

О второй «рекордной производной» последовательности экспоненциальных случайных величин*

В. Б. Невзоров¹, А. В. Степанов²

¹ Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

² Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта,
Российская Федерация, 236041, Калининград, ул. А. Невского, 14

Для цитирования: Невзоров В. Б., Степанов А. В. О второй «рекордной производной» последовательности экспоненциальных случайных величин // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 1. С. 69–76. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.107>

Пусть Z_i ($i \geq 1$) — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих стандартную экспоненциальную функцию распределения H , а $Z(n)$ ($n \geq 1$) — соответствующая последовательность экспоненциальных рекордов, полученная из последовательности Z_i ($i \geq 1$). Назовем последовательность $Z(n)$ ($n \geq 1$) первой «рекордной производной» последовательности Z_i ($i \geq 1$). Известно, что величины $\nu_1 = Z(1), \nu_2 = Z(2) - Z(1), \dots$ независимы и имеют функцию распределения H . Пусть $T(n)$ ($n \geq 1$) — рекордные моменты в последовательности ν_1, ν_2, \dots , а $Y(n) = Z(T(n))$ и $W(n) = Y(n) - Y(n-1)$ ($n \geq 1$). Последовательность величин $Y(n)$ ($n \geq 1$) (главный объект исследований данной работы) назовем второй «рекордной производной» последовательности Z_i ($i \geq 1$). В настоящей работе выводятся распределения величин $T(n), Y(n)$ и $W(n)$ и ищется преобразование Лапласа величины $Y(n)$. В работе получен предельный результат для последовательности $Y(n)$ ($n \geq 1$) и предложены методы генерирования величин $T(n)$ и $Y(n)$.

Ключевые слова: рекордные величины, экспоненциальное распределение, предельные теоремы, методы генерирования рекордов.

1. Введение. Пусть X_1, X_2, \dots — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с непрерывной функцией распределения F . Пользуясь величинами X_i ($i \geq 1$), определим рекордные моменты $L(1) < L(2) < \dots$ и рекордные величины $X(1) < X(2) < \dots$ следующим образом:

$$\begin{aligned} L(1) &= 1, & X(1) &= X_1, \\ L(n) &= \min\{j : j > L(n-1), X_j > X_{L(n-1)}\} & (n = 2, 3, \dots), \\ X(n) &= X_{L(n)} & (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Рекордные величины весьма популярны во многих областях человеческой деятельности. О различных вновь появившихся рекордных наблюдениях сообщают спортивные статистики, метеорологи, гидрологи, финансисты, геронтологи. Теория рекордов достаточно хорошо развита (см., например, монографии [1, 2]), но регулярно появляется необходимость в изучении новых рекордных схем, в рассматривании новых

*Работа В. Б. Невзорова поддержана РФФИ (грант № 18-01-00393).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2020

моделей, отражающих те или иные неклассические ситуации, в которых для описания поведения рекордных последовательностей требуются новые приемы и новые результаты. Одна из таких ситуаций будет рассмотрена ниже.

В классической теории рекордов важное место занимают результаты, полученные для рекордов в исходных последовательностях равномерно и экспоненциально распределенных случайных величин. Дело в том, что в общем случае рекордные величины $X(1) < X(2) < \dots$, связанные последовательными неравенствами между ними, представляют собой наборы заведомо зависимых случайных величин, к которым нельзя применить широко распространенные методы теории вероятностей, разработанные именно для независимых величин. В этой ситуации заметно выделяются рекорды, порожденные последовательностями равномерно или экспоненциально распределенных величин. Для них существуют удобные представления этих зависимых рекордных величин в виде сумм независимых случайных слагаемых или произведений независимых случайных множителей. Одно из таких представлений будет использовано ниже для дальнейшего развития теории рекордов, связанной с последовательностями экспоненциально распределенных величин.

