

# Исследование больших деформаций композитной плоскости с межфазной трещиной, нагруженной равномерным давлением

*В. М. Мальков, Ю. В. Малькова*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** *Мальков В. М., Малькова Ю. В.* Исследование больших деформаций композитной плоскости с межфазной трещиной, нагруженной равномерным давлением // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 1. С. 141–153. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.114>

Получено аналитическое решение нелинейной задачи теории упругости для композитной плоскости, образованной соединением двух полуплоскостей из разных материалов с межфазной трещиной. Упругие свойства полуплоскостей моделируются полуплоскостным материалом. Внешней нагрузкой является следящее нормальное давление, ортогональное деформированным поверхностям берегов трещины, напряжения на бесконечности отсутствуют. Для решения задачи используются методы теории функций комплексной переменной. Установлено существование критических значений величины давления, превышение которых ведет к большим перемещениям, деформациям и напряжениям в окрестности трещины. Критические давления имеют порядок модуля сдвига материала и реально возможны для низкомодульных резиноподобных материалов (эластомеров). Для жестких материалов с большим модулем сдвига, в частности металлов, критические давления обычно не достигаются. Получены формулы для раскрытия берегов трещины в зависимости от величины давления и параметров материалов. На основе общего решения построены асимптотики номинальных напряжений (напряжений Пиолы) и напряжений Коши в окрестностях вершин трещины. Показано, что номинальные напряжения имеют корневую особенность, напряжения Коши не имеют особенности у вершин трещины.

*Ключевые слова:* композитная плоскость, полуплоскостной материал, межфазная трещина, методы комплексных функций.

**1. Введение.** Разрушение материалов и конструкций в основном происходит по причине образования трещин и их развития под влиянием внешних условий. В частности, разрушению горных пород, строительных конструкций и др. способствует попадание воды в трещины и ее замерзание, что приводит к росту трещины. В настоящее время для оценки прочности и разрушения материалов с трещинами обычно используют критерии, основанные на решениях краевых задач линейной теории упругости, которая предполагает, что деформации и углы поворота малы по сравнению с единицей. В окрестностях вершин трещин деформации и углы поворота не ограничены по величине, поэтому целесообразно задачи прочности материалов с трещинами решать с использованием уравнений нелинейной теории упругости.

В работе исследование напряженного состояния композиционных материалов с межфазными трещинами проводится на основе полностью нелинейных уравне-

ний теории упругости. Предлагаемые математические модели нелинейной деформации указанных материалов и конструкций и полученные аналитические решения актуальны и имеют теоретическое и прикладное значение. Представляет интерес установление факта существования и величины критических давлений на берегах трещины, приводящих к потере устойчивости материала. Основной областью применения результатов выполненных исследований являются резиноподобные материалы (эластомеры), которые допускают большие деформации в сотни процентов в упругой области деформирования.

В механике композиционных материалов особое место занимают задачи, когда трещина находится на границе соединения двух разных по упругим свойствам материалов (межфазные трещины). Для инженерных приложений важно знать поля напряжений и перемещений в окрестности трещины и на межфазной линии, что позволяет предсказать поведение трещины и оценить прочность соединения материалов.

Значительный вклад в исследование проблем механики трещин внесли работы В. В. Новожилова, Н. Ф. Морозова, Г. П. Черепанова, Н. И. Мухелишвили, А. И. Лурье, Р. В. Гольдштейна, М. Н. Перельмутера, Г. И. Баренблатта, Л. И. Слепяна, В. В. Панасюка, Л. М. Зубова и многих других ученых.

подавляющее большинство публикаций посвящены линейным задачам для прямолинейных или слабо искривленных межфазных или внутренних трещин. Во многих работах для решения этих задач применялись практически одни и те же методы, основанные на теории комплексных потенциалов и сведениях к граничным задачам Римана — Гильберта (Н. И. Мухелишвили [1]).

Обзор работ по линейным задачам для межфазных и внутренних трещин сделан в монографии Ю. В. Мальковой [2]. Сведения о работах по нелинейным задачам о трещинах в однородных и композиционных материалах приведены в статье авторов [3].

Определенный интерес представляют работы Ч. К. Ру (C. Q. Ru) [4–6]. В первой из них проведен асимптотический анализ напряжений и деформаций у конца свободной трещины в двухкомпонентной плоскости. Трещина расположена внутри одной полуплоскости, но ее конец находится на межфазной линии. Используется модель гармонического материала Джона. Отмечается отсутствие осцилляций в окрестности конца трещины. Показатели сингулярности напряжений зависят от параметров материала и угла наклона трещины. Более детально анализируются два частных случая — межфазная трещина и трещина, ортогональная линии раздела. Статья [5] относится к числу немногих работ, где получено глобальное решение плоской задачи о межфазной трещине. Здесь также рассматривался гармонический материал Джона, что позволило применить теорию комплексных функций, однако решение доведено до конца только для трещины в однородной плоскости. В работе [6] дан асимптотический анализ деформаций в окрестности конца трещины в однородной плоскости для той же модели материала. Целью работы было показать, что существует область, где материал теряет свойство эллиптичности при больших деформациях. Получены уравнения границ области потери эллиптичности.

