

Вычисления в обобщенной теории Любина — Тейта*

С. В. Востоков, Е. О. Леонова

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: Востоков С. В., Леонова Е. О. Вычисления в обобщенной теории Любина — Тейта // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 2. С. 210–216.

<https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.203>

В данной статье рассматриваются различные расширения локальных полей. Для произвольного конечного расширения K поля p -адических чисел с помощью известной теории Любина — Тейта возможно описать максимальное абелево расширение K^{ab}/K и соответствующую группу Галуа. Она представляется как прямое произведение групп, полученных с помощью максимального неразветвленного расширения K и вполне разветвленного расширения, полученного с использованием корней некоторых эндоморфизмов формальных групп Любина — Тейта. Мы рассматриваем так называемые обобщенные формальные группы Любина — Тейта и расширения, возникающие при добавлении к рассматриваемому полю корней их эндоморфизмов. Используя тот факт, что над неразветвленным конечным расширением T_m степени m поля K правильным образом выбранная обобщенная формальная группа совпадает с классической, оказалось возможным получить группу Галуа расширения $(T_m)^{ab}/K$. Главным результатом работы является явное описание группы Галуа расширения $(K^{ur})^{ab}/K$, где K^{ur} — это максимальное неразветвленное расширение поля K . Аналогичные методы также были применены к изучению разветвленных расширений поля K .

Ключевые слова: максимальное неразветвленное расширение, формальные групповые законы.

1. Введение. Данная статья посвящена изучению различных расширений локальных полей. Для произвольного конечного расширения Галуа поля p -адических чисел K/\mathbb{Q}_p при помощи теории Любина — Тейта в прошлом были описаны его максимальное расширение K^{ab}/K и соответствующая группа Галуа.

В работе рассматриваются так называемые обобщенные формальные группы Любина — Тейта и расширения, полученные путем добавления к исходному полю корней их автоморфизмов. С их помощью оказывается возможным описать группу Галуа расширения T_m^{ab}/K , где T_m — это неразветвленное расширение поля K степени m . Основным результатом является получение группы Галуа расширения $(K^{ur})^{ab}/K$, где K^{ur} — максимальное неразветвленное расширение поля K .

Также была предпринята попытка провести подобные рассуждения для исследования разветвленных расширений поля K и были выделены проблемы, отличающие эту задачу от рассмотренной ранее.

2. Известные результаты. Пусть K/\mathbb{Q}_p — конечное расширение, K — локальное поле характеристики ноль с полем вычетов из q элементов. В [1] получен следующий результат.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (грант № 16-11-10200).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2020

Теорема 1. Пусть K/\mathbb{Q}_p — произвольное конечное расширение Галуа. Тогда

$$\text{Gal}(K^{ab}/K) \cong \hat{\mathbb{Z}} \times O_K^\times.$$

В этом декартовом произведении левая часть соответствует группе Галуа максимального неразветвленного расширения K , которое будет обозначаться как K^{ur} , а правая — группе Галуа расширения, полученного с помощью добавления к исходному полю ядер изогений некоторой формальной группы, называемой группой Любина — Тейта. Если π — униформизирующая поля K , то изогения умножения на π для этой формальной группы имеет вид

$$[\pi](x) = \pi x + x^q.$$

3. Обобщенные формальные группы Любина — Тейта. Теперь рассмотрим несколько модифицированную изогению. По аналогии с классическим случаем доказывается следующая лемма.

Лемма 2. Пусть π — униформизирующая поля K , q — порядок поля вычетов K , $t \in \mathbb{N}$, T_m — неразветвленное расширение K степени t , $f(x)$ — формальный степенной ряд с коэффициентами из O_K , такой что

$$f(x) = \pi x \pmod{\deg 2}, \quad f(x) = x^{q^m} \pmod{\pi}.$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Существует единственный формальный групповой закон F , такой что f является эндоморфизмом F .
2. Для любого $a \in O_{T_m}$ существует единственный формальный степенной ряд $[a](x)$ с коэффициентами из O_{T_m} , такой что

$$[a](x) = x \pmod{\deg 2}, \quad f \circ [a] = [a] \circ f.$$

Кроме того, $F([a], [b]) = [a + b]$, $[a] \circ [b] = [ab] \forall a, b \in O_{T_m}$. При этом, если $a \in O_K$, то коэффициенты ряда $[a](x)$ лежат в O_K .

