УДК 512.643 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 1
MSC 15A15, 15A18, 05E05

Об определителе Несбитта — Карлица*

К. И. Пименов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Пименов К. И.* Об определителе Несбитта — Карлица // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 1. С. 85–90. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.109

Изучается матрица, составленная из биномиальных коэффициентов, определитель которой ранее вычислил Л. Карлиц. Показано, что матрица Карлица возникает при биномиальной специализации детерминантного представления некоторой специальной функции Шура, которое в теории симметрических функций носит название дуальной формулы Якоби — Труди. Таким образом, дано альтернативное вычисление определителя Карлица, опирающееся на теорию симметрических функций. Показано, что собственные значения матрицы Карлица также являются степенями двойки. Для вычисления собственных значений матрицы используется подходящий линейный оператор на векторном пространстве многочленов степени, не превосходящей данной, и показано, как в подходящем базисе его матрица приводится к треугольному виду со степенями двойки по диагонали. Основной результат обобщен с квадратичного на кубический случай, который отвечает некоторой матрице из триномиальных коэффициентов.

Ключевые слова: линейная алгебра, биномиальные коэффициенты, симметрические функции, собственные значения.

1. Введение. В 1904 году А. М. Несбитт в ежемесячном издании Educational Times предложил задачу вычисления детерминанта матрицы размера $n \times n$, составленной из биномиальных коэффициентов, в которой на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит $\binom{n+1}{2i-j}$, где $\binom{n}{m}$ мы полагаем равным нулю в том случае, когда не выполняется неравенство $0 \leq m \leq n$. К примеру, для $n = 2$ получается матрица $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, а для $n = 3$ получается матрица

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Два решения этой задачи привел Ниблетт в 1952 году на страницах издания [1], а пять лет спустя Леонард Карлиц [2] несколько обобщил результат. Позднее В. В. Прасолов включил этот результат в качестве задачи 1.29 в свой учебник «Задачи и теоремы линейной алгебры» [3].

В осеннем семестре 2011 года автор предложил вычислить этот определитель в качестве индивидуальной задачи студенту первого курса Павлу Кунявскому. В попытках решить эту задачу и рассматривая маломерные примеры Павел обнаружил,

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-01-00750).

что не только значение определителя в рассмотренных им примерах оказывается равным $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$, но и полный набор собственных значений этой матрицы оказывается равным $2^1, 2^2, \ldots, 2^n$.

2. Определитель Якоби — Труди. Мы не видели, чтобы в литературе было отмечено, что вычисление определителя Несбитта — Карлица является частным случаем дуальной формулы Якоби — Труди. Напомним основные определения из теории симметрических функций. По разбиению $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$, где $\lambda_i \in \mathbb{N}$ и $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_r$, можно построить симметрический многочлен Шура s_λ от бесконечного набора переменных.

В теории симметрических функций известны различные явные выражения для s_λ. Одно из этих выражений, так называемый биальтернант Якоби, представляет многочлен $s_\lambda^N(X_0, X_1, X_2, \ldots, X_N)$, полученный подстановкой $X_{N+1} = X_{N+2} = \cdots = 0$ в исходный многочлен от бесконечного числа переменных при $N \geqslant r$ в виде отношения двух определителей:

$$s_\lambda^N(X_0, X_1, \ldots, X_N) = \frac{a_{\lambda+\delta}(X_0, X_1, \ldots, X_n)}{a_\delta(X_0, X_1, \ldots, X_n)},$$

где $a_\delta = \det\left(X_j^i\right)_{i,j=0}^N$ — это определитель Вандермонда, $a_{\lambda+\delta} = \det\left(X_j^{i+\lambda_i}\right)_{i,j=0}^N$ и набор $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ получен добавлением в исходное разбиение $N-r+1$ нулевого члена в начало списка.

