УДК 531.3 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 1
MSC 70E55

Управление движением козлового крана с грузом заданием ускорения

Т. С. Шугайло

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Шугайло Т. С.* Управление движением козлового крана с грузом заданием ускорения // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 1. С. 154–164.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.115

В работе рассматривается возможный подход к осуществлению управления движением портального крана при перемещении груза. Предложено два различных метода отыскания управляющего ускорения, обеспечивающего гашение колебаний перемещаемого груза. Один из предложенных методов основан на применении широко распространенного классического принципа максимума Понтрягина. Второй метод с применением обобщенного принципа Гаусса основан на новейших исследованиях в области неголономной механики со связями высших порядков. Новый метод опирается на результаты применения классического и может быть использован как совершенно независимый подход к решению различных задач управления.

Ключевые слова: принцип максимума Понтрягина, обобщенный принцип Гаусса, оптимальное управление, гашение колебаний.

1. Введение. Сильный рост объема грузоперевозок в последние десятилетия стал причиной создания широкого спектра специальных погрузочно-разгрузочных устройств и резкого увеличения их количества. Наибольшее распространение среди них получили мостовые краны на рельсовом ходу.

Вследствие того, что перемещаемый груз связан с погрузочной системой посредством троса, в начале и в конце движения, при разгоне и торможении возникает раскачивание груза, что оказывает негативное влияние на скорость процесса погрузки и разгрузки. Для достижения наибольшей эффективности работы современные портальные краны оснащены разнообразными системами гашения качки, имеющими свои преимущества и недостатки. Однако существует огромное количество кранов старых конструкций, полностью лишенных каких-либо систем автоматической стабилизации. Кроме того, часть современных кранов производится без систем автоматической стабилизации с целью снижения их себестоимости, повышения надежности и эксплуатационных характеристик. В дополнение к этому отметим, что все более возрастающая автоматизация технологических процессов обуславливает необходимость перевода подобных устройств в автоматический режим с целью увеличения скорости рабочего цикла и повышения грузооборота при работе без человеческого вмешательства.

В работе представлен способ гашения раскачки нахождением формы управляющего сигнала на всем промежутке транспортировки груза. Рассматриваются два возможных подхода к отысканию управляющего ускорения, обеспечивающего гашение раскачивания груза при перемещении портальным краном за заданный интервал времени. Рассматриваемые методы имеют существенные различия в подходе к решению поставленной задачи, однако тесно связаны между собой. Один из них, принцип максимума Понтрягина [1], основан на вариационном исчислении и известен как наиболее распространенный классический метод для решения подобных задач. Второй, обобщенный принцип Гаусса [2], основан на современных подходах к решению задач управления методами неголономной механики со связями высших порядков [3].

2. Математическая модель системы. В процессе погрузки кран часто сначала занимает такую позицию, при которой его мост оказывается на линии места хранения груза и места, куда груз необходимо переместить (например, грузовой вагон поезда). При этом процесс погрузки осуществляется в несколько подходов движения грузовой каретки, без существенного изменения позиции крана. Однако небольшие смещения крана часто бывают необходимы для корректировки точности расположения груза. В связи с этим разделим задачу о переносе груза на два этапа. Сначала переведем погрузочную каретку вдоль моста. Затем переведем кран вдоль направляющих рельсов на небольшое расстояние. При таком способе транспортировки погрузочная каретка, как и козловой кран, могут быть представлены в виде движущейся по горизонтальной прямой тележки с подвешенным на нее маятником, где тележка представляет грузовую каретку или всю конструкцию крана соответственно способу движения, а маятник — это переносимый краном груз (рис. 1). Здесь приняты следующие обозначения: x — ось в направлении движения тележки, m — масса погрузочной каретки или всей конструкции крана соответственно способу движения, m_1 — масса груза, l — длина подвеса груза, F — сила, действующая на погрузочную каретку или на кран со стороны приводных устройств, φ — угол отклонения подвеса груза от вертикали.

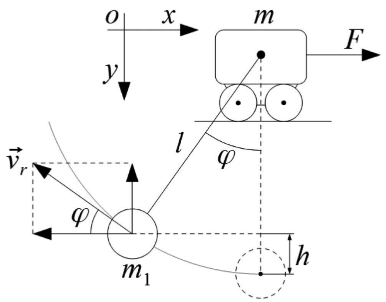

Рис. 1. Механическая модель системы.