3. $[a]$ — эндоморфизм F для любого $a \in O_{T_m}$.

Зафиксируем многочлен $f(x) = \pi x + x^{q^m}$ и соответствующий ему формальный групповой закон F . Заметим, что, точно так же, как и в классическом случае, $[\pi] = f$.

Определение 3. Пусть L — некоторое расширение K , содержащееся в K^{sep} и содержащее все корни $[\pi^n](x)$, $n \in \mathbb{N}$.

Введем множество $\mu_n = \{y \in L : [\pi^n](y) = 0\}$.

Также обозначим $T_m^n = K(\mu_n) \supset T_m$, $T_m^\infty = \bigcup_{n \geq 1} T_m^n$. Несложно заметить, что порядок поля вычетов T_m равен q^m , поэтому F как формальный групповой закон — это классический формальный групповой закон Любина — Тейта.

Поэтому $\text{Gal}(T_m^n/T_m) = (O_{T_m}/\rho_{T_m}^n)^\times$ и $\text{Gal}(T_m^\infty/T_m) = O_{T_m}^\times$. Наша цель — найти группу Галуа расширения T_m^∞ над K .

Зафиксируем $\zeta \in T_m$ — первообразный корень из единицы степени $q^m - 1$.

Определение 4. Существует автоморфизм T_m над K , который переводит ζ в ζ^q . Будем обозначать его $Frob(x)$. Так же будем обозначать соответствующий ему автоморфизм модуля $O_{T_m}/\pi^n O_{T_m}$, $n \in \mathbb{N}$.

Заметим, что это обозначение не случайно, так как на поле вычетов этот автоморфизм будет совпадать с классическим автоморфизмом Фробениуса степени q .

Для начала найдем группу Галуа расширения T_m^1/K . Заметим, что $T_m^1 = K(x_0, \zeta)$ и любой корень x_0 соответствующего минимального многочлена можно представить в виде $[a](x_0)$, $a \in O_{T_m}/\pi O_{T_m}$, или в виде $\zeta^k x_0$, $0 \leq k < q^m - 1$.

Лемма 5. Если $x \in \mu_1$, то $\zeta x = [\zeta](x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что для некоторого $a \in O_{T_m}/\pi O_{T_m}$ верно равенство $\zeta x = [a](x)$. Поделив это равенство на x , получим

$$\zeta = a + k_2 x + k_3 x^2 + \dots,$$

где k_i — коэффициент ряда $[a]$ при соответствующей степени. Из вида многочлена f очевидным образом следует, что нормирование x больше нуля. Рассмотрев равенство по модулю π , получаем, что $\zeta \equiv a \pmod{\pi}$, то есть $[a](x) = [\zeta](x)$.

Лемма 6. $Gal(T_m^1/K) = (O_{T_m}/\pi O_{T_m})^\times \rtimes_{\phi} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, где $\phi(k) = Frob^k(x)$, $k \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что для любого $x \in \mu_1$, $x \neq 0$ верно $Frob([a]x) = [Frob(a)]x$. Так как $O_{T_m}/\pi O_{T_m}$ порождено ζ , то достаточно доказать это утверждение для $a = \zeta$. Действительно,

$$Frob([\zeta](x)) = Frob(\zeta x) = \zeta^q x = [\zeta^q](x) = [Frob(\zeta)](x).$$

Теперь покажем, как аналогичным образом получить группу Галуа расширения T_m^n для любого натурального n .

Теорема 7. $Gal(T_m^n/K) \cong (O_{T_m}/\pi^n O_{T_m})^\times \rtimes_{\phi} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, где $\phi(k) = Frob^k$, $k \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $n = 1$ рассмотрен в лемме 5. Докажем теорему для $n = 2$, аналогичные результаты для $n > 2$ получаются несложной индукцией.