Численному решению методом конечных элементов (X-FEM) задач плоского напряженного состояния о трещинах посвящена работа Г. Легрена (G. Legrain), Н. Моэ (N. Moës), Э. Веррона (E. Verron) [7]. Показано, что результаты, полученные численным методом, находятся в хорошем соответствии с результатами ранее опубликованных работ.

В работе Р. Абеяратне (R. Abeyaratne), Дж. С. Янга (J. S. Yang) [8] изучались поля напряжений и деформаций около конца трещины при одноосном растяжении пластины для модели несжимаемого материала специального вида. Получено, что для этой модели система нелинейных дифференциальных уравнений может терять свойство эллиптичности при достаточно больших деформациях. Анализ, основанный на прямых асимптотических вычислениях, показал, что потеря эллиптичности приводит к существованию двух кривых из каждого конца трещины, на которых градиент деформации и напряжения терпят разрыв.

В наших работах [3, 9–13] разработан общий метод решения нелинейных плоских задач о трещинах и сосредоточенных нагрузках, основанный на использовании системы уравнений равновесия для тензора номинальных напряжений (Пиолы) и уравнений совместности для градиента деформации. Введением функций скачков напряжений и деформаций на линии соединения разных материалов и методами комплексных функций построены точные решения ряда задач для композитной плоскости с межфазной трещиной и сосредоточенными силами на межфазной линии для полулинейного материала и материала Джона. Для гармонического материала Джона исследована также задача о межфазной трещине, нагруженной равномерным следящим давлением на берегах [10]. Показано, что существуют критические давления, превышение которых ведет к потере устойчивости материала и большим закритическим деформациям. Исходя из общего решения, построены асимптотики напряжений и перемещений в окрестностях вершин трещины.

Фундаментальное математическое исследование плоских задач теории упругости для тел с трещинами и угловыми вырезами выполнено в монографии Н. Ф. Морозова [14]. Монография охватывает широкий круг проблем, включающих линейные и нелинейные постановки и решения задач классической и моментной теории упругости. Решения дифференциальных уравнений строятся в функциональных пространствах. Существенное внимание уделено асимптотическим оценкам сингулярных членов решений в окрестностях вершин трещин и угловых точек.

**2. Постановка и решение нелинейной краевой задачи.** Рассматривается композитная плоскость, образованная соединением двух полуплоскостей из разных материалов. На линии соединения материалов имеется трещина, называемая межфазной, которая нагружена равномерным давлением, ортогональным деформированной поверхности трещины. Для решения нелинейной краевой задачи используются лагранжевы координаты отсчетной конфигурации.

Уравнения равновесия элемента объема тела в текущей конфигурации (объемные силы не учитываются)

$$\operatorname{div}_x \mathbf{T} = \mathbf{0}$$

преобразуем к переменным отсчетной конфигурации. Для этого применим преобразование Пиолы к тензору напряжений Коши  $\mathbf{T}$ , в результате получим тензор напряжений Пиолы  $\mathbf{S}$ , называемый здесь тензором номинальных напряжений,

$$\mathbf{S}(a) = \mathbf{G}^{-1}(a) \cdot J(a) \mathbf{T}(x),$$

где  $\mathbf{G}$  — градиент деформации,  $J = \det \mathbf{G}$ . Преобразование Пиолы приводит к следующему соотношению между дивергенциями тензоров в отсчетной и текущей конфигурациях:

$$\operatorname{div}_a \mathbf{S}(a) = J(a) \operatorname{div}_x \mathbf{T}(x), \quad x = x(a).$$

Исходными уравнениями краевой задачи служат уравнения равновесия для тензора номинальных напряжений и уравнения совместности для градиента деформации

$$\operatorname{div}_a \mathbf{S} = \mathbf{0}, \quad \operatorname{rot}_a \mathbf{G}^T = \mathbf{0}.$$

Переходя к компонентам тензоров, запишем уравнения в комплексной форме для плоской задачи [15]

$$(s_{11} + is_{12})'_1 + i(s_{22} - is_{21})'_2 = 0, \quad (1)$$

$$(g_{22} - ig_{12})'_1 + i(g_{11} + ig_{21})'_2 = 0, \quad (2)$$

где  $s_{ij}$ ,  $g_{ij}$  — компоненты тензоров номинальных напряжений и градиента деформации в декартовых координатах  $(x_1, x_2)$ . Штрих обозначает производные по этим координатам. Уравнения (1), (2) являются точными, поскольку отсутствующие в (1) напряжения  $s_{31}$ ,  $s_{32}$  равны нулю для полуплинейного материала.

Уравнения (1), (2) тождественно удовлетворяются, если положить

$$s_{11} + is_{12} = \frac{\partial \sigma}{\partial z} - \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}}, \quad s_{22} - is_{21} = \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}}, \quad (3)$$

$$g_{11} + ig_{21} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}, \quad g_{22} - ig_{12} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}, \quad (4)$$

где  $z = x_1 + ix_2$ ,  $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$  — комплексные переменные отсчетной и текущей конфигураций;  $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$  — комплексная функция номинальных напряжений. Функции  $\sigma(z, \bar{z})$  и  $\zeta(z, \bar{z})$  находятся из соотношений упругости и граничных условий задачи.