В рассматриваемых обобщенных криволинейных координатах линеаризованные по φ уравнения Лагранжа второго рода [4] примут вид

$$\begin{cases} M\ddot{x} - ml\varphi = F\,, \\ \ddot{x} = l\ddot{\varphi} + g\varphi\,, \end{cases} \tag{1}$$

здесь $M = m + m_1$. В предыдущих работах подробно рассматривался процесс управления козловым краном заданием управляющего усилия [5]. Рассмотрим теперь задачу, в которой будем осуществлять управление системой прямым заданием ускорения точки подвеса [6, 7]. С этой целью первое уравнение линейной системы запишем как $\ddot{x} = a$, в результате получим систему

$$\begin{cases} \ddot{x} = a\,, \\ \ddot{x} = l\ddot{\varphi} + g\varphi\,. \end{cases} \tag{2}$$

Заметим, что усилие, обеспечивающее отыскиваемое управляющее ускорение, имеет вид $F = Ma - ml\varphi$.

Заменой

$$\begin{gathered} u = \frac{a}{g}\,, \quad q_1 = \frac{x}{l}\,, \\ q_2 = \varphi\,, \quad \tau = \sqrt{\frac{g}{l}}t \end{gathered} \tag{3}$$

перейдем к нормальным безразмерным координатам. В этом случае уравнения (2) перепишутся как

$$\begin{cases} q_1'' = u\,, \\ q_2'' + q_2 = u\,, \end{cases} \tag{4}$$

где τ — безразмерное время, а u — безразмерное управление. Штрихи обозначают дифференцирование по безразмерному времени τ.

Размерные условия на концах движения можно записать как

$$\begin{aligned} x(t_0) = x_0\,, \quad \dot{x}(t_0) = v_0\,, \quad \varphi(t_0) = \varphi_0\,, \quad \dot{\varphi}(t_0) = \omega_0\,, \\ x(t_1) = x_1\,, \quad \dot{x}(t_1) = v_1\,, \quad \varphi(t_1) = \varphi_1\,, \quad \dot{\varphi}(t_1) = \omega_1\,, \end{aligned} \tag{5}$$

здесь x_0 и v_0 обозначают положение и скорость тележки в начальный момент $t = t_0$, а φ_0 и ω_0 — начальные отклонение маятника от крайнего нижнего положения и угловая скорость (в нашем случае по часовой стрелке), x_1, v_1, φ_1, ω_1 — аналогичные величины в конце движения в момент времени $t = t_1$.

Согласно формулам замены (3) условия на концах движения в безразмерных координатах примут вид

$$\begin{gathered} q_1(\tau_\sigma) = \frac{x_\sigma}{l} = q_{1\sigma}^0\,, \quad q_1'(\tau_\sigma) = \frac{v_\sigma}{l} = q_{1\sigma}^1\,, \\ q_2(\tau_\sigma) = \varphi_\sigma\,, \quad q_2'(\tau_\sigma) = \omega_\sigma\,, \\ \tau_\sigma = \sqrt{\frac{g}{l}}t_\sigma\,, \quad \sigma = 0, 1\ . \end{gathered} \tag{6}$$

3. Два подхода к решению. Сначала решим поставленную задачу классическим широко распространенным методом с применением принципа максимума Понтрягина. В наших задачах, посвященных гашению колебаний, будем требовать минимальности функционала

$$J = \int_{\tau_0}^{\tau_1} u^2(\tau)d\tau\,. \tag{7}$$

При решении подобных задач такому же условию подчиняется выбор управления в монографии академика Ф. Л. Черноусько [8].

Необходимые условия минимальности (7) в случае уравнений движения (4) выражаются через функцию Гамильтона — Понтрягина

$$H = u^2 + \sum_{k=1}^{4} \lambda_k f_k$$

следующим образом [1]:

$$\lambda_k{}' = -\frac{\partial H}{\partial z_k}\,, \quad k = \overline{1, 2s}\,, \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 0\,. \tag{8}$$

В нашем случае

$$f_1 = z_2\,, \quad f_2 = u\,, \quad f_3 = z_4\,, \quad f_4 = u - z_3\,, \quad s = 2\,,$$

и система уравнений (8) примет вид

$$\begin{cases} \lambda_2{}'' = 0\,, \\ \lambda_4{}'' + \lambda_4 = 0\,, \\ 2u + \lambda_2 + \lambda_4 = 0\,, \end{cases} \tag{9}$$