В работе уже было отмечено, что важное место в теории рекордов занимают результаты и методы, развитые при изучении экспоненциальных рекордов. Приведем некоторые из них. Пусть Z_1, Z_2, \dots — последовательность независимых случайных величин, имеющих $E(1)$ -экспоненциальное распределение с функцией распределения

$$H(x) = \max\{0, 1 - e^{-x}\} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

а $Z(1) = Z_1 < Z(2) < \dots$ — соответствующие экспоненциальные рекорды. Эту последовательность рекордов, которая порождена величинами Z_1, Z_2, \dots , можно трактовать, как «производную» (в дальнейшем ее будем называть «первой производной») последовательности исходных случайных величин. Известен следующий классический результат (см., например, [1, с. 12] или [2, с. 105]).

Представление 1.1. *Для любого $n = 1, 2, \dots$ имеет место следующее соотношение:*

$$(Z(1), Z(2), \dots, Z(n)) \stackrel{d}{=} (\nu_1, \nu_1 + \nu_2, \dots, \nu_1 + \dots + \nu_n), \quad (1.1)$$

в котором знак $\stackrel{d}{=}$ обозначает равенство по распределению, а ν_1, \dots, ν_n — независимые одинаково распределенные величины, также имеющие $E(1)$ -экспоненциальное распределение.

Соотношение (1.1) можно переписать в более удобном для дальнейших действий виде.

Представление 1.2. *Справедливы следующие равенства для приращений рекордов:*

$$(Z(1), Z(2) - Z(1), \dots, Z(n) - Z(n-1)) \stackrel{d}{=} (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n).$$

Из представления 1.2 следует, что разности между соседними экспоненциальными рекордными значениями являются независимыми $E(1)$ -экспоненциально распределенными случайными величинами. Отметим, что преобразование Смирнова позволяет во многих ситуациях некоторые результаты, полученные в случае, когда исходные величины имеют равномерные или экспоненциальные распределения,

обобщить на случай рекордных величин $X(n)$ ($n \geq 1$) в произвольных последовательностях X_1, X_2, \dots с общей непрерывной функцией распределения F . Справедливо соотношение

$$F(X(n)) \stackrel{d}{=} 1 - e^{-Z(n)},$$

из которого вытекает, что

$$X(n) \stackrel{d}{=} F^{-1}(1 - e^{-(\nu_1 + \dots + \nu_n)}) \stackrel{d}{=} F^{-1}(1 - U_1 \dots U_n),$$

где ν_1, \dots, ν_n — независимые величины, имеющие $E(1)$ -распределение, а $F^{-1}(x) = \{t : F(t) \geq x\}$ ($x \in (0, 1)$) — функция, обратная функции распределения $F(x)$ и U_1, \dots, U_n — независимые равномерно распределенные на интервале $[0, 1]$ величины.

Вернемся к представлению 1.2. Видим, что с разностями

$$Z(1), Z(2) - Z(1), Z(3) - Z(2), \dots$$

можно работать, как с исходными случайными величинами Z_1, Z_2, \dots . Рассмотрим теперь уже рекорды среди величин $\nu_1 = Z(1), \nu_2 = Z(2) - Z(1), \dots$ и их взаимоотношения с исходными величинами Z_1, Z_2, \dots . Обозначим через $T(1) = 1 < T(2) < \dots$ рекордные моменты в последовательности ν_1, ν_2, \dots и также рассмотрим случайные величины

$$Y(1) = Z(1) = Z_1, Y(2) = Z(T(2)), Y_3 = Z(T(3)), \dots$$

и

$$W(1) = Y(1) = Z_1, W(2) = Y(2) - Y(1), W(3) = Y(3) - Y(2), \dots$$

Последовательность случайных величин $Y(n)$ ($n \geq 1$) можно трактовать уже как вторую «рекордную производную» последовательности исходных величин Z_1, Z_2, \dots . Величины $W(n)$ ($n \geq 1$) являются приращениями величин $Y(n)$ ($n \geq 1$).