Модель полуплинейного материала предложена в работе Ф. Джона [16]. Термин «полуплинейный материал» ввел А. И. Лурье [17]. В случае малых деформаций эта модель приводит к закону Гука. Полуплинейный материал относится к классу гармонических материалов, что позволяет использовать методы функций комплексной переменной при решении плоских задач нелинейной теории упругости. Модель полуплинейного материала использовалась в работах многих отечественных и зарубежных авторов, в частности, в работах известных ученых: А. И. Лурье [17, 18], Н. Ф. Морозова [14], Л. М. Зубова [19, 20], К. Ф. Черныха [21] и других. Эта модель физически не противоречива и применимость ее к реальным материалам, в том числе резиноподобным, доказана экспериментально. В монографиях А. И. Лурье [17, 18] приведены решения большого числа нелинейных задач теории упругости для модели полуплинейного материала, не только плоских задач. Им также доказана сильная эллиптичность дифференциальных уравнений упругости для модели полуплинейного материала [17].

**Замечание.** В данной работе употребляется понятие «потеря устойчивости материала», под которым понимается стремление максимальных значений перемещений и деформаций берегов трещины к бесконечности, когда величина давления приближается к критическим значениям (конечным). Более полная и точная формулировка подобной ситуации содержится в обзорной статье В. А. Еремеева, Л. М. Зубова [20], посвященной вопросам теории устойчивости трехмерных деформируемых сред: «потеря устойчивости процесса деформирования нелинейно-упругого трехмерного тела». Такой вид потери устойчивости не связан с бифуркацией тонких тел.

В статье [20] и цитируемой там литературе приведено много примеров подобных явлений. Простым примером может служить потеря устойчивости растягиваемого стержня, проявляющаяся в образовании шейки.

Упругий потенциал полуплинейного материала имеет вид [17]

$$\Phi = 0,5 \lambda \operatorname{tr}^2 (\mathbf{A} - \mathbf{I}) + \mu \operatorname{tr} (\mathbf{A} - \mathbf{I})^2, \quad (5)$$

где  $\lambda, \mu$  — параметры Ляме,  $\mathbf{A} = \lambda_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta$  — тензор кратностей удлинений, связанный с градиентом деформации соотношением  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{G}$ .

Закон упругости плоской задачи для компонент тензора номинальных напряжений и градиента деформации, отвечающий потенциалу (5), запишем в комплексной форме

$$\begin{aligned} s_{11} + i s_{12} &= (\lambda + 2\mu)(g_{11} + i g_{21}) + \lambda(g_{22} - i g_{12}) + k e^{i\omega}, \\ s_{22} - i s_{21} &= (\lambda + 2\mu)(g_{22} - i g_{12}) + \lambda(g_{11} + i g_{21}) + k e^{i\omega}, \end{aligned}$$

$\omega$  — угол поворота окрестности точки [3],  $k = \lambda(\lambda_3 - 3) - 2\mu$ .

Напряжения и деформации заменим выражениями (3), (4), в результате получим уравнения для функций  $\sigma(z, \bar{z})$  и  $\zeta(z, \bar{z})$ ,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = 2\mu c \left( \frac{\partial \zeta}{\partial z} - e^{i\omega} \right), \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}} = -2\mu \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}, \quad (6)$$

при плоской деформации  $c = 1/(1 - 2\nu)$ .

Решение уравнений (6) приведено в работе [3]

$$\begin{aligned} 2\mu \zeta &= \frac{1}{1+c} \left[ \varphi(z) - \overline{\psi(z)} + 2\mu c \int e^{i\omega} dz \right], \\ \sigma &= \frac{1}{1+c} \left[ c\varphi(z) + \overline{\psi(z)} - 2\mu c \int e^{i\omega} dz \right], \end{aligned} \quad (7)$$

$\varphi(z), \psi(z)$  — аналитические функции,

$$e^{i\omega} = \frac{\varphi'(z)}{|\varphi'(z)|}.$$

Аналогичная формула для угла поворота  $\omega$  имеется в монографии А. И. Лурье [17]. В этой работе приведена комплексная форма записи уравнений плоской задачи для полуплинейного материала, отличная от уравнений данной работы. Основными искомыми функциями являются  $\zeta$  и  $\varphi(z)$ , а не  $\zeta$  и  $\sigma$ , как в нашем случае. Уравнение совместности деформаций (3) в работе [17] не используется.

Подставим (7) в формулы (3) для номинальных напряжений, получим

$$\begin{aligned} s_{11} + i s_{12} &= \frac{1}{1+c} \left[ c\varphi'(z) - 2\mu c e^{i\omega} - \overline{\psi'(z)} + 2\mu c \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \int e^{i\omega} dz \right], \\ s_{22} - i s_{21} &= \frac{1}{1+c} \left[ c\varphi'(z) - 2\mu c e^{i\omega} + \overline{\psi'(z)} - 2\mu c \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \int e^{i\omega} dz \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Для напряжений и деформаций (3), (4) имеют место соотношения

$$\begin{aligned} s_{11} + is_{12} + 2\mu(g_{22} - ig_{21}) &= \varphi'(z), \\ s_{22} - is_{21} + 2\mu(g_{11} + ig_{12}) &= \varphi'(z). \end{aligned}$$

Внешнее давление  $p$  ортогонально деформированным поверхностям берегов трещины, поэтому граничные условия на трещине зависят от ее деформации:

$$[s_{22} - is_{21}]^{\pm}(t) = -p [g_{11} + ig_{21}]^{\pm}(t), \quad (9)$$

где  $t \in (-a, a)$ ,  $a$  — полудлина трещины.