откуда получается, что управление следует искать в виде

$$u(\tau) = C_0 + C_1\tau + C_2 \sin\tau + C_3 \cos\tau\,. \tag{10}$$

Эквивалентными преобразованиями сведем систему (9) к одному дифференциальному уравнению относительно управляющего воздействия u, затем перейдем обратно к размерным величинам по формулам (3) и подставим a из (2). В результате будем иметь дифференциальное уравнение шестого порядка, которое в операторном виде можно записать следующим образом:

$$\frac{l}{g}\frac{d^6x}{dt^6} + \frac{d^4x}{dt^4} = 0\,.$$

Как видно, управляющее воздействие, найденное путем минимизации функционала (7), может рассматриваться как реализация наложения на систему линейной идеальной неголономной связи шестого порядка на всем промежутке движения. При этом само управление является реакцией этой связи, действующей на систему, следовательно решение, найденное методом Понтрягина, равносильно решению некоторой неголономной задачи с наложением связей шестого порядка. Это дает возможность нам попытаться решить поставленную задачу методами неголономной механики со связями высших порядков, сформулированными в монографии [9].

Подробно процесс нахождения вида управляющего воздействия при решении подобной задачи методами неголономной механики высших порядков рассмотрен в [10]. Кратко обсудим основные моменты такого подхода. Для этого перейдем к анализу механической системы, на движение которой наложены линейные идеальные неголономные связи высокого порядка

$$f^{\varkappa}_{(n+2)} = \sum_{\sigma=1}^{s} a^{\varkappa}_{n+2,\sigma}(t, q, \dot q, \ldots, q^{(n+1)})q_\sigma^{(n+2)} + a^{\varkappa}_{n+2,0}(t, q, \dot q, \ldots, q^{(n+1)}) = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1, k}\,. \tag{11}$$

В этом случае уравнения движения могут быть записаны в виде одного векторного уравнения [9]

$$M\overrightarrow{W} = \overrightarrow{Y} + \overrightarrow{R}\,,$$

где $\overrightarrow{W}$ — обобщенное ускорение механической системы, $\overrightarrow{Y}$ — действующие на систему обобщенные внешние силы, $\overrightarrow{R}$ — вектор реакции, возникающий в результате действия наложенных связей. При наложении на систему связей (11) выполняется обобщенный принцип Гаусса [2] n-го порядка

$$\delta^{(n+2)} Z_{(n)} = 0\,, \quad Z_{(n)} = \frac{M}{2}\Big(\overrightarrow{W}^{(n)} - \frac{\overrightarrow{Y}^{(n)}}{M}\Big)^2. \tag{12}$$

Здесь индекс $(n+2)$ указывает на то, что частный дифференциал вычисляется при фиксированных t, q, $\dot{q}$, $\ldots$, $q^{(n+1)}$, а сам принцип утверждает, что вектор

$$\overrightarrow{R}^{(n)} = M\frac{d^n\overrightarrow{W}}{dt^n} - \frac{d^n\overrightarrow{Y}}{dt^n}$$

имеет наименьшую длину среди всех таких векторов, удовлетворяющих связям (11). Представим реакцию $\overrightarrow{R}$ как вектор управления, действующего на систему

$$\overrightarrow{R} = u(t)\,\overrightarrow{b}\,, \quad \overrightarrow{b} = b_\sigma\,\overrightarrow{e}^{\,\sigma}\,,$$

где вектор $\overrightarrow{b}$ соответствует технической реализации способа управления.

В случае связи шестого порядка согласно обобщенному принципу Гаусса (12) минимальной оказывается величина

$$(\overrightarrow{R}^{(4)})^2 = \Big(\frac{d^4u}{dt^4}\,\overrightarrow{b}\Big)^2. \tag{13}$$