Данная работа посвящена изучению свойств величин $T(n), Y(n)$ и $W(n)$. В параграфе 2 исследуются распределения величин $T(n), Y(n)$ и $W(n)$, ищется преобразование Лапласа величины $Y(n)$ и показывается, что последовательность векторов $(Y(n), T(n))$ образует цепь Маркова. В параграфе 3 получен предельный результат для последовательности $Y(n)$ ($n \geq 1$). В параграфе 4 предложены методы генерирования величин $T(n)$ и $Y(n)$.

2. Распределения величин $T(n)$ и $Y(n)$. Поскольку распределения рекордных моментов одинаковы для любых непрерывных распределений F , то $T(n) \stackrel{d}{=} L(n)$. Откуда, в частности, следует (см., например, стр. 94 в книге [2]), что

$$P(T(n) = k) = \frac{|S_{k-1}^{n-1}|}{k!},$$

где S_k^n — числа Стирлинга первого рода, которые определяются равенствами

$$x(x-1)\dots(x-k+1) = \sum_{n=0}^k S_k^n x^n.$$

В частном случае, при $n = 2$, справедливо

$$P(T(2) = k) = \frac{1}{k(k-1)} \quad (k \geq 2).$$

Производящая функция $\Pi_{T(n)}(s)$ величины $T(n)$ имеет вид

$$\Pi_{T(n)}(s) = Es^{T(n)} = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{-\log(1-s)} v^{n-1} e^{-v} dv \quad (0 \leq s \leq 1, n \geq 1), \quad (2.1)$$

а соответствующее преобразование Лапласа дается равенством

$$L_{Y(n)}(\lambda) = Ee^{-\lambda T(n)} = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{-\log(1-e^{-\lambda})} v^{n-1} e^{-v} dv \quad (\lambda > 0, n \geq 1).$$

Найдем распределение величины $Y(2)$. Воспользуемся тем, что сумма $\nu_1 + \dots + \nu_k$ имеет гамма-распределение с параметрами $(k, 1)$ и получим, что

$$\begin{aligned} P(Y(2) \leq y) &= \sum_{k=2}^{\infty} P(Z(T(2)) \leq y \mid T(2) = k) P(T(2) = k) = \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{P(Z(k) \leq y)}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!(k-1)} \int_0^y u^{k-1} e^{-u} du = \\ &= \int_0^y e^{-u} \int_0^u \frac{e^v - 1}{v} dv du - \int_0^y \frac{e^{-u}(e^u - 1 - u)}{u} du. \end{aligned}$$

Соответствующая плотность распределения имеет вид

$$f_{Y(2)}(y) = e^{-y} \int_0^y \frac{e^v - 1}{v} dv - 1/y + e^{-y}/y + e^{-y}.$$

Несложно также убедиться в том, что

$$EY(2) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{E(\nu_1 + \dots + \nu_k)}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k-1} = \infty.$$

Найдем теперь совместную плотность величин $Y(1)$ и $Y(2)$. Для этого рассмотрим понятие плотности-распределения. Пусть $F(x, y)$ — двумерная функция распределения вектора (X, Y) , допускающая дифференцирование по переменной x . Назовем функцию $G(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}$ плотностью-распределением вектора (X, Y) . Пусть теперь $G_{Y(1), Y(2)}(y_1, y_2)$ — плотность-распределение вектора $(Y(1), Y(2))$, где плотность соответствует величине $Y(1)$, а распределение — величине $Y(2)$. Для $y_1 < y_2$ имеем

$$\begin{aligned} G_{Y(1), Y(2)}(y_1, y_2) &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{-y_1} P(\nu_2 + \dots + \nu_k \leq y_2 - y_1)}{k(k-1)} = \\ &= e^{-y_1} \int_0^{y_2 - y_1} \frac{1 - e^{-u}(1+u)}{u^2} du. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$f_{Y(1), Y(2)}(y_1, y_2) = \frac{e^{-y_1}(1 - e^{-y_2 + y_1}[1 + y_2 - y_1])}{(y_2 - y_1)^2} \quad (y_2 > y_1 > 0).$$