Преобразуем условия (9) с использованием формул (3), (4) и (7):

$$[s_{22} - is_{21}]^{+}(t) = -\frac{p}{2\mu_2 - p} [\varphi_2'(t)]^{+}, \quad [s_{22} - is_{21}]^{-}(t) = -\frac{p}{2\mu_1 - p} [\varphi_1'(t)]^{-}. \quad (10)$$

Индексами 1 и 2 отмечены параметры и функции, относящиеся к нижней  $S_1$  и верхней  $S_2$  полуплоскостям соответственно. Правые части граничных условий (10) содержат искомые функции.

Найти аналитическое решение уравнений (10), где напряжения  $(s_{22} - is_{21})$  представлены формулами (8), невозможно без предварительных преобразований. Введя две комплексные функции  $h(z)$  и  $r(z)$  [3], аналитические во всей плоскости, кроме межфазной линии, придем к граничным задачам Римана — Гильберта нахождения кусочно голоморфной функции по ее скачку [1]:

$$[h(z)]^{+} - [h(z)]^{-} = \Delta s(t), \quad [r(z)]^{+} - [r(z)]^{-} = \Delta g(t). \quad (11)$$

Скачки напряжений и деформаций в уравнениях (11) определяются по формулам

$$\Delta s(t) = -p \Delta g(t) = -\frac{p}{2\mu_2 - p} [\varphi_2'(t)]^{+} + \frac{p}{2\mu_1 - p} [\varphi_1'(t)]^{-}.$$

С учетом этих выражений, уравнения (11) приводятся к виду

$$r^{+}(t) + \delta(p)r^{-}(t) = f(p), \quad (12)$$

$$(h + pr)^{+}(t) - (h + pr)^{-}(t) = 0. \quad (13)$$

Параметры  $\delta(p)$  и  $f(p)$  зависят от модулей упругости и давления  $p$ :

$$\delta(p) = \frac{2\mu_2 - p}{2\mu_1 - p} \cdot \frac{2\mu_1 c_1 + p}{2\mu_2 c_2 + p} \cdot \frac{\mu_1 + \mu_2 c_2}{\mu_2 + \mu_1 c_1},$$

$$\begin{aligned} f(p) = \frac{2\mu_1 \mu_2 (1 - c_1 c_2) - p\mu_1 (1 + c_1) - p\mu_2 (1 + c_2)}{[\mu_1 (2\mu_2 - p) + \mu_2 (2\mu_1 - p)](\mu_2 + \mu_1 c_1)} \times \\ \times \frac{4\mu_1 \mu_2 - p(\mu_1 + \mu_2)}{(2\mu_1 - p)(2\mu_2 c_2 + p)} (h + pr)(\infty). \end{aligned}$$

Решение уравнения (12) будет различным для положительных и отрицательных значений параметра  $\delta(p)$ , который определяется величиной давления  $p$ . Пусть  $\mu_1 <$

$\mu_2$ , тогда при  $p < 2\mu_1$  и  $p > 2\mu_2$  параметр  $\delta > 0$ , а при  $2\mu_1 < p < 2\mu_2$  имеем  $\delta < 0$ . Далее рассмотрим отдельно три случая.

Если  $\delta > 0$ , то решения уравнений (12), (13) будут такими:

$$r(z) = r(\infty) + B[1 - (z - 2i\beta a)X(z)], \quad (14)$$

$$(h + pr)(z) = (h + pr)(\infty),$$

$$X(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} \left( \frac{z+a}{z-a} \right)^{i\beta}, \quad \beta = \frac{\ln|\delta|}{2\pi},$$

$$B = \frac{f(p)}{1+\delta} - r(\infty), \quad h(\infty) = \frac{2\mu_1 c_1}{1+c_1} + \frac{2\mu_2 c_2}{1+c_2}, \quad r(\infty) = \frac{1 - c_1 c_2}{(1+c_1)(1+c_2)}.$$

Функция  $X(z)$  на трещине удовлетворяет уравнению  $X^+(t) + \delta X^-(t) = 0$ .

В промежутке  $2\mu_1 < p < 2\mu_2$  изменения давления  $p$  параметр  $\delta < 0$ . В этом случае решение уравнения (12) остается ограниченным вблизи концов трещины [1]:

$$r(z) = \frac{f(p)}{1+\delta} [1 - X_*(z)] + X_*(z)r(\infty), \quad (15)$$

$$X_*(z) = \left( \frac{z-a}{z+a} \right)^{i\beta}.$$

В формуле (15) предполагается, что  $\delta \neq -1$ . При  $\delta = -1$  решение (15) обращается в бесконечность. Этому значению параметра  $\delta$  соответствует критическое давление, которое является положительным корнем уравнения  $\delta + 1 = 0$ . Можно показать, что корень находится в интервале  $2\mu_1 < p < 2\mu_2$ .

**3. Анализ напряжений и перемещений.** Далее более подробно исследуем случай, когда в уравнениях (12), (13) параметр  $\delta > 0$ . Этот случай представляет наибольший теоретический и практический интерес, ему соответствуют давления на трещине  $p < 2\mu_1$  или  $p > 2\mu_2$ , предполагается  $\mu_1 < \mu_2$ .