Из всех возможных связей шестого порядка выберем то подмножество, для которого минимальная величина $(\overrightarrow{R}^{(4)})^2 \equiv 0$. В этом случае согласно (13) получаем уравнение

$$\frac{d^4u}{dt^4} = 0\,,$$

и управление принимает вид

$$u = C_0 + C_1\tau + C_2\tau^2 + C_3\tau^3\,. \tag{14}$$

4. Расширенная краевая задача и интегралы Дюамеля. Применение обобщенного принципа Гаусса позволяет нам внести существенные усовершенствования в решение поставленной задачи, выражающиеся в возможности расширить (5) произвольным количеством дополнительных граничных условий. В качестве примера дополним граничные условия парой

$$\ddot{x}(t_0) = w_0\,, \quad \ddot{x}(t_1) = w_1\,, \tag{15}$$

что в безразмерных координатах перепишется как

$$q_1''(\tau_\sigma) = \frac{Mw_\sigma}{ml} = q_{1\sigma}^2\,, \quad \sigma = 0, 1\,. \tag{16}$$

Сформулированную граничную задачу (4), (6), (16) назовем расширенной краевой задачей первого порядка. Отметим, что решить сформулированную расширенную (обобщенную) краевую задачу с помощью применения принципа максимума Понтрягина невозможно, так как полученное с его помощью управление будет содержать количество неизвестных произвольных постоянных, недостаточное для удовлетворения всех поставленных граничных условий.

Для того чтобы удовлетворить вновь наложенным дополнительным условиям на концах движения, увеличим порядок связи, реализующей управление, на два (с шестого до восьмого). В случае связи восьмого порядка согласно обобщенному принципу Гаусса (12) минимальной оказывается величина

$$(\overrightarrow{R}^{(6)})^2 = \Big(\frac{d^6 u}{dt^6}\overrightarrow{b}\Big)^2 , \tag{17}$$

откуда имеем

$$\frac{d^6 u}{dt^6} = 0 ,$$

а вид управляющего воздействия принимает форму

$$u = C_0 + C_1\tau + C_2\tau^2 + C_3\tau^3 + C_4\tau^4 + C_5\tau^5 . \tag{18}$$

Далее, не умаляя общности, полагаем, что начальный момент движения $t_0 = 0$. Для решения двухточечной задачи Коши удобно воспользоваться интегралами Дюамеля

$$\begin{aligned} q_1(\tau) &= q_{10}^0 + q_{10}^1\tau + \int_0^\tau u(\tau_1)(\tau - \tau_1)d\tau_1 , \\ q_2(\tau) &= \varphi_0 \cos\tau + \omega_0 \sin\tau + \int_0^\tau u(\tau_1)\sin(\omega_1(\tau - \tau_1))d\tau_1 , \end{aligned} \tag{19}$$

которые заведомо удовлетворяют условиям в начале движения из (6). Далее их следует подставить в условия в конце движения и в дополнительные граничные условия при необходимости, что позволит найти неизвестные произвольные постоянные, входящие в вид управляющего воздействия.

5. Численные расчеты. В качестве примера возьмем технические характеристики конкретной распространенной модели крана ККС-32. Данная модель давно зарекомендовала себя как крайне надежное и долговечное устройство при относительно низкой стоимости производства, обслуживания и эксплуатации. Список его наиболее важных для нас технических характеристик приведен в табл. 1.

Таблица 1. **Основные технические характеристики крана ККС-32**

Характеристика	Кран	Каретка
Масса движущегося устройства, кг	94000	8000
Максимальная развиваемая скорость $v_{\max}$, м/с	0.61	0.61
Номинальная тяга, кН	40	8
Максимальная высота подъема груза, м	12	
Длина моста крана, м	42	

Предположим, что нам необходимо переместить массу $m_1 = 17000$ кг на $S_1 = 32$ м вдоль моста и скорректировать положение крана на $S_2 = 2$ м. Длину подвеса будем считать равной $l = 8$ м (груз поднят на высоту четырех метров).

В начальный момент система покоится. После завершения движения система вновь должна принять фазовое состояние покоя. Соответствующие условия на концах движения имеют вид

$$
\begin{gathered}
x(0)=0\,,\quad \dot{x}(0)=0\,,\quad \varphi(0)=0\,,\quad \dot{\varphi}(0)=0\,,\\
x(t_1)=S_\gamma\,,\quad \dot{x}(t_1)=0\,,\quad \varphi(t_1)=0\,,\quad \dot{\varphi}(t_1)=0\,,\\
\gamma=1,2\,.
\end{gathered}
\tag{20}
$$

Следует отметить, что приводные устройства большинства мостовых кранов приводятся в действие асинхронными трехфазными электрическими двигателями с короткозамкнутыми роторами. Плавность пуска значительно увеличивает срок эксплуатации таких приводов, а также срок эксплуатации прилегающего электрооборудования и исполнительных устройств, работающих от их валов. Для обеспечения плавности нарастания управляющего сигнала как раз служат расширенные граничные условия (15) при $w_0=0$, $w_1=0$.

