо этого явления на примере упрощенной математической модели, отражающей малую вибрацию платформы лишь по вертикали, при этом будем пользоваться специальной формой дифференциальных уравнений движения нагруженной платформы Стюарта (2.3), (2.4).

Пусть управляющие усилия $u(t)$, создаваемые штоками гидроцилиндров (пневмоцилиндров) при равновесии симметрично нагруженной платформы в горизонтальном положении, имеют вид

$$u(t) = 0.2005 + 0.0001 \sin t.$$

Здесь 0.2005 соответствует безразмерному усилию в стержне некоторого конкретного динамического стенда в положении равновесия платформы, несущей кабину крупного грузовика. Тогда решение, проведенное до безразмерного времени, равного 8π , представлено на рис. 2.

На рис. 2 по оси ординат откладывается вертикальное перемещение платформы $\eta(t)$. Неожиданным является наблюдающийся здесь через некоторое время стремительный уход платформы вверх. Причина возникновения этого эффекта будет

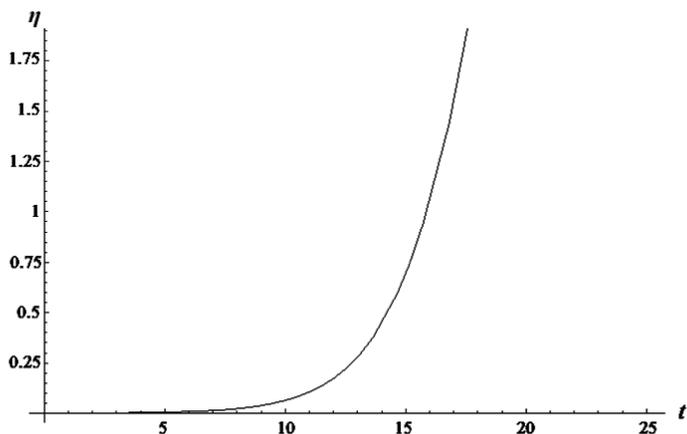


Рис. 2. Вертикальное движение платформы Стюарта при «паразитных колебаниях».

обсуждаться ниже. Стабилизация неустойчивого положения равновесия платформы может быть обеспечена введением обратных связей. Интересный метод построения подобных связей использован в статье [16], опирающейся на работу [15].

Таким образом, «паразитные колебания» являются одной из причин ухода системы из положения неустойчивого равновесия. Поясним сущность влияния «паразитных колебаний» платформы простейшим способом. На рис. 3, а отрезок BA_0 отражает один из гидроцилиндров в статическом равновесии платформы, при этом DA_0 соответствует ординате платформы в этом положении. Точки A_1 и A_2 соответствуют положениям верхнего конца цилиндра при максимальных значениях $\Delta F_1 = \Delta F_2$ величины переменной составляющей силы (создающей «паразитные

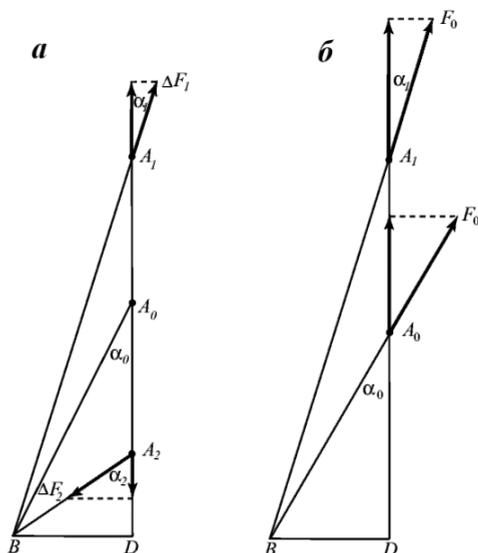


Рис. 3. Вертикальные составляющие сил.

колебания»), развиваемой гидроцилиндром при его перемещении вверх (ΔF_1) и вниз (ΔF_2). Так как для углов (см. рис. 3, а) имеется соотношение $\alpha_2 > \alpha_1$, то $\Delta F_1 \cos \alpha_1 > \Delta F_2 \cos \alpha_2$. Поэтому за каждый период изменения переменной составляющей нагрузки $\Delta F(t)$ со стороны гидроцилиндра создается избыток силы, движущий платформу вверх.