Построим асимптотические разложения номинальных напряжений (8) в окрестности конца трещины. Положим  $z = a + re^{i\theta}$ , где  $r$  — расстояние от конца трещины,  $\theta$  — полярный угол. Разложения номинальных напряжений при  $r \rightarrow 0$  для нижней полуплоскости имеют вид

$$s_{11} + is_{12} = \mu_1 \left[ c_1 \frac{2\mu_2 - p}{\mu_2 + \mu_1 c_1} (re^{i\theta})^{-0,5-i\beta} - \frac{p + 2\mu_2 c_2}{\mu_1 + \mu_2 c_2} (re^{-i\theta})^{-0,5-i\beta} \right] A_0 + O(1), \quad (16)$$

$$s_{22} - is_{21} = \mu_1 \left[ c_1 \frac{2\mu_2 - p}{\mu_2 + \mu_1 c_1} (re^{i\theta})^{-0,5-i\beta} + \frac{p + 2\mu_2 c_2}{\mu_1 + \mu_2 c_2} (re^{-i\theta})^{-0,5-i\beta} \right] A_0 + O(1).$$

Разложения для верхней полуплоскости получим циклической перестановкой индексов в правых частях равенств (16). Постоянная  $A_0$  зависит от модулей упругости материалов и давления  $p$ .

Для номинальных напряжений и истинных напряжений Коши справедливы соотношения [15]

$$s_{11} + is_{12} = \varkappa_1(t_{11} + it_{12}), \quad s_{22} - is_{21} = \varkappa_2(t_{22} - it_{21}).$$

Кратности изменения площади выражаются через компоненты градиента деформации по формулам

$$\varkappa_1 = \sqrt{g_{22}^2 + g_{12}^2}, \quad \varkappa_2 = \sqrt{g_{11}^2 + g_{21}^2}.$$

Можно показать, что кратности изменения площади имеют особенность  $1/\sqrt{r}$  при  $r \rightarrow 0$ . Следовательно, напряжения Коши не имеют особенности у концов трещины.

Коэффициенты интенсивности номинальных напряжений (КИН) для правого и левого концов трещины будем определять по формулам

$$K^+ = (K_1 - iK_2)^+ = \sqrt{2\pi} \lim_{\xi \rightarrow 1+0} [(\xi - 1)^{0,5+i\beta} (s_{22} - is_{21})(\xi)],$$

$$K^- = (K_1 - iK_2)^- = \sqrt{2\pi} \lim_{\xi \rightarrow -1-0} [(-\xi - 1)^{0,5-i\beta} (s_{22} - is_{21})(\xi)],$$

где  $\xi = x_1/a$  — безразмерная переменная. По форме записи эти формулы похожи на аналогичные формулы линейной теории упругости, но содержание их другое. В них участвуют номинальные напряжения нелинейной теории упругости, которых нет в линейной теории. Такие формулы для КИН использовались нами и раньше, например в работах [10, 13]. В отличие от линейной задачи, где КИН имеют реальный физический смысл [22], здесь КИН введены формально.

Для напряжений  $(s_{22} - is_{21})(\xi)$  на межфазной линии вне трещины  $|\xi| > 1$  справедливо равенство

$$[s_{22} - is_{21}]^+(\xi) = [s_{22} - is_{21}]^-(\xi) = K(r - Dh)(\xi) = A[1 - (\xi - 2i\beta)X(\xi)],$$

где

$$A = KB(1 + pD),$$

$$K = 2\mu_1\mu_2 \frac{c_1(\mu_1 + \mu_2 c_2) + c_2(\mu_2 + \mu_1 c_1)}{(\mu_1 + \mu_2 c_2)(\mu_2 + \mu_1 c_1)},$$

$$D = \frac{1}{2} \frac{1 - c_1 c_2}{c_1(\mu_1 + \mu_2 c_2) + c_2(\mu_2 + \mu_1 c_1)}.$$

После вычислений получим такие значения КИН:

$$K^+ = -A\sqrt{\pi}(1 - 2i\beta)2^{i\beta}, \quad K^- = +A\sqrt{\pi}(1 + 2i\beta)2^{-i\beta}.$$

Перемещения верхнего и нижнего берегов трещины удобно определять с помощью формул, следующих из (9), (10),

$$[g_{11} + ig_{21}]^+ = [1 + u'_1 + iu'_2]^+ = \frac{1}{2\mu_2 - p} [\varphi'_2(z)]^+,$$

$$[g_{11} + ig_{21}]^- = [1 + u'_1 + iu'_2]^- = \frac{1}{2\mu_1 - p} [\varphi'_1(z)]^-.$$

Перемещения  $u_1$  и  $u_2$  получим интегрированием этих равенств, заменив предварительно комплексные функции в правых частях выражениями [3]

$$\varphi'_2(z) = \frac{\mu_2(1 + c_2)}{\mu_1 + \mu_2 c_2} [h(z) + 2\mu_1 r(z)], \quad \varphi'_1(z) = \frac{\mu_1(1 + c_1)}{\mu_2 + \mu_1 c_1} [h(z) + 2\mu_2 r(z)].$$