Продолжительность движения t_1 выбирается методом подбора, исходя из возможностей системы (табл. 1). При длительном движении погрузочной каретки наиболее существенным ограничением выступает максимальная скорость, развиваемая приводными устройствами, а при коротком движении крана наиболее существенна их номинальная тяга. При этом для каждого метода решения наилучшая продолжительность движения t_1 будет различной. Для наглядности удобно все величины, описывающие процесс перемещения груза свести в одну таблицу (см. табл. 2):

Таблица 2. **Физические величины, описывающие процесс перемещения груза**

Наименование физической величины	Движение крана	Движение каретки
Масса движущегося устройства m, кг	8000	94000
Масса груза m_1, кг	17	
Длина подвеса l, м	8	
Гравитационная постоянная g, м/с^2	9.8	
Дистанция движения S, м	32	3.3
Время движения t_1, с		
Классический метод	80.1	7.8
Метод неголономной механики	65.09	7.8
Расширенная краевая задача	73.46	7.8

Используя соответствующие значения для каждого случая (табл. 2), решаем систему (4) при граничных условиях в безразмерном виде (6), а затем переходим по формулам замены (3) к размерным величинам. Полученные в результате решения изображены на графиках (см. рис. 2, 3). Здесь точечной линией (под номером *3*) представлено решение расширенной краевой задачи (2), (5), (15) методами неголономной механики, штриховой (под номером *2*) — решение классическим методом и сплошной (под номером *1*) — решение с применением обобщенного принципа Гаусса.

Как видно на графиках полученных решений (рис. 3), при коротком времени движения классический метод и новый метод, основанный на теории движения неголономных систем со связями высокого порядка, дают очень близкие результаты, что подчеркивает их тесную связь, несмотря на фундаментальные различия в этих подходах. Однако решения, полученные этими двумя методами, в обоих случаях движения (рис. 2, 3) имеют существенный недостаток, выражающийся в скачкооб-

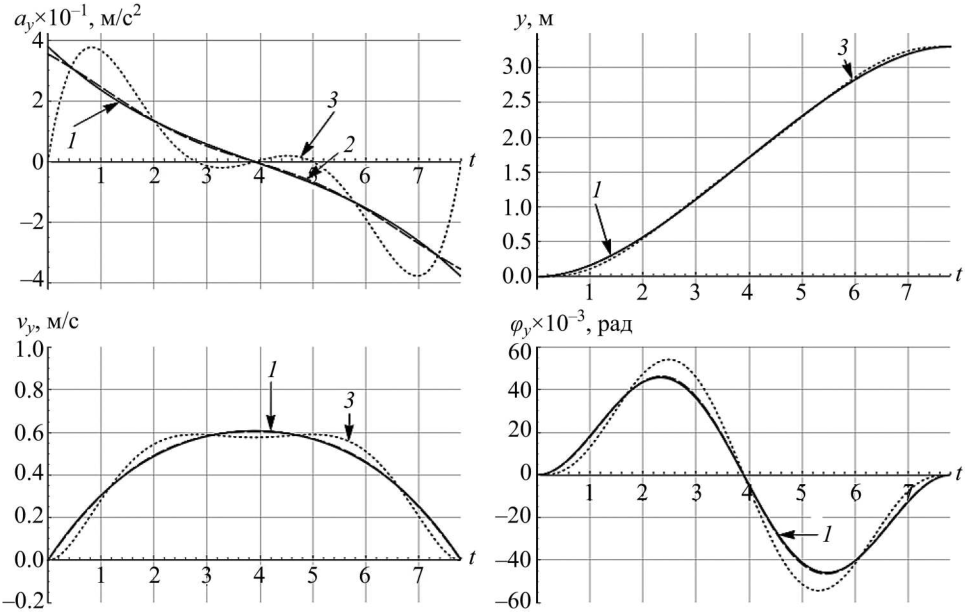

Рис. 2. Движение погрузочной каретки.