Для разбиения $\lambda = (1, 2, 3, \ldots, n)$ выражение через альтернанты Якоби дает

$$s_{n,n-1,\ldots,2,1}(X_0, X_1, \ldots, X_{n+1}) = \frac{\prod\limits_{i<j}(X_i^2 - X_j^2)}{\prod\limits_{i<j}(X_i - X_j)} = \prod_{i<j}(X_i + X_j).$$

Другое хорошо известное детерминантное тождество для многочленов Шура в терминах элементарных симметрических функций e_k называется дуальным тождеством Якоби — Труди:

$$s_{\lambda'} = \det\left(e_{\lambda_i+i-j}\right)_{i,j=1}^r,$$

где λ' — разбиение, дуальное к разбиению λ, и $e_k = 0$ при $k < 0$.

Для разбиения $1, 2, \ldots, n$ дуальная формула Якоби — Труди [4, формула (3.5), с. 35] дает

$$s_{n,n-1,\ldots,2,1} = \det\left(e_{2i-j}\right), \quad \text{где} \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Сравнение двух выражений для функции Шура, отвечающей разбиению $1, 2, 3, \ldots, n+1$, приводит к формуле

$$\det\left(e_{2i-j}(X_0, X_1, \ldots, X_n)\right)_{i,j=1}^n = \prod_{j \neq j}(X_j + X_j), \tag{1}$$

аналог которой для полных однородных симметрических функций приведен в упражнении 7 на с. 46 в книге [4].

Если мы подставим вместо всех переменных $X_i = 1$, то $e_k(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ примет значение $\binom{n+1}{k}$. Тогда равенство (1) при вычислении определителя Несбитта — Карлица примет вид

$$\det\left(\binom{n+1}{2i-j}\right)_{i,j=1}^n = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Замечание. Если вместо формулы (1) использовать ее аналог из упражнения 7 на с. 46 в книге [4], то мы получим вычисление другого определителя, составленного из биномиальных коэффициентов:

$$\det\left(\binom{n+2i-j}{n}\right)_{i,j=1}^{n} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

3. Доказательство основного результата. Мы собираемся доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть A — целочисленная матрица размера $n\times n$ с компонентами $\binom{n+1}{2i-j}$, стоящими на пересечении i-й строчки и j-го столбца, где i, j изменяются от 1 до n. Тогда собственные значения матрицы A пробегают все степени числа 2: $2^1, 2^2, \ldots, 2^n$.*

Доказательство. Мы проинтерпретируем матрицу A как матрицу некоторого линейного оператора на некотором полиномиальном векторном пространстве.

Прежде всего заметим, что

$$\frac{(1+y)^{n+1}y^k + (1-y)^{n+1}(-y)^k}{2} = \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{2i-k}y^{2i}.$$

Рассмотрим векторное пространство $\mathbb{C}[y]_{\le n+1}$ полиномов с комплексными коэффициентами, степени не выше $n+1$ со стандартным базисом $1, y, \ldots, y^{n+1}$ и векторное пространство четных полиномов $\mathbb{C}[y]^{ev}_{\le 2n+2}$ с базисом $1, y^2, \ldots, y^{2n+2}$. Тогда матрица B, такая что $b_{ij} = \binom{n+1}{2i-j}$, где i, j изменяются от 0 до $n+1$, является матрицей линейного отображениями между этими векторными пространствами, которое задается формулой

$$p(y) \mapsto \frac{(1+y)^{n+1}p(y) + (1-y)^{n+1}p(-y)}{2}.$$

Это линейное отображение является композицией умножения полинома на $(1+y)^{n+1}$ с последующей проекцией на подпространство четных полиномов вдоль подпространства нечетных полиномов.

Матрица A получается из матрицы B вычеркиванием первой и последней строчек, а также первого и последнего столбцов. Единственный ненулевой элемент в первой и последней строчках матрицы B равен единице и стоит на главной диагонали. Поэтому набор собственных значений матрицы B получается из набора собственных значений матрицы A добавлением к нему двух единиц.