Наибольший интерес представляют перемещения по нормали к трещине, которые приведены ниже,

$$u_2^+ = -\sqrt{\delta} \frac{2\mu_1 - p}{2\mu_2 - p} \frac{\mu_2(1 + c_2)}{\mu_1 + \mu_2 c_2} B \sqrt{1 - \xi^2} \cos \left[ \beta \ln \frac{1 + \xi}{1 - \xi} \right], \quad \xi \in (-1, 1),$$

$$u_2^- = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \frac{2\mu_2 - p}{2\mu_1 - p} \frac{\mu_1(1 + c_1)}{\mu_2 + \mu_1 c_1} B \sqrt{1 - \xi^2} \cos \left[ \beta \ln \frac{1 + \xi}{1 - \xi} \right], \quad \xi \in (-1, 1).$$

При вычислении перемещений использована формула

$$\int (z - 2i\beta a) X(z) dz = (z^2 - a^2) X(z).$$

Найдем скачок перемещений (раскрытие трещины). Согласно формуле (11) имеем

$$\Delta g(t) = \Delta(u_1' + iu_2')(t) = r^+(t) - r^-(t) = -B(t - 2i\beta a)[X^+(t) - X^-(t)].$$

Проинтегрировав это равенство, получим

$$\Delta u_2(t) = -aB \frac{1 + \delta}{\sqrt{\delta}} \sqrt{1 - \xi^2} \cos \left[ \beta \ln \frac{1 + \xi}{1 - \xi} \right], \quad \xi \in (-1, 1).$$

Были выполнены расчеты перемещений берегов трещины. На рис. 1, 2 показаны перемещения берегов трещины  $u_2(\xi)$ , отнесенные к  $a$ , при давлении  $p = 1,0$  МПа и  $p = 1,8$  МПа. Модули сдвига материалов полуплоскостей таковы:  $\mu_1 = 1$  МПа,  $\mu_2 = 3$  МПа, коэффициент Пуассона:  $\nu_1 = \nu_2 = 0,49$ . Сплошная линия соответствует нелинейной задаче, пунктирная — линейной. Отличие величины перемещений по двум теориям более проявляется в нижней полуплоскости с меньшим модулем сдвига, чем в верхней. На рис. 2 наблюдается осцилляция перемещений у концов трещины.

**4. Заключение.** В работе получено точное аналитическое решение практически важной нелинейной проблемы теории упругости композиционных материалов с межфазными трещинами при действии следящего нормального давления на берегах. Существенно, что граничные условия на трещине зависят от деформации ее берегов. Если граничные условия на трещине не зависят от деформации, т. е. внешняя нагрузка является «мертвой», то критические давления в решении задачи не возникают и потеря устойчивости материала не происходит [3]. Критические давления появляются только в случае следящей нагрузки, когда давление ортогонально поверхности деформированных берегов трещины.

В процессе решения уравнений (12), (13) были выявлены три особых значения параметра  $\delta$ , а именно,  $\delta = \infty$ ,  $\delta = 0$  и  $\delta = -1$ , которым соответствуют критические величины давления:  $p_1 = 2\mu_1$ ,  $p_2 = 2\mu_2$  и  $p_* \in (2\mu_1, 2\mu_2)$ . Формулы (10) и последующие формулы теряют смысл при критических давлениях на трещине, равных  $p_1 = 2\mu_1$  и  $p_2 = 2\mu_2$ . При приближении к этим критическим значениям максимальные перемещения берегов трещины стремятся к бесконечности. Отметим, что в случае однородной плоскости с трещиной, когда  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ , получим значения параметров  $\delta = 1$ ,  $\beta = 0$ . Здесь существует только одно критическое давление  $p = 2\mu$ . Величина полученных критических давлений выглядит правдоподобной, в частности их связь с модулями сдвига материала. В работе Н. А. Алфутова [23] показано,

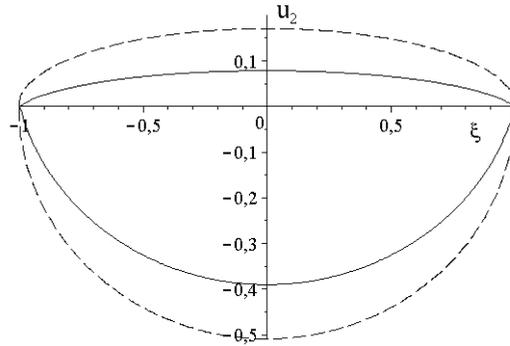


Рис. 1. Перемещения берегов трещины при давлении  $p = 1,0$  МПа.

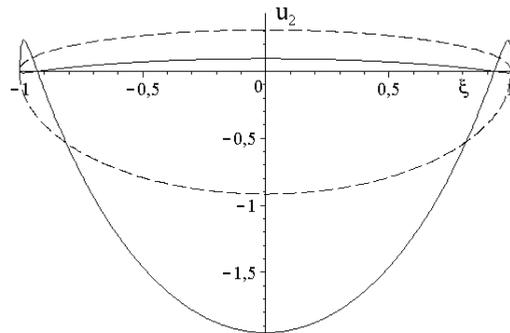


Рис. 2. Перемещения берегов трещины при давлении  $p = 1,8$  МПа.

что критическое давление (на единицу площади) при одноосном сжатии резинового куба равно модулю сдвига материала  $\mu$ .