Известно, что последовательность рекордных величин $X(n)$ ($n \geq 1$) образует цепь Маркова. Покажем, что последовательность векторов $(Y(n), T(n))$ ($n \geq 1$) также образует цепь Маркова. Пусть $Q_{Y(1), \dots, Y(n), T(2), \dots, T(n)}(y_1, \dots, y_n, i_2, \dots, i_n)$ — совместная плотность-распределение величин $Y(1), \dots, Y(n), T(2), \dots, T(n)$, где плотность соответствует величинам $Y(1), \dots, Y(n)$, а распределение — величинам $T(2), \dots, T(n)$. Пусть $q_{Y(1), \dots, Y(n-1), Y(n)|T(2), \dots, T(n)}(y_1, \dots, y_n | i_2, \dots, i_n)$ — условная плотность величин $Y(1), \dots, Y(n)$ при условии $\{T(2) = i_2, \dots, T(n) = i_n\}$. Имеем

$$\begin{aligned} Q_{Y(1), \dots, Y(n), T(2), \dots, T(n)}(y_1, \dots, y_n, i_2, \dots, i_n) &= \\ &= q_{Y(1), \dots, Y(n)|T(2), \dots, T(n)}(y_1, \dots, y_n | i_2, \dots, i_n) P(T(2) = i_2, \dots, T(n) = i_n) = \\ &= \left(e^{-y_1} \prod_{j=2}^n \frac{e^{-y_j + y_{j-1}} (y_j - y_{j-1})^{i_j - i_{j-1} - 1}}{(i_j - i_{j-1} - 1)!} \right) \frac{1}{(i_2 - 1) \dots (i_{n-1} - 1)(i_n - 1)i_n} = \\ &= \left(e^{-y_n} \prod_{j=2}^n \frac{(y_j - y_{j-1})^{i_j - i_{j-1} - 1}}{(i_j - i_{j-1} - 1)!} \right) \frac{1}{(i_2 - 1) \dots (i_{n-1} - 1)(i_n - 1)i_n}, \end{aligned}$$

где $i_1 = 1$. Отсюда находим условную плотность-распределение вектора $(Y(n), T(n))$

$$\begin{aligned} Q_{Y(n), T(n)|Y(1), \dots, Y(n-1), T(2), \dots, T(n-1)}(y_n, i_n | y_1, \dots, y_{n-1}, i_2, \dots, i_{n-1}) &= \\ &= e^{-y_n + y_{n-1}} \frac{(y_n - y_{n-1})^{i_n - i_{n-1} - 1} i_{n-1}}{(i_n - i_{n-1} - 1)! (i_n - 1) i_n}. \end{aligned}$$

Поскольку условная плотность-распределение $(Y(n), T(n))$ не зависит от величин $y_1, \dots, y_{n-2}, i_2, \dots, i_{n-2}$, заключаем, что последовательность векторов $(Y(n), T(n))$ ($n \geq 1$) образует цепь Маркова. Здесь несложно показать, что последовательность $Y(n)$ ($n \geq 1$) уже не образует цепь Маркова.

Найдем преобразование Лапласа величины $Y(n)$ ($n \geq 1$). Случайную величину $Y(n)$ можно представить как сумму случайного числа $T(n)$ независимых $E(1)$ -экспоненциально распределенных случайных слагаемых ν_i , у каждого из которых преобразование Лапласа имеет вид $L_{\nu_i}(\lambda) = \frac{1}{1+\lambda}$. Если учесть, что производящая функция $\Pi_{T(n)}(s)$ величины $T(n)$ дается равенством (2.1), то получаем, что

$$L_{Y(n)}(\lambda) = \Pi_{T(n)}\left(\frac{1}{\lambda+1}\right) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{-\log(\lambda/(\lambda+1))} v^{n-1} e^{-v} dv.$$