Так как не вполне естественно вычислять собственные числа матрицы, которая является матрицей линейного отображения из одного пространства в другое, мы немного модифицируем область значения рассматриваемого линейного отображения, воспользовавшись изоморфизмом $\mathbb{C}[y]^{ev}_{\le 2n+2} \to \mathbb{C}[y]_{\le n+1}$, при котором y^{2k} отображается в y^k. Таким образом, мы получим линейный оператор Φ на пространстве $\mathbb{C}[y]_{\le n+1}$, значение которого на многочлене f определено равенством

$$(\Phi f)(y^2) = \frac{1}{2}\left[(1+y)^{n+1}f(y) + (1-y)^{n+1}f(-y)\right].$$

Непосредственное вычисление показывает, что полиномы $(1-y)^{n+1}$ и $(1-y)^n$ являются собственными векторами для Φ, отвечающими собственному числу 1. Действуя по индукции, мы утверждаем, что подпространство

$\left\langle (1-y)^{n+1}, (1-y)^n, \ldots, (1-y)^{n-k} \right\rangle$ является инвариантным по отношению к оператору Φ. В самом деле,

$$\frac{(1+y)^{n+1}(1-y)^{n-k}+(1-y)^{n+1}(1+y)^{n-k}}{2} = (1-y^2)^{n-k} \cdot \sum_{i=0}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} \binom{k+1}{2i} y^{2i}.$$

Правый сомножитель в правой части, рассмотренный как полином от переменной $z=y^2$ имеет степень, меньшую или равную $\left[\frac{k+1}{2}\right]$, поэтому может быть записан как линейная комбинация

$$\sum_{i=0}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} \binom{k+1}{2i} z^i = \sum c_i (1-z)^i,$$

где коэффициент c_0 равен 2^k, что вытекает благодаря подстановке $y=1$.

Поэтому $\Phi\left[(1-y)^{n-k}\right] = 2^k(1-y)^{n-k} + \sum\limits_{i=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} c_i(1-y)^{n-k+i}$. Проведенное вычисление показывает, что матрица линейного оператора Φ по отношению к базису $1, (1-y), (1-y)^2, \ldots, (1-u)^{n+1}$ оказывается нижней треугольной с диагональными компонентами $2^n, \ldots, 2^{n-1}, 2^1, 1, 1$. Набор диагональных компонент этой матрицы совпадает с набором собственных значений матрицы B, откуда мы получаем, что набор собственных значений матрицы A равен $\{2^k\}_{k=1}^n$.

Замечание. Другое доказательство, с которым автора познакомил Алексей Цыбышев, может быть основано на хорошо известной формуле

$$\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k \binom{n+1}{k} k^m = 0 \quad \text{при} \quad 0 \le m \le n.$$

4. Кубическое обобщение. Пусть $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ — это кубический корень из единицы. То же самое рассуждение для вычисления спектра линейного оператора может быть применено к линейному отображению $\Psi : \mathbb{C}[y]_{\le n+1} \to \mathbb{C}[y]_{\le n+1}$ такому, что

$$(\Psi f)(y^3) = \frac{1}{3}\left[g(y) + g(\omega y) + g(\omega^2 y)\right], \tag{2}$$

где $g(y) = (1+y+y^2)^{n+1} f(y)$.

Отметим, что правая часть равенства (2) представляет собой многочлен, который переходит в себя при замене переменной $y \mapsto \omega y$ и поэтому имеет нулевые коэффициенты перед y^k для показателей k, не делящихся на три.

Предложение. *Набор собственных значений линейного оператора Ψ равен*

$$1, 1, 3^1, \ldots, 3^n.$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что многочлен $(1-y)^{n+1}$ является собственным вектором для оператора Ψ, отвечающим собственному числу 1. То же самое относится и к многочлену $(1-y)^n$. В самом деле, для $f(y) = (1-y)^n$ имеем $g(y) = (1+y+y^2)^{n+1}(1-y)^n = (1-y^3)^n(1+y+y^2)$. Так что $g(y)+g(\omega y)+g(\omega^2 y) = (1-y^3)^n\left[1+y+y^2+1+\omega y+\omega^2 y^2+1+\omega^2 y+\omega y^2\right] = 3\cdot(1-y^3)^n$.