Решение (14) и другие формулы, в частности выражение для скачка перемещений (17), при  $\beta \neq 0$  содержат осциллирующие слагаемые у концов трещины. В окрестностях концов трещины решение меняет знак бесконечное множество раз, при этом может происходить наложение берегов. Известно [22], что в линейных задачах растяжения композитной плоскости с межфазной трещиной область осцилляции занимает весьма малую часть от полудлины трещины порядка  $10^{-8} - 10^{-4}$ , поэтому в подавляющем большинстве работ наложение берегов трещины не учитывают. В нелинейных задачах о межфазных трещинах имеет место аналогичная ситуация. В задачах сдвига композитной плоскости с межфазной трещиной область осцилляции может занимать значительную часть длины трещины. В рассматриваемой нелинейной задаче область осцилляции у концов трещины также мала при относительно небольших давлениях порядка модуля сдвига материала — рис. 1, однако, когда давление приближается к критическому значению, осцилляция становится заметна — рис. 2.

Реальная достижимость критических давлений определяется упругими свойствами резиноподобных материалов (их низким модулем сдвига). Для жестких материалов (в частности, металлов), имеющих большой модуль сдвига, критические давления на практике не достигаются. Кроме того, в таких материалах не может

быть больших деформаций в упругой области. Существование критических давлений характерно не только для модели полулинейного материала. Например, для гармонического материала Джона наблюдаются те же эффекты [10].

## Литература

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
2. *Малькова Ю. В.* Некоторые задачи для двухкомпонентной плоскости с криволинейными трещинами. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2008.
3. *Мальков В. М., Малькова Ю. В.* Плоские задачи упругости для полулинейного материала // Вестн. С.-Петербур. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2012. Вып. 3. С. 93–106.
4. *Ru C. Q.* Finite strain singular field near the tip of a crack terminated at material interface // Math. and Mech. of Solids. 1997. Vol. 2, N1. P. 49–73.
5. *Ru C. Q.* On complex-variable formulation for finite plane elastostatics of harmonic materials // Acta Mechanica. 2002. Vol. 156, N3–4. P. 219–234.
6. *Ru C. Q.* Non-elliptic deformation field near the tip of a mixed-mode crack in a compressible hyperelastic material // Intern. J. of Non-Linear Mech. 2003. Vol. 38, N4. P. 521–530.
7. *Legrain G., Moës N., Verroen E.* Stress analysis around crack tips in finite strain problems using the extended finite element method // Intern. J. for Numerical Methods in Eng. 2005. Vol. 63, N2. P. 290–314.
8. *Abeyaratne R., Yang J. S.* Localized shear deformations near the tip of a mode-I crack // J. of Elasticity. 1987. Vol. 17, N2. P. 93–112.
9. *Мальков В. М., Малькова Ю. В.* Плоская задача нелинейной упругости для гармонического материала // Вестн. С.-Петербур. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2008. Вып. 3. С. 114–126.
10. *Мальков В. М., Малькова Ю. В., Степанова В. А.* Двухкомпонентная плоскость из материала Джона с межфазной трещиной, нагруженной давлением // Вестн. С.-Петербур. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2013. Вып. 3. С. 113–125.
11. *Мальков В. М., Малькова Ю. В.* Плоские задачи о сосредоточенных силах для полулинейного материала // Вестн. С.-Петербур. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2013. Вып. 3. С. 83–96.
12. *Мальков В. М., Малькова Ю. В., Доманская Т. О.* Анализ напряжений двухкомпонентной плоскости и полуплоскости при действии сосредоточенной силы для двух моделей гармонического материала // Вестн. С.-Петербур. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. Вып. 1. С. 38–52.
13. *Domanskaya T. O., Malkov V. M., Malkova Yu. V.* Bi-material plane with interface crack for the model of semi-linear material // International Conference on Mechanics — Eight Polyakhov's Reading, AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959. Art. no. 070009. <https://doi.org/10.1063/1.5034684>
14. *Морозов Н. Ф.* Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984.
15. *Мальков В. М.* Основы математической нелинейной теории упругости. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2002.
16. *John F.* Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type // Commun. Pure and Appl. Math. 1960. Vol. 13, N2. P. 239–296.
17. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
18. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970.
19. *Zubov L. M.* Nonlinear theory of dislocations and declinations in elastic bodies. Berlin: Springer, 1997.
20. *Еремеев В. А., Zubov L. M.* Некоторые проблемы устойчивости трехмерных нелинейно-упругих тел // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 1999. №1. С. 42–47.
21. *Чернык К. Ф., Литвиненкова З. Н.* Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1988.
22. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
23. *Алфутов Н. А.* Основы расчета на устойчивость упругих систем. М., 1978.

Статья поступила в редакцию 7 апреля 2019 г.;  
после доработки 12 сентября 2019 г.;  
рекомендована в печать 19 сентября 2019 г.