Требуется доказать, что для любых $x \in \mu_2$, $a \in O_{T_m}/\pi^2 O_{T_m}$

$$Frob([a](x)) = [Frob(a)](x).$$

Лемма 8. Если $x \in \mu_2$, то $\zeta x = [\zeta](x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\zeta x \in \mu_2$, то существует такое $a \in O_{T_m}/\pi^2 O_{T_m}$, что $[a](x) = \zeta x$. Из леммы 2 следует, что тогда $a = k\pi + \zeta$, $k \in O_{T_m}/\pi O_{T_m}$. Значит,

$$[a](x) = [k\pi + \zeta](x) = \zeta x = \zeta^{q^m} x = [a^{q^m}](x) = [q^m k\pi + \zeta](x) = [\zeta](x),$$

что и требовалось доказать.

Теперь покажем, что $Frob([\pi](x)) = [\pi(x)]$. Действительно, так как коэффициенты f лежат в K , то

$$Frob([\pi](x)) = Frob(f(x)) = f(Frob(x)) = f(x) = [\pi(x)].$$

Аналогичным образом несложно показать, что $Frob([a\pi](x)) = [Frob(a)\pi](x)$. Осталось показать, что $Frob([a\pi + b](x)) = [Frob(a)\pi + Frob(b)]$. Так как коэффициенты F лежат в K , то

$$\begin{aligned} Frob([a\pi + b](x)) &= Frob(F([a\pi](x), [b](x))) = F(Frob([a\pi](x)), Frob([b](x))) = \\ &= F([Frob(a)\pi](x), [Frob(b)](x)) = [Frob(a)\pi + Frob(b)]. \end{aligned}$$

Таким образом, действие группы Галуа T_m над K на группу Галуа T_m^2 над T_m аналогично вышеуказанному действию $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ на $(O_{T_m}/\pi^2 O_{T_m})^\times$. Таким образом, итоговая группа Галуа совпадает с полупрямым произведением.

Перейдя к обратному пределу, получаем следующие результаты.

Следствие 9.

$$\text{Gal}(T_m^\infty/K) \cong O_{T_m}^\times \rtimes_{\phi} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z},$$

где $\phi(k) = \text{Frob}^k$, $k \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Следствие 10.

$$\text{Gal}(T_m^{ab}/K) = O_{T_m}^\times \rtimes_{\phi_m} \hat{\mathbb{Z}},$$

где $\phi_m(k) = \text{Frob}^{k \bmod m}$, $k \in \hat{\mathbb{Z}}$.

4. Максимальное неразветвленное расширение. Пусть K — конечное расширение \mathbb{Q}_p , T_m — неразветвленное расширение K степени m , а K^{ur} — максимальное неразветвленное расширение K .

Лемма 11. $\bigcup_{m=1}^\infty T_m^{ab} = (K^{ur})^{ab}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что левая часть равенства содержится в правой. Докажем обратное включение.

Рассмотрим конечное абелево расширение L/K^{ur} . Существует α , такое что $L = K^{ur}(\alpha)$. Рассмотрим произвольный элемент $\beta \in K^{ur}(\alpha)$. Этот элемент можно представить в виде

$$\beta = a_0 + a_1\alpha + \dots + a_k\alpha^k, \quad a_i \in K^{ur}, \quad i = 0, 1, \dots, k.$$

Так как $K^{ur} = \bigcup_{m=1}^\infty T_m$, то существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $a_i \in T_n$, $i = 0, 1, \dots, k$. Тогда β будет лежать в $T_n(\alpha)$. Аналогичным образом можно увеличить n так, чтобы минимальные многочлены для α в T_n и K^{ur} совпадали и их корни лежали в $T_n(\alpha)$.

В итоге мы получили конечное расширение Галуа $T_n(\alpha)/T_n$. Рассмотрим автоморфизмы $T_n(\alpha)$ над T_n . Так как α , как и все остальные корни соответствующего минимального многочлена, не лежит в K^{ur} , то каждый из этих автоморфизмов очевидным образом продолжается до автоморфизма $K^{ur}(\alpha)$ над K^{ur} .