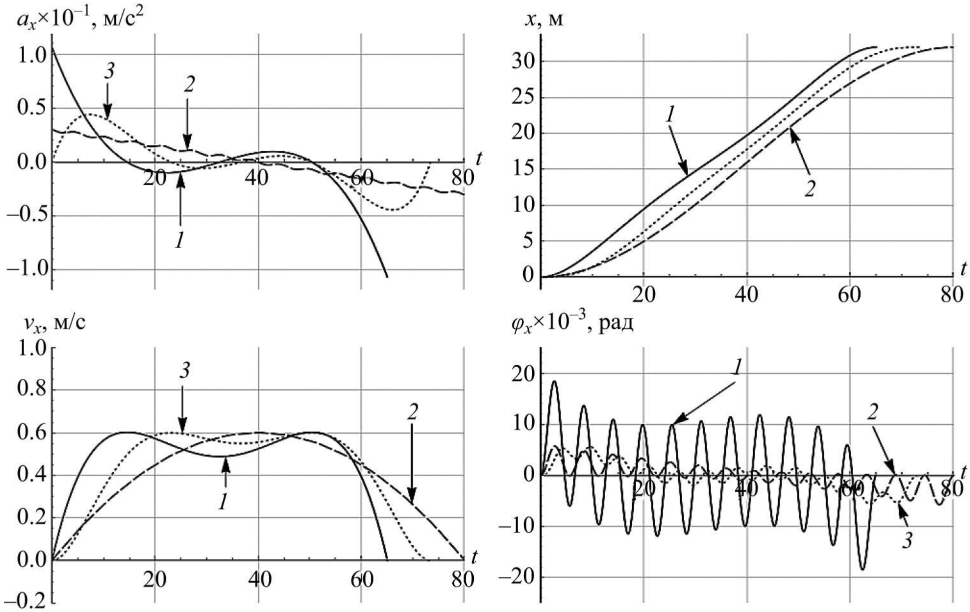

Рис. 3. Коррекция положения крана.

разном начале и завершении управляющего усилия, что существенно при управлении устройствами, приводящимися в движение асинхронными электродвигателями с короткозамкнутыми роторами, как в нашем случае. Побороть этот недостаток позволяет расширенная краевая задача (точечная линия *3* на графиках), которая применима лишь при решении задачи с помощью обобщенного принципа Гаусса. К преимуществам нового подхода также можно отнести его способность произвести транспортировку с гашением раскачки груза за более короткий промежуток времени (при действующих ограничениях на управляющее усилие и максимальную допустимую скорость системы), чем это позволяет сделать классический метод, основанный на применении принципа максимума Понтрягина. Это является одним из наиболее существенных критериев при осуществлении погрузочных и разгрузочных работ.

6. Заключение. В работе были представлены два подхода к решению задачи о перемещении механической системы за заданное время и на заданное расстояние с гашением возникающих в ней колебаний в конце движения с помощью нахождения оптимального управляющего ускорения. Один из этих подходов — классический, широко распространенный метод, основанный на принципе максимума Понтрягина, второй — новый, опирающийся на исследования последних лет в области неголономной механики высоких порядков с применением обобщенного принципа Гаусса. Представлена возможность нового метода на основе теории движения неголономных систем со связями высоких порядков вводить в рассмотрение дополнительные граничные условия, что невозможно при решении задачи с применением принципа максимума Понтрягина.

С целью решения задачи автоматического управления была построена математическая модель портального крана. Приведен алгоритм решения подобного вида задач несколькими способами — классическим, хорошо зарекомендовавшим себя методом, и новым, с применением обобщенного принципа Гаусса. На основе нового метода предложен подход, позволяющий строить плавно нарастающее управляющее усилие, что существенно увеличивает срок эксплуатации погрузочных устройств, приводимых в движение асинхронными электродвигателями, и прилегающего к ним электрооборудования.

Для конкретного примера выполнены численные расчеты с приведением полученных решений в виде графиков. Представлен краткий сравнительный анализ полученных численных результатов при решении поставленной задачи различными методами. Показана тесная связь между новым и классическим методами при фундаментальных различиях этих подходов. Показано, что при ограничениях на максимальную скорость и мощность приводных устройств новый метод, основанный на применении обобщенного принципа Гаусса, осуществляет транспортировку за более короткий промежуток времени, чем это позволяет сделать классический метод.

Литература

1. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.

2. *Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П.* Обобщение принципа Гаусса на случай неголономных систем высших порядков // Доклады Академии наук СССР. 1983. Т. 269, № 6. С. 1328–1330.