Отметим, что обсуждаемый избыток силы имеет малую величину, так как рассматриваются малые отклонения силы от ее статического значения. Важное значение этой пульсации давления состоит в том, что она вызывает перемещение платформы и является при этом, так сказать, «возмутителем спокойствия». В это же время основной вклад в движение платформы вверх создает изменение вертикальной составляющей от статической нагрузки F_0 , являющейся значительной величиной. Действительно, как видно из рис. 3, б, вертикальная составляющая $F_0 \cos \alpha_1$ при перемещении платформы вверх в положение A_1 больше вертикальной составляющей $F_0 \cos \alpha_0$ при нахождении платформы в положении статического равновесия A_0 . Более того, когда колебания платформы станут такими, что за счет превышения точки A_1 над положением статического равновесия A_0 наименьшая величина вертикальной составляющей силы станет больше, чем $F_0 \cos \alpha_0$, начнется непрерывное перемещение платформы вверх без колебательного характера (см. рис. 2).

6. Вертикальные колебания платформы. Изучим теперь вертикальные колебания нагруженной платформы Стюарта по закону

$$\eta(t) = 0.2 (\sin t)(1 - e^{-t/2})^2. \quad (5.1)$$

Перемещение $\eta(t)$ по вертикали представлено в таком виде для того, чтобы в начальный момент и скорость, и ускорение платформы были бы равны нулю. В противном случае в начальный момент потребовалось бы скачкообразное приложение силы. В то же время в системе быстро устанавливаются вертикальные синусоидальные колебания с амплитудой 0.2 и частотой 1.

Найдем усилия в гидроцилиндрах, обеспечивающие простейшее заданное колебательное вертикальное движение симметрично нагруженной платформы по закону (5.1), то есть решим прямую задачу динамики.

С помощью пакета Mathematica можно в случае, когда центр масс всей системы находится над центром платформы, показать, что такое движение обеспечивается с помощью усилия $F(t)$ в цилиндре, имеющего весьма громоздкое аналитическое представление (в силу симметрии задачи усилия во всех цилиндрах получились одинаковыми). Графически изменение этого усилия представлено на рис. 4.

Если теперь решать обратную задачу, прикладывая к нагруженной платформе найденные усилия $F(t)$, то получим требуемые вертикальные колебания платформы по закону (5.1).

Перейдем к случаю малого возмущения управления $F(t)$. Обозначим через $\eta_*(t)$ перемещение платформы стенда, соответствующее малому возмущению управления $F(t)$, полученному в результате решения прямой задачи механики. Возмущение зададим в виде малой величины $0.0001 (\sin 2t)(1 - e^{-t/2})$, то есть положим

$$F_*(t) = F(t) + 0.0001 (\sin 2t)(1 - e^{-t/2}).$$

График функции $\eta_*(t)$ представлен на рис. 5. Из этого графика видно, что на начальном промежутке времени ($0 < \tau < 12$) введенное возмущение сказывается незначительно, в то время как в дальнейшем наступает интенсивное движение платформы

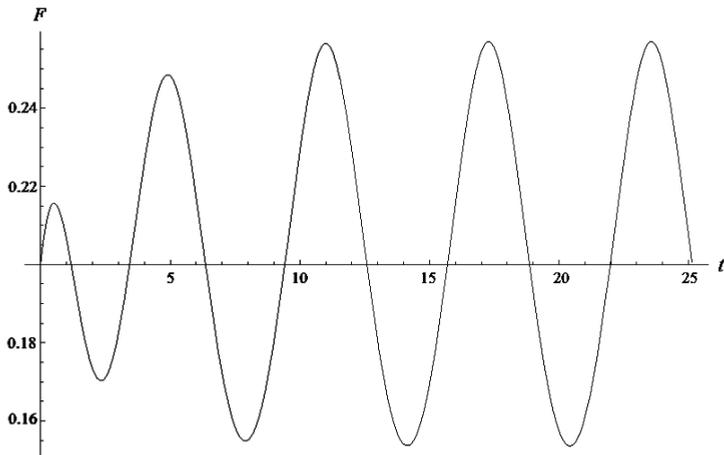


Рис. 4. График усилия в цилиндре.