Получается, что автоморфизмы $T_n(\alpha)$ над T_n — это сужения автоморфизмов $K^{ur}(\alpha)$. Так как исходные автоморфизмы коммутировали, то и их сужения будут коммутировать. Таким образом, $T_n(\alpha)/T_n$ — конечное абелево расширение.

Мы получили, что для любого конечного расширения L/K^{ur} и для любого элемента β , содержащегося в L , существует такое n , что β содержится в некотором конечном абелевом расширении T_n . Это доказывает требуемое включение.

Найдем группу Галуа $(K^{ur})^{ab}/K$. Напомним, что $K^{ur} = \bigcup_{m=1}^\infty T_m$. Так как на неразветвленном расширении локального поля можно задать дискретное нормирование, являющееся продолжением исходного, то на K^{ur} также задается такое нормирование, которое есть объединение нормирований на T_m . Тогда для этого нормирования $O_{K^{ur}}^\times = \bigcup_{m=1}^\infty O_{T_m}^\times$.

Нам известно, что

$$\text{Gal}(T_m^{ab}/K) = O_{T_m}^\times \rtimes_{\phi_m} \hat{\mathbb{Z}},$$

где $\phi_m(k) = \text{Frob}^{k \bmod m}$, $k \in \hat{\mathbb{Z}}$. Кроме того, если m делит n , то $T_m \subset T_n$. Также нам известно, что $\phi_n|_{O_{T_m}^\times} = \phi_m$ и, следовательно, $O_{T_m}^\times \rtimes_{\phi_m} \hat{\mathbb{Z}} \subset O_{T_n}^\times \rtimes_{\phi_n} \hat{\mathbb{Z}}$.

Взяв прямой предел для множеств $O_{T_m}^\times \times \hat{\mathbb{Z}}$, мы получим множество $O_{K^{ur}}^\times \times \hat{\mathbb{Z}}$. Так как мы знаем для каждого натурального m действие ϕ_m и знаем, что эти действия согласованы, мы легко получаем действие ϕ , которое элементу $k \in \hat{\mathbb{Z}}$ сопоставляет отображение $Frob^k$ на $O_{K^{ur}}^\times$. Оно действует по следующему принципу: для элемента x из $O_{K^{ur}}^\times$ мы найдем n , такое что x лежит в $O_{T_m}^\times$, и применим к нему $Frob^k \bmod n$. Выше уже было показано, что результат не будет зависеть от выбора n . Таким образом, искомая группа Галуа равна

$$O_{K^{ur}}^\times \rtimes_{\phi} \hat{\mathbb{Z}},$$

где $\phi(k) = Frob^k$, $k \in \hat{\mathbb{Z}}$.

Теорема 12. $Gal((K^{ur})^{ab}/K) = O_{K^{ur}}^\times \rtimes_{\phi} \hat{\mathbb{Z}}$, где $\phi(k) = Frob^k$, $k \in \hat{\mathbb{Z}}$.

5. Разветвленный случай. Рассмотрим уравнение $x^q + \pi x = 0$. Пусть α — его ненулевой корень. Тогда все корни этого уравнения имеют вид $\zeta^k \alpha$, где ζ — первообразный корень степени $q - 1$ из единицы (он лежит в K), $k = 0, 1, \dots, q - 1$.

Пусть $K^\pi = K(\alpha)$. Мы знаем, что K^π/K — вполне разветвленное расширение порядка $q - 1$ и $Gal(K^\pi/K) = \mathbb{Z}/(q - 1)\mathbb{Z}$.

Теперь рассмотрим над K^π уравнение $x^q + \alpha x = 0$. Обозначим поле, полученное добавлением к K^π его корней, как K^α . Попробуем изучить расширение K^α/K .

Домножив последнее уравнение на соответствующую геометрическую прогрессию, получим

$$x^{q(q-1)} + \alpha^{q-1} x^{q-1} = 0.$$

Так как $\alpha^{q-1} = -\pi$, то мы получаем $x^{q^2-2q+2} - \pi x = 0$. Если мы поделим это уравнение на x , то получим неприводимое над K уравнение степени $(q - 1)^2$. Таким образом, K^α/K — вполне разветвленное расширение степени $(q - 1)^2$.