Распределение величины $W(2)$ ищется из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} P(W(2) \leq x) &= \sum_{k=2}^{\infty} P(W(2) \leq x | T(2) = k) P(T(2) = k) = \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{P(Z(k) - Z(1) \leq x)}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{P(\nu_2 + \dots + \nu_k \leq x)}{k(k-1)} = \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_0^x u^{k-2} e^{-u} du = 1 + \frac{e^{-x} - 1}{x}. \end{aligned}$$

Отметим, что случайные величины $Z(1)$ и $W(n)$ ($n \geq 2$) независимы, но уже любая пара $W(k)$ и $W(m)$ ($k < m$) представляет собой зависимые случайные величины. Видим также, что величины $T(2), Y(2)$ и $W(2)$ имеют бесконечные математические ожидания. Это же высказывание относится и к остальным случайным величинам $T(n), Y(n)$ и $W(n)$ ($n \geq 3$).

3. Предельный результат для $Y(n)$.

Утверждение. *Справедливо следующее асимптотическое соотношение:*

$$\frac{Y(n)}{e^n} \xrightarrow{p} \log 2 \quad (n \rightarrow \infty).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже было показано,

$$L_{Y(n)}(\lambda) = Ee^{-\lambda Y(n)} = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{-\log(\lambda/(\lambda+1))} v^{n-1} e^{-v} dv.$$

Положим в последнем соотношении $\lambda = e^{-n}$. Несложно убедиться в том, что

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_0^{-\log(\lambda/(\lambda+1))} v^{n-1} e^{-v} dv \sim \frac{1}{(n-1)!} \int_0^n v^{n-1} e^{-v} dv \quad (n \rightarrow \infty).$$

Для экспоненциальных рекордов $Z(n)$ известно, что

$$P\left(\frac{Z(n) - n}{\sqrt{n}} \leq x\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du.$$

Выберем в последнем асимптотическом соотношении x равным нулю. Тогда

$$P(Z(n) \leq n) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^n v^{n-1} e^{-v} dv \rightarrow 1/2 \quad (n \rightarrow \infty).$$

□

4. Генерирование величин $Y(n)$. В этом параграфе предложим два метода генерирования величин второй «рекордной производной» последовательности экспоненциальных случайных величин. Первый метод будет прямым методом генерирования.

Первый метод генерирования величин $Y(n)$. Генерируются экспоненциальные величины ν_i ($1 \leq i \leq n$), равные по распределению величинам $Z(i) - Z(i-1)$ ($1 \leq i \leq n$). Среди величин ν_i фиксируются рекордные величины. Пусть $T(n) = k$. Тогда полагаем $Y(n) = \nu_1 + \dots + \nu_k$, где ν_i ($1 \leq i \leq k$) — генерации стандартной экспоненциальной случайной величины.

Отметим недостатки первого метода. Метод является ресурсозатратным и не позволяет эффективно генерировать величины $Y(n)$ при «больших» значениях n . Приведем второй метод генерирования величин второй «рекордной производной», который более эффективен и позволяет генерировать величины $Y(n)$ для «больших» значений n .

Второй метод генерации величин $Y(n)$ основан на алгоритме 2.1 из работы [3] и использует рекуррентный подход. Напомним, что $T(n) \stackrel{d}{=} L(n)$. В работе [3] было

показано, что последовательность $L(n)$ может генерироваться при помощи следующего рекуррентного соотношения: $L(n+1) = \left[\frac{L(n)}{U} \right] + 1$, где $[]$ — целая часть числа, а U — генерация случайного числа. Напомним также, что $L(1) = 1$.

Второй метод генерирования величин $Y(n)$. Полагаем $T(1) = 1$. Генерируем величины $T(n)$ при помощи рекуррентного соотношения $T(n+1) = \left[\frac{T(n)}{U} \right] + 1$. Пусть $T(n) = k$. Полагаем $Y(n)$ равным $\nu_1 + \dots + \nu_k$, где ν_i ($1 \leq i \leq n$) — генерации стандартных экспоненциальных случайных величин.