Покажем индукцией по k, что подпространство $\left\langle (1-y)^{n+1}, (1-y)^n, \ldots, (1-y)^{n-k} \right\rangle$ инвариантно относительно оператора Ψ. База $k=0$ уже проверена. Для $f(y) = (1-y)^{n-k}$ имеем

$$g(y) + g(\omega y) + g(\omega^2 y) = (1-y^3)^{n-k} \times \\ \times \left[(1+y+y^2)^{k+1} + (1+\omega y + \omega^2 y^2)^{k+1} + (1+\omega^2 y + \omega y^2)^{k+1} \right],$$

где выражение в квадратных скобках оказывается полиномом от переменной $z = y^3$, который делится на $(1-z)^{n-k}$ и имеет степень не выше $n+1$, и потому принадлежит линейной оболочке $\left\langle (1-z)^{n+1}, (1-z)^n, \ldots, (1-z)^{n-k} \right\rangle$. Таким образом, матрица оператора Ψ в базисе $(1-y)^{n+1}, (1-y)^n, \ldots, 1-y, 1$ оказывается верхней треугольной. Для вычисления $(k+2)$-й диагональной компоненты этой матрицы требуется найти коэффицент c_0 в разложении

$$\frac{1}{3} \left[(1+y+y^2)^{k+1} + (1+\omega y + \omega^2 y^2)^{k+1} + (1+\omega^2 y + \omega y^2)^{k+1} \right] = \sum_{i=0}^{n+1-k} c_i (1-y^3)^i.$$

Подставляя $y = 1$, получаем $c_0 = 3^k$. Таким образом, матрица оператора Ψ оказывается верхней треугольной с диагональными компонентами $1, 1, 3, 3^2, \ldots, 3^k$.

Литература

1. *Niblett J. D.* A theorem of Nesbitt // The American Mathematical Monthly. 1952. Vol. 59. P. 171–174.
2. *Carlitz L.* A determinant // The American Mathematical Monthly. 1957. Vol. 64. P. 186–188.
3. *Prasolov V.* Problems and Theorems in Linear Algebra. In Ser.: Translations of Mathematical Monographs. Vol. 134. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1994.
4. *Macdonald I. G.* Symmetric Functions and Hall Polynomials. 2nd ed. OUP, 1995.

Статья поступила в редакцию 20 июля 2019 г.;
после доработки 15 сентября 2019 г.;
рекомендована в печать 19 сентября 2019 г.

Контактная информация:

Пименов Константин Игоревич — канд. физ.-мат. наук, доц.; kip302002@yahoo.com

On a Nesbitt — Carlitz determinant*

K. I. Pimenov

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Pimenov K. I. On a Nesbitt — Carlitz determinant. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 1, pp. 85–90. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.109 (In Russian)

A matrix whose component are binomial coefficients and determinant was calculated earlier by L. Carlitz is investigated. It is shown that Carlitz matrix is the result of binomal specialization for dual Jacobi — Trudi determinant presentation of certain Schur function.

*The work is supported by Russian Foundation for Basic Research (grant N 16-01-00750).

It leads to another way to calculate Carlitz determinant based upon symmetric function theory. The eigenvalues of Carlitz matrix are shown to be powers of two as well. In order to calculate these eigenvalues the author uses suitable linear operator on the space of polynomials whose degree does not exceed given number. It is shown that in suitable basis matrix of that linear operator has triangular form with powers of two on its diagonal. Main result is generalised from quadratic to cubic case corresponding to a certain matrix, consisted of trinomial coefficients.

Keywords: linear algebra, binomial coefficients, symmetric functions, matrix eigenvalues.

References

1. Niblett J. D., "A theorem of Nesbitt", *The American Mathematical Monthly* **59**, 171–174 (1952).
2. Carlitz L., "A determinant", *The American Mathematical Monthly* **64**, 186–188 (1957).
3. Prasolov V., *Problems and Theorems in Linear Algebra*, in Ser. *Translations of Mathematical Monographs* **134** (American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1994).
4. Macdonald I. G., *Symmetric Functions and Hall Polynomials* (2nd ed., OUP, 1995).

Received: July 20, 2019
Revised: September 15, 2019
Accepted: September 19, 2019

Author's information:

Kostantin I. Pimenov — kip302002@yahoo.com