Заметим, что оно не является нормальным. Действительно, все корни минимального многочлена имеют вид $\zeta^k y$, где y — его произвольный корень, а ζ — первообразный корень степени $(q - 1)^2$ из единицы (он лежит в K), $k = 0, 1, \dots, (q - 1)^2 - 1$.

Рассмотрим уравнение $x^{(q-1)^2} - 1 = 0$ над полем K . Если мы рассмотрим его в поле вычетов, то все его делители — многочлены вида $x^{q-1} - \beta$, где β пробегает все обратимые элементы поля вычетов. Если β — первообразный корень из единицы степени $q - 1$, то этот многочлен неприводим. В алгебраическом замыкании он раскладывается на линейные множители вида $x - x_0 \zeta^k$, где x_0 — его произвольный корень, который, очевидно, не лежит в поле вычетов поля K , ζ — первообразный корень степени $q - 1$ из единицы (он лежит в этом поле вычетов), $k = 0, 1, \dots, (q - 1)^2 - 1$. Если мы перемножим $m < q - 1$ таких скобок, то свободный член будет равен произведению ζ в некоторой степени и x_0^m . Так как $(x_0)^{q-1} = \beta$, то x_0 — первообразный корень из единицы степени $(q - 1)^2$. Следовательно, x_0^m при $m < q - 1$ не будет корнем степени $q - 1$ из единицы, что необходимо для того, чтобы этот элемент лежал в поле вычетов поля K . Несложно заметить, что поле, содержащее корни этого многочлена, будет содержать все корни многочлена $x^{(q-1)^2} - 1 = 0$.

Теперь ясно, что наименьшее поле, содержащее K и первообразный корень степени $(q - 1)^2$ из единицы, это T_{q-1}^K (верхний индекс в последнем обозначении отвечает за поле, которому соответствует неразветвленное расширение). Таким образом, этот корень не мог содержаться в K^α , и наименьшим нормальным расширением K , содержащим K^α , будет поле $T_{q-1}^K \times K^\alpha$. Обозначим его K^1 .

Найдем группу $Gal(K^1/K)$. Заметим, что $K^1 = T_{q-1}^{K^\pi} \times K^\alpha$. Несложно заметить, что $Gal(K^1/K^\pi) = (\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z})^2$. Так как ни один из автоморфизмов этой группы не действует на автоморфизмы группы $Gal(K^\pi/K)$, то в результате получаем, что $Gal(K^1/K) = (\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z})^3$.

Следствие 13.

1. Расширение K^α/K не является нормальным.
2. Минимальным нормальным расширением, содержащим данное, является расширение $(T_{q-1}^K \times K^\alpha)/K$.
3. Поле $K^1 = T_{q-1}^K \times K^\alpha$ является полем расширения многочлена $x^{q^2-2q+2} - \pi x$. Группа Галуа расширения K^1/K равна $(\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z})^3$.

Исследовав одно расширение, мы получаем заметные отличия от неразветвленного случая, которые не позволяют построить расширение $(K^\pi)^{ab}/K$. Во-первых, заметим, что многочлен, который мы использовали для присоединения элемента α к полю K , равный $x^{q^2-2q+2} - \pi x$, не является эндоморфизмом умножения ни для какой формальной группы. Кроме того, расширение K^α/K не является нормальным, но мы знаем, с каким полем нужно взять композит, чтобы получить нормальное. Основной вопрос заключается в том, как будут выглядеть нормальные расширения следующих порядков и можно ли получить их путем добавления к полю K корней эндоморфизма умножения некоторой формальной группы.

6. Заключение. В работе был полностью рассмотрен неразветвленный случай. Основной целью дальнейших исследований является изучение разветвленного случая. Планируется изучить расширения более высоких порядков и выделить закономерности, которые, возможно, позволят рассмотреть максимальные абелевы расширения разветвленных расширений поля K над исходным полем. Важным вопросом является вопрос применимости теории формальных групп к данной задаче.