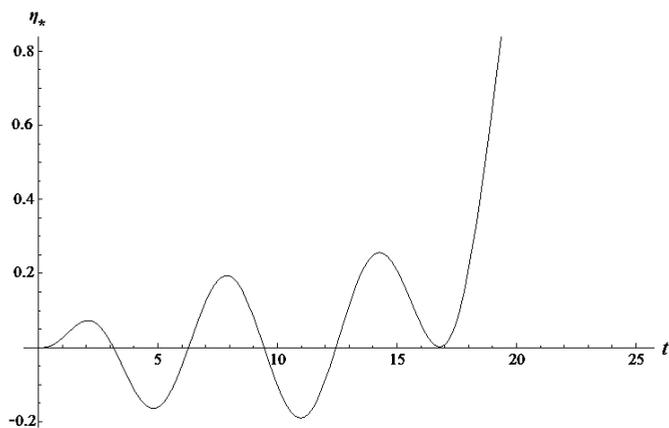


Рис. 5. Движение платформы при малом возмущении вертикальной силы.

вверх. Отметим, что при этом, несмотря на колебательный характер силы $F(t)$, платформа движется быстро вверх без осцилляций.

Итак, видим, что платформа резко начинает подниматься вверх, хотя функция $F_*(t)$ очень незначительно отличается от функции $F(t)$, обеспечивающей движение по закону (5.1). Это указывает на неустойчивость требуемых вертикальных колебаний платформы (5.1).

Особо подчеркнем, что численные результаты, полученные для вертикальных колебаний платформы стенда с помощью специальной формы дифференциальных уравнений движения, полностью соответствуют движению, найденному параллельно с помощью применения основных теорем динамики о движении центра масс и об изменении кинетического момента в движении относительно центра масс.

7. Введение обратных связей. Для получения устойчивых вертикальных колебаний платформы по закону (5.1) введем согласно статьям [10, 13, 14] обратные

связи, формируя силы $F_k(t)$, $k = \overline{1, 6}$, создаваемые гидроцилиндрами, в виде

$$F_k(t) = F_k^p(t) + G(l_k^p(t) - l_k(t)), \quad k = \overline{1, 6}.$$

Здесь $F_k^p(t)$ — программные управляющие силы, $l_k^p(t)$ — программные длины гидроцилиндров, $l_k(t)$ — измеренные фактические длины гидроцилиндров, G — коэффициент обратных связей. В работах [13, 14] путем численных экспериментов показано, что при определенном выборе величины G всегда можно добиться отклонения истинного движения от программного с заданной точностью. Более того, при достаточно большой величине коэффициента обратных связей G можно осуществить программное движение даже при $F_k^p(t) \equiv 0$.

8. Заключение. В работе предлагается для описания движений нагруженной платформы Стюарта использовать специальную форму динамики твердого тела, в которой положение тела задается радиус-вектором центра масс и ориентацией ортов связанной системы координат, оси которой направлены по центральным главным осям инерции. Полученная специальная форма уравнений движения применяется для изучения «паразитных колебаний» платформы станда. Отмечается, что эти колебания являются одной из причин отклонения системы от положения неустойчивого равновесия. Рассматриваются вертикальные колебания платформы и показывается, что они являются неустойчивыми. Для получения устойчивых движений нагруженной платформы Стюарта предлагается вводить классические обратные связи. Отмечается, что численные результаты, полученные для вертикальных колебаний платформы станда с помощью специальной формы дифференциальных уравнений движения, полностью соответствуют движению, найденному ранее с помощью применения основных теорем динамики.

Авторы благодарны Петру Евгеньевичу Товстику за ценные советы, полученные ими при подготовке рукописи статьи к печати.