3. *Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П.* Неголономная механика: теория и приложения. М.: Физматлит, 2009.

4. *Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П.* Теоретическая механика. М.: Высшая школа, 2000.

5. *Shugailo T. S., Yushkov M. P.* Motion control of gantry crane with container // The Eighth Polyakhov's Reading: Proceedings of the International Scientific Conference on Mechanics. 2018. Vol. 1959. Art. no. 030021. https://doi.org/10.1063/1.5034576

6. *Зегжда С. А., Шатров Е. А., Юшков М. П.* Новый подход к нахождению управления, переводящего систему из одного фазового состояния в другое // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3. Вып. 2. С. 284–292. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.212

7. *Зегжда С. А., Шатров Е. А., Юшков М. П.* Гашение колебаний тележки с двойным маятником с помощью управления ее ускорением // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3. Вып. 4. С. 683–688. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.418

8. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980.

9. *Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П.* Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. Новый класс задач управления. М.: Физматлит, 2005.

10. *Zegzhda S. A., Yushkov M. P., Soltakhanov Sh. Kh., Naumova N. V., Shugailo T. S.* A novel approach to suppression of oscillations // ZAMM Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. 2018. Vol. 98, no. 5. P. 781–788.

Статья поступила в редакцию 13 июня 2019 г.;
после доработки 16 августа 2019 г.;
рекомендована в печать 19 сентября 2019 г.

Контактная информация:

Шугайло Тимофей Сергеевич — аспирант; shugaylotis@gmail.com

Motion control of a bridge crane with a load by finding its acceleration

T. S. Shugailo

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Shugailo T. S. Motion control of a bridge crane with a load by finding its acceleration. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 1, pp. 154–164. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.115 (In Russian)

A possible approach to controlling a bridge crane motion while moving cargo is considered. Two different methods for finding the controlling acceleration that providing vibration damping of the cargo being carried are suggested. The first of these methods is based on applying classical Pontryagin maximum principle. The second method, using generalised Gauss principle, is based on modern researches in nonholonomic mechanics. The new method relies on the results of applying the classical one and can be used as independent approach for solving various problems of control.

Keywords: Pontryagin maximum principle, generalised Gauss principle, optimal control, vibrations damping.

References

1. Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F., *The mathematical theory of optimal processes* (Interscience Publishers John Wiley and Sons Inc., New York; London, 1962).

2. Polyakhov N. N., Zegzhda S. A., Yushkov M. P., "Generalization of the Gauss principle to the case of non-holonomic high-order systems", *Doklady AN SSSR* **269**(6), 1328–1330 (1983).

3. Zegzhda S. A., Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P., *Nonholonomic mechanics: theory and application* (Fizmatlit Publ., Moscow, 2009). (In Russian)

4. Polyakhov N. N., Zegzhda S. A., Yushkov M. P., *Theoretical mechanics* (Vysshaya shkola Publ., Moscow, 2000). (In Russian)

5. Shugailo T. S., Yushkov M. P., "Motion control of gantry crane with container", *The Eighth Polyakhov's Reading: Proceedings of the International Scientific Conference on Mechanics* **1959**, 030021 (2018). https://doi.org/10.1063/1.5034576

6. Zegzhda S. A., Shatrov E. A., Yushkov M. P., "A new approach to finding the control that transports a system from one phase state to another", *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics* **49**(2), 183–190 (2016). https://doi.org/10.3103/S106345411602014X

7. Zegzhda S. A., Shatrov E. A., Yushkov M. P., "Suppression of oscillation of a trolley with a double pendulum by means of control of its acceleration", *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **61**(4), 683–688 (2016). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.418 (In Russian)

8. Chernousko F. L., Akulenko D., Sokolov B. N., *Control of oscillations* (Nauka Publ., Moscow, 1980). (In Russian)

9. Zegzhda S. A., Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P., *Mechanics of non-holonomic systems. A New Class of control systems* (Springer-Verlag, Berlin, 2009).

10. Zegzhda S. A., Yushkov M. P., Soltakhanov Sh. Kh., Naumova N. V., Shugailo T. S., "A novel approach to suppression of oscillations", *ZAMM Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* **98**(5), 781–788 (2018). https://doi.org/10.1002/zamm.201700005

Received: June 13, 2019
Revised: August 16, 2019
Accepted: September 19, 2019

Author's information:

Timofei S. Shugailo — shugaylotis@gmail.com