Контактная информация:

Мальков Вениамин Михайлович — д-р физ.-мат. наук, проф.; v.malkov@spbu.ru

Малькова Юлия Вениаминовна — канд. физ.-мат. наук, доц.; y.malkova@spbu.ru

## Investigation of the large deformations of composite plane with interface crack loaded by uniform pressure

V. M. Mal'kov, Yu. V. Mal'kova

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

**For citation:** Mal'kov V. M., Mal'kova Yu. V. Investigation of the large deformations of composite plane with interface crack loaded by uniform pressure. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 1, pp. 141–153. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.114> (In Russian)

The analytical solution to a nonlinear problem of elasticity for the composite plane formed by connection of two half-planes from different materials with an interface crack is obtained. The elastic properties of half-planes are modeled by semi-linear harmonic material. External loading is uniform pressure, which is orthogonal to the deformed surfaces of a crack coasts, the stresses at infinity are absent. For the solution to a nonlinear plane problem methods of the theory of the complex variable functions are used. An existence of critical values of pressure at the coasts of a crack which excess conducts to loss of stability of a material and to large post-critical displacements, deformations and stresses in a vicinity of a crack is established. The critical pressures have the order of the shear modules of the materials and are really possible for low-modules rubber-like materials (elastomers). For the rigid materials with the large module of shear, in particular metals, the critical pressures really are not achieved. The formulas for disclosing of the crack coasts depending on value of pressure and parameters of materials are obtained, the plots of displacements of the crack surfaces for different values of pressure are presented. On the base of a common solution the asymptotic expansions are constructed for nominal (Piola) and Cauchy stresses in vicinities of a crack ends. The nominal stresses have the root singularities, the Cauchy stresses have no singularities at the tips of crack.

*Keywords:* nonlinear plane problem, composite plane, interface crack, semi-linear material, complex-variable methods.

## References

1. Muskhelishvili N. I., *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity* (Springer, Netherlands, 1977).
2. Mal'kova Yu. V., *Some problems for bi-material plane with curvilinear cracks* (St. Petersburg University Press, St. Petersburg, 2008).
3. Mal'kov V. M., Mal'kova Yu. V., "Plane problems of elasticity for semi-linear material", *Vestnik of Saint Petersburg University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, issue 3, 93–106 (2012). (In Russian)
4. Ru C. Q., "Finite strain singular field near the tip of a crack terminated at material interface", *Math. and Mech. of Solids* **2** (1), 49–73 (1997).
5. Ru C. Q., "On complex-variable formulation for finite plane elastostatics of harmonic materials", *Acta Mechanica* **156** (3–4), 219–234 (2002).
6. Ru C. Q., "Non-elliptic deformation field near the tip of a mixed-mode crack in a compressible hyperelastic material", *Intern. J. of Non-Linear Mech.* **38** (4), 521–530 (2003).
7. Legrain G., Moës N., Verron E., "Stress analysis around crack tips in finite strain problems using the extended finite element method", *Intern. J. for Numerical Methods in Eng.* **63** (2), 290–314 (2005).
8. Abeyaratne R., Yang J. S., "Localized shear deformations near the tip of a mode-I crack", *J. of Elasticity* **17** (2), 93–112 (1987).

9. Mal'kov V. M., Mal'kova Yu. V., "Plane problem of non-linear elasticity for harmonic material", *Vestnik of Saint Petersburg University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, issue 3, 114–126 (2008). (In Russian)
10. Mal'kov V. M., Mal'kova Yu. V., Stepanova V. A., "Bi-material plane of John's material with interface crack loaded by pressure", *Vestnik of Saint Petersburg University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, issue 3, 113–125 (2013). (In Russian)
11. Mal'kov V. M., Mal'kova Yu. V., "Plane problems on concentrated forces for semi-linear material", *Vestnik of Saint Petersburg University. Ser. 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, issue 3, 83–96 (2013). (In Russian)
12. Mal'kov V. M., Mal'kova Yu. V., Domanskaya T. O., "Analysis of stresses in bi-material plane and half-plane under action of concentrated force for two models of harmonic materials", *Vestnik of Saint Petersburg University. Ser. 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, issue 1, 38–52 (2016). (In Russian)
13. Domanskaya T. O., Mal'kov V. M., Mal'kova Yu. V., "Bi-material plane with interface crack for the model of semi-linear material", *Intern. Conference on Mechanics — Eight Polyakhov's Reading, AIP Conference Proceedings* **1959**, 070009 (2018).
14. Morozov N. F., *Mathematical problems of the theory of cracks* (Moscow, 1984). (In Russian)
15. Mal'kov V. M., *Foundations of non-linear mathematical elasticity* (St. Petersburg, 2002). (In Russian)
16. John F., "Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type", *Commun. Pure and Appl. Math.* **13** (2), 239–296 (1960).
17. Lurie A. I., *Non-linear theory of elasticity* (North Holland, 1990).
18. Lurie A. I., *Theory of elasticity* (Moscow, 1970).
19. Zubov L. M., *Nonlinear theory of dislocations and declinations in elastic bodies* (Springer, Berlin, 1997).
20. Eremeyev V. A., Zubov L. M., "Some problems of stability of three-dimensions nonlinear elastic bodies", *News of high schools. Severo-Kavkazsky Region. Natural sciences*, issue 1, 42–47 (1999). (In Russian)
21. Chernykh K. F., Litvinenkova Z. N., *Theory of large elastic deformations* (Leningrad, 1988). (In Russian)
22. Cherepanov G. P., *Mechanics of brittle fracture* (McGraw Hill Higher Education, 1980).
23. Alfutov N. A., *Stability of elastic structures (Foundations of Engineering Mechanics)* (Springer, Berlin, 2000).

Received: April 7, 2019  
 Revised: September 12, 2019  
 Accepted: September 19, 2019

Authors' information:

Veniamin M. Mal'kov — v.malkov@spbu.ru  
 Yuliya V. Mal'kova — y.malkova@spbu.ru