Литература

1. Stewart D. A platform with six degrees of freedom // Proc. of the Institution of mechanical engineers. London. 1965. Vol. 180, no. 15. P. 371–386.
2. Nanua P., Waldron K. J., Murthy V. Direct kinematic solution of a Stewart platform // IEEE Trans. on robotics and automation. 1990. Vol. 6, no. 4. P. 438–443.
3. Harib K., Srinivasan K. Kinematic and dynamic analysis of Stewart platform-based machine tool structures // Robotica. 2003. Vol. 21, no. 05. P. 541–554.
4. Geng Z., Haynes L. S., Lee J. D., Carroll R. L. On the dynamic model and kinematic analysis of a class of Stewart platforms // Robotics and autonomous systems. 1992. Vol. 9. P. 237–254.
5. Adkins F. A., Haug E. J. Operational envelope of a spatial Stewart platform // Trans. ASME. J. Mech. Des. 1997. Vol. 31, no. 368. P. 330–332.
6. Bohigas O., Ros L., Manubens M. A complete method for workspace boundary determination. Inst. Robot. and Inf. Ind. (CSIC-UPC), Barcelona, Spain, 2010. Available at: <http://www.iri.csic.es/people/ros/Separates/cl6-ark-2010-ws.pdf> (accessed: September 19, 2019).
7. Александров В. В. Абсолютная устойчивость моделируемых динамических систем // Доклады АН СССР. 1988. Т. 299, № 2. С. 296–301.
8. Dasgupta B., Mruthunjaya T. S. A Newton — Euler formulation for the inverse dynamics of the Stewart platform manipulator // Mechanism and machine theory. 1998. Vol. 33, no. 8. P. 1135–1152.
9. Lebet G., Liu K., Lewis F. L. Dynamic analysis and control of a Stewart platform manipulator // J. robotic systems. 1993. Vol. 10, no. 5. P. 629–655.
10. Леонов Г. А., Зегзуда С. А., Кузнецов Н. В., Товстик П. Е., Товстик Т. П., Юшков М. П. Движение твердого тела, опертого на шесть стержней переменной длины // Доклады Академии наук. 2014. Т. 455, № 3. С. 282–286.

11. Nedic N., Prsic D., Dubonjic L., Stojanovic V., Djordjevic V. Optimal casca de hydraulic control for a parallel robot PSO // Int. J. Manuf. Technol. 2014. Vol. 72. Issue 5–8. P. 1085–1098. <https://doi.org/10.1007/s00170-014-5735-5>
12. Andrievsky B. R., Kazumin D. V., Kostygova D. M., Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Lobanov P., Volkov A. A. Differential Equations of Controlled Pneumatic Actuators for 6-DOF Stewart Platform // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. 2015. Vol. 15, no. 1. P. 14–24.
13. Андриевский Б. Р., Арсеньев Д. Г., Зегжда С. А., Казунин Д. В., Кузнецов Н. В., Леонов Г. А., Товстик П. Е., Товстик Т. П., Юшков М. П. Динамика платформы Стюарта // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4(62). Вып. 3. С. 489–504. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.311>
14. Леонов Г. А., Зегжда С. А., Зуев С. М., Ершов Б. А., Казунин Д. В., Костыгова Д. М., Кузнецов Н. В., Товстик П. Е., Товстик Т. П., Юшков М. П. Динамика платформы Стюарта и управление ее движением // Доклады Академии наук. 2014. Т. 458, № 1. С. 36–41.
15. Александров В. В., Локшин Б. Я., Гомес Е. Л., Салазар И. Х. Стабилизация управляемой платформы при наличии ветровых возмущений // Фундамент. и прикл. матем. 2005. Т. 11. Вып. 7. С. 97–115.
16. Зуев С. М. Стабилизация положения равновесия платформы Стюарта с тремя степенями свободы // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2013. Вып. 4. С. 84–92.
17. Леонов Г. А., Товстик П. Е., Товстик Т. М. Области достижимости положений платформы Стюарта в шестимерном пространстве обобщенных координат // Вестн. С.-Петербург. ун-та. 2017. Математика. Механика. Астрономия. Т. 4(62). Вып. 2. С. 300–309. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.214>
18. Ji Z. Study of the effect of leg inertia in Stewart platform // Proc. of the IEEE Conf. on robotics and automation. 1993. Vol. 1. P. 212–226.
19. Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П. Специальная форма уравнений динамики системы твердых тел // Доклады АН СССР. 1989. Т. 309, № 4. С. 805–807.
20. Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П. Неголономная механика. Теория и приложения. М.: Наука, Физматлит, 2006.
21. Petrova V. I. Relation between coordinate systems describing the dynamics of a loaded Stewart platform // The Eighth Polyakhov's Reading: Proceedings of the International Scientific Conference on Mechanics. 2018. Vol. 1959. Art. no. 030019. <https://doi.org/10.1063/1.5034599>