Литература

1. Teruyoshi Y. Local class field theory via Lubin — Tate theory // Annales de la faculte des sciences de Toulouse Mathematiques. 2008. Vol. 17, no. 2. P. 411–438.
2. Iwasawa K. Local class field theory. Oxford Science Publications, The Clarendon Press Oxford University Press, 1986.
3. Madunts A. I., Vostokova R. P. Formal modules for generalized Lubin — Tate groups // Journal of Mathematical Sciences (New York). 2016. Vol. 219, no. 4. P. 553–564.
4. Lubin J., Tate J. Formal complex multiplication in local fields // Annals of Mathematics, Second Series. 1965. Vol. 81. P. 380–387.
5. De Shalit E. Relative Lubin — Tate groups // Proceedings of the American Mathematical Society, 1985.
6. Riehl E. Lubin — Tate formal groups and local class field theory. Bachelor thesis at Harvard University, 2008.
7. Hazewinkel M. Formal groups and application. In: Pure and applied mathematics, a series of monographs and textbooks. Vol. 78. Academic Press, 1978.

Статья поступила в редакцию 27 октября 2019 г.;
после доработки 22 ноября 2019 г.;
рекомендована в печать 12 декабря 2019 г.

Контактная информация:

Востоков Сергей Владимирович — проф.; sergei.vostokov@gmail.com
Леопова Екатерина Олеговна — студент; prrvka@yandex.ru

Calculations in generalised Lubin — Tate theory*

S. V. Vostokov, E. O. Leonova

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Vostokov S. V., Leonova E. O. Calculations in generalised Lubin — Tate theory. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 2, pp. 210–216. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.203> (In Russian)

In this paper, we study different extensions of local fields. For an arbitrary finite extension of the field of p -adic numbers K/\mathbb{Q}_p it is possible to describe, using the famous Lubin — Tate theory, its maximal abelian extension K^{ab}/K and the corresponding Galois group. It is a Cartesian product of the groups appearing from the maximal unramified extension of K and a fully ramified extension obtained using the roots of some endomorphisms of the Lubin — Tate formal groups. Here, we are going to consider so-called generalised Lubin — Tate formal groups and the extensions that appear after adding the roots of their isomorphisms to the initial field. Using the fact that for a finite unramified extension T_m of degree m of the field K one of such formal groups coincides with a classical one, it became possible to obtain the Galois group of the extension $(T_m)^{ab}/K$. The main result of the paper is explicit description of the Galois group of the extension $(K^{ur})^{ab}/K$, where K^{ur} is the maximal unramified extension of the field K . We also applied similar methods to the study of ramified extensions of K .

Keywords: maximal unramified extension, formal group law.

References

1. Teruyoshi Y., “Local class field theory via Lubin — Tate theory”, *Annales de la faculte des sciences de Toulouse Mathematiques* **17**, 411–438 (2008).
2. Iwasawa K., *Local class field theory* (Oxford Science Publications, The Clarendon Press Oxford University Press, 1986).
3. Madunts A. I., Vostokova R. P., “Formal modules for generalized Lubin — Tate groups”, *Journal of Mathematical Sciences (New York)* **219**, 553–564 (2016).
4. Lubin J., Tate J., “Formal complex multiplication in local fields”, *Annals of Mathematics, Second Series* **81**, 380–387 (1965).
5. De Shalit E., “Relative Lubin — Tate groups”, *Proceedings of the American Mathematical Society* (1985).
6. Riehl E., *Lubin — Tate formal groups and local class field theory* (Bachelor thesis at Harvard University, 2008).
7. Hazewinkel M., *Formal groups and application*, in *Pure and applied mathematics, a series of monographs and textbooks* **78** (Academic Press, 1978).

Received: October 27, 2019
Revised: November 22, 2019
Accepted: December 12, 2019

Authors' information:

Sergei V. Vostokov — sergei.vostokov@gmail.com
Ekaterina O. Leonova — prpravka@yandex.ru

*The work is supported by Russian Science Foundation (grant N 16-11-10200).