Результаты одной из генераций величин $Y(n)$, полученные при помощи второго метода, приведем в таблице.

Y(1)	Y(2)	Y(3)	Y(4)	Y(5)	Y(6)	Y(7)	Y(8)	Y(9)	Y(10)
0.39	4.60	32.35	41.89	512.17	5195.87	58724.22	67044.42	128243.61	567728.15
Y(11)	Y(12)	Y(13)	Y(14)	Y(15)	Y(16)	Y(17)	Y(18)	Y(19)	Y(20)
95141.27	834438.55	967343.27	983556.66	2871485.35	6775320.15	15068643.65	61441230.35	148457404.46	309387616.31

Литература

1. Arnold B., Balakrishnan N., Nagaraja H. Records. New York: Wiley, 1998.
2. Невзоров В. Б. Рекорды. Математическая теория. М.: Фазис, 2000.
3. Патеев А. И., Степанов А. В. Генерирование больших последовательностей нормальных рекордных величин и максимумов // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 3. С. 431–440.

Статья поступила в редакцию 29 апреля 2019 г.;
после доработки 9 июня 2019 г.;
рекомендована в печать 19 сентября 2019 г.

Контактная информация:

Невзоров Валерий Борисович — д-р физ.-мат. наук, проф.; valnev@mail.ru
Степанов Алексей Васильевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; alexeistep45@mail.ru

On the second record derivative of a sequence of exponential random variables*

V. B. Nevzorov¹, A. V. Stepanov²

¹ St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

² Immanuel Kant Baltic Federal University, ul. A. Nevskogo, 14, Kaliningrad, 236041, Russian Federation

For citation: Nevzorov V. B., Stepanov A. V. On the second record derivative of a sequence of exponential random variables. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 1, pp. 69–76.

<https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.107> (In Russian)

Let Z_i ($i \geq 1$) be a sequence of independent and identically distributed random variables with standard exponential distribution H and $Z(n)$ ($n \geq 1$) be the corresponding sequence of exponential records associated with Z_i ($i \geq 1$). Let us call the sequence $Z(n)$ ($n \geq 1$) the first “record derivative” of the sequence Z_i ($i \geq 1$). It is

*The work of V. B. Nevzorov is supported by Russian Foundation for Basic Research (grant N 18-01-00393).

known that $\nu_1 = Z(1), \nu_2 = Z(2) - Z(1), \dots$ are independent variables with distribution H . Let $T(n)$ ($n \geq 1$) be record times obtained from the sequence ν_1, ν_2, \dots and $Y(n) = Z(T(n)), W(n) = Y(n) - Y(n-1)$ ($n \geq 1$). Let us call the sequence $Y(n)$ ($n \geq 1$) (the main objective of the research of the present paper) the second “record derivative” of the sequence Z_i ($i \geq 1$). In the present paper, we find the distributions of $T(n), Y(n), W(n)$ and study the Laplace transform of $Y(n)$. A limit result for the sequence $Y(n)$ ($n \geq 1$) is obtained in the paper. We also propose some methods of generation of $T(n)$ and $Y(n)$.

Keywords: record values, exponential distribution, limit results; methods of record generation.

References

1. Arnold B., Balakrishnan N., Nagaraja H., *Records* (Wiley, New York, 1998).
2. Nevzorov V. B., *Records. Mathematical theory* (Phasis Publ., Moscow, 2000). (In Russian). English translation in: *Translations of Mathematical Monographs* (American Math. Society, 2001).
3. Pakhteev A. I., Stepanov A. V., “Generating Large Sequences of Normal Maxima via Record Values”, *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics* **51** (3), 260–266 (2018). <https://doi.org/10.3103/S106345411803007X>

Received: April 29, 2019

Revised: June 9, 2019

Accepted: September 19, 2019

Authors' information:

Valery B. Nevzorov — valnev@mail.ru

Alexei V. Stepanov — alexeistep45@mail.ru