Статья поступила в редакцию 19 июля 2019 г.;
 после доработки 1 сентября 2019 г.;
 рекомендована в печать 19 сентября 2019 г.

Контактная информация:

Зегжда Сергей Андреевич — д-р физ.-мат. наук, проф. (1935–2015)

Петрова Виктория Игоревна — студент; vikkka97@mail.ru

Юшков Михаил Петрович — д-р физ.-мат. наук, проф.; yushkovmp@mail.ru

Application of a special form of differential equations to the study of motion of a loaded Stewart platform*

S. A. Zegzhda[†], V. I. Petrova, M. P. Yushkov

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Zegzhda S. A., Petrova V. I., Yushkov M. P. Application of a special form of differential equations to the study of motion of a loaded Stewart platform. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 1, pp. 128–140. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.113> (In Russian)

*This work is supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant No. 19.01.00208-a).

The paper is concerned with motions of a loaded Stewart platform. The motion equations are composed using a special form of differential equations (motion equations are derived in redundant coordinates). This form is also used to derive first-order vector Lagrange equations involving differentiation with respect to the radius vector of the system center of mass, the unit vectors of the principal central inertia axes of a motion body and with respect to these derivatives. These vectors define the position of the rigid body in space. As abstract holonomic constraint imposed on the vectors describing the motion of the rigid body, one considers the invariableness of the lengths of unit vectors and their orthogonality. We discuss one engineering effect manifested in the behavior of a Stewart platform in an equilibrium state (“parasitic oscillations”). This effect is one of the root causes for the system to move away from an unstable equilibrium position. A similar instability is also present in standard vertical oscillations of a Stewart platform. A simplest mechanism of appearance of instability of such vertical motions of a platform is revealed. To guarantee a stable motion, it is proposed introduce the classical feedbacks. Numerical solutions of the differential equations thus obtained are in complete accord with the numerical results obtained in the solution of the motion equations composed using the of center mass motion theorems and taking into account results on the variation of the kinetic moment as the system moves about the center of mass.

Keywords: Stewart platform, dynamic simulation bench, special form of motion equations, feedbacks.

References

1. Stewart D., “A platform with six degrees of freedom”, *Proc. of the Institution of mechanical engineers* **180**(15), 371–386 (London, 1965).
2. Nanua P., Waldron K. J., Murthy V., “Direct kinematic solution of a Stewart platform”, *IEEE Trans. on robotics and automation* **6**(4), 438–443 (1990).
3. Harib K., Srinivasan K., “Kinematic and dynamic analysis of Stewart platform-based machine tool structures”, *Robotica* **21**(05), 541–554 (2003).
4. Geng Z., Haynes L. S., Lee J. D., Carroll R. L., “On the dynamic model and kinematic analysis of a class of Stewart platforms”, *Robotics and autonomous systems* **9**, 237–254 (1992).
5. Adkins F. A., Haug E. J., “Operational envelope of a spatial Stewart platform”, *Trans. ASME. J. Mech. Des.* **31**(368), 330–332 (1997).
6. Bohigas O., Ros L., Manubens M., *A complete method for workspace boundary determination* (Inst. Robot. and Inf. Ind. (CSIC-UPC), Barcelona, Spain). Available at: <http://www.iri.csic.es/people/ros/Separates/cl6-ark-2010-ws.pdf> (accessed: September 19, 2019).
7. Aleksandrov V. V., “Absolute stability of modeled dynamical systems”, *Doklady AN SSSR* **299**(2), 296–301 (1988). (In Russian)
8. Dasgupta B., Mruthyunjaya T. S., “A Newton – Euler formulation for the inverse dynamics of the Stewart platform manipulator”, *Mechanism and machine theory* **33**(8), 1135–1152 (1998).
9. Lebrete G., Liu K., Lewis F. L., “Dynamic analysis and control of a Stewart platform manipulator”, *J. robotic systems* **10**(5), 629–655 (1993).
10. Leonov G. A., Zegzhda S. A., Kuznetsov N. V., Tovstik P. E., Tovstik T. P., Yushkov M. P., “Motion of a Solid Driven by Six Rods of Variable Length”, *Doklady Physics* **59**(3), 153–157 (2014). <https://doi.org/10.1134/S1028335814030100>
11. Nedic N., Prsic D., Dubonjic L., Stojanovic V., Djordjevic V., “Optimal casca de hydraulic control for a parallel robot PSO”, *Int. J. Manuf. Technol.* **72**, issue 5–8, 1085–1098 (2014). <https://doi.org/10.1007/s00170-014-5735-5>
12. Andrievskiy B. R., Kazunin D. V., Kostygova D. M., Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Lobanov P., Volkov A. A., “Differential Equations of Controlled Pneumatic Actuators for 6-DOF Stewart Platform”, *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* **15**(1), 14–24 (2015).
13. Andrievskii B. R., Arsen’ev D. G., Zegzhda S. A., Kazunin D. V., Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Tovstik P. E., Tovstik T. P., Yushkov M. P., “Dynamics of the Stewart platform”, *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics* **50**, issue 3, 297–309 (2017). <https://doi.org/10.3103/S1063454117030037>

14. Leonov G. A., Zegzhda S. A., Zuev S. M., Ershov B. A., Kazunin D. V., Kostygova D. M., Kuznetsov N. V., Tovstik P. E., Tovstik T. P., Yushkov M. P., “Dynamics and Control of the Stewart Platform”, *Doklady Physics* **59**(9), 405–410 (2014). <https://doi.org/10.1134/S102833581409002X>
15. Aleksandrov V. V., Lokshin B. Ya., Gomez E. L., Salazar N. A., “Stabilization of a platform under wind loads”, *Fundam. Prikl. Mat.* **11**(7), 97–115 (2015). (In Russian)
16. Zuev S. M., “Stabilization of the equilibrium Stewart platform with three degrees of freedom”, *Vestnik St. Petersburg Univ. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, issue 4, 84–92 (2013). (In Russian)
17. Leonov G. A., Tovstik P. E., Tovstik T. P., “Workspaces of the Stewart Platform in the 6D Space of Generalized Coordinates”, *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics* **50**, issue 2, 180–187 (2017). <https://doi.org/10.3103/S1063454117020091>
18. Ji Z., “Study of the effect of leg inertia in Stewart platform”, *Proc. of the IEEE Conf. on robotics and automation* **1**, 212–226 (1993).
19. Polyakhov N. N., Zegzhda S. A., Yushkov M. P., “Special equation form of the dynamics of solid system”, *Doklady AN SSSR* **309**(4), 805–807 (1989). (In Russian)
20. Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P., Zegzhda S. A., *Mechanics of non-holonomic systems. A New Class of control systems* (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2009).
21. Petrova V. I., “Relation between coordinate systems describing the dynamics of a loaded Stewart platform”, *The Eighth Polyakhov's Reading: Proceedings of the International Scientific Conference on Mechanics* **1959**, 030019 (2018). <https://doi.org/10.1063/1.5034599>

Received: July 19, 2019
 Revised: September 1, 2019
 Accepted: September 19, 2019

Authors' information:

Sergey A. Zegzhda (1935–2015)
 Victoriya I. Petrova — vikka97@mail.ru
 Mikhail P. Yushkov — yushkovmp@mail.ru