УДК 512.643 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 2
MSC 15A86, 15B51

Линейные отображения, сохраняющие мажоризацию наборов матриц*

А. Э. Гутерман, П. М. Штейнер

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Российская Федерация, 119991, Москва, Ленинские горы, 1
Московский физико-технический институт,
Российская Федерация, 141701, Москва, Долгопрудный, Институтский пер., 9
Московский центр непрерывного математического образования,
Российская Федерация, 119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11

Для цитирования: *Гутерман А. Э., Штейнер П. М.* Линейные отображения, сохраняющие мажоризацию наборов матриц // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 2. С. 217–229.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.204

В работе рассматриваются слабая, направленная и сильная мажоризации матриц. А именно, говорят, что матрица A слабо мажорируется матрицей B, если найдется такая строчно-стохастическая матрица X, что $A = XB$. Матрица A сильно мажорируется матрицей B, если найдется такая двояко-стохастическая матрица X, что $A = XB$. Наконец, B направленно мажорирует A, если вектор Bx мажорирует вектор Ax для любого вектора x в смысле стандартной векторной мажоризации. Мы вводим понятие мажоризации кортежей матриц, которое определяется как естественное обобщение мажоризаций матриц: для выбранного типа мажоризаций один кортеж матриц мажорируется другим кортежем того же размера, если каждая матрица «меньшего» кортежа мажорируется матрицей «большего» кортежа, стоящей в той же позиции. Говорят, что линейный оператор сохраняет мажоризацию, если он переводит упорядоченные пары в упорядоченные пары, причем образ меньшего элемента не превосходит образ большего элемента. В работе получена полная характеризация линейных операторов, сохраняющих слабую, направленную или сильную мажоризации кортежей матриц, а также переводящих наборы, упорядоченные в смысле сильной мажоризации, в наборы, упорядоченные в смысле направленной мажоризации. Показано, что все такие отображения сохраняют соответствующую мажоризацию в каждой компоненте. Для каждого из трех рассматриваемых типов мажоризаций приведены примеры, демонстрирующие, что обратное утверждение неверно, т. е. из сохранения мажоризации матриц в каждой из компонент может не следовать сохранение мажоризации кортежей.

Ключевые слова: мажоризации матриц, векторные мажоризации, монотонные отображения.

1. Введение. Пусть $\mathbb{R}$ обозначает поле вещественных чисел, $M_{n,m} = M_{n,m}(\mathbb{R})$ — пространство всех действительных матриц размера $n \times m$ (пишем M_n, если $m = n$). Для вектора $x \in \mathbb{R}^n$ через $x^\downarrow$ обозначим вектор, полученный перестановкой его элементов в порядке убывания. Для $x, v \in \mathbb{R}^n$ говорят, что x *мажорируется* v, обозначается $x \preceq v$ (или $v \succeq x$), если $\sum_{j=1}^k x_j^\downarrow \le \sum_{j=1}^k v_j^\downarrow$ для любого $k = 1, 2, \ldots, n$, причем при $k = n$ достигается равенство. Матрица называется *строчно-стохастической*,

*Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 16-11-10075).

если все ее элементы неотрицательны, и сумма элементов каждой строки равна 1. Множество всех таких матриц размера $n \times n$ обозначается Ω_n^{row}. Если дополнительно сумма элементов каждого столбца тоже равна 1, то матрица называется *двоякостохастической*. Согласно теореме Биркгофа — Неймана множество Ω_n всех двояко-стохастических $(n \times n)$-матриц является выпуклой оболочкой множества матриц перестановок (см., например, [1, теорема I.2.A.2]).

Векторы в $\mathbb{R}^n$ считаются столбцами. Для матрицы A транспонированная матрица обозначается A^t. Вектор, j-я координата которого равна 1, а остальные равны 0, обозначим e_j, а вектор из всех единиц (подходящей длины) — e. Выпуклая оболочка множества $S \subseteq \mathbb{R}^n$ обозначается $\operatorname{conv}(S)$. Обозначим j-й столбец матрицы A через $A^{(j)}$, а i-ю строку — через $A_{(i)}$. Пусть $R(A)$ — множество всех строк матрицы A. Через $P(n)$ обозначается множество всех матриц-перестановок, т. е. таких матриц $A = (a_{ij}) \in M_n$, что существует перестановка σ на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, для которой выполняется $a_{ij} = 1$ тогда и только тогда, когда $\sigma(i) = j$, и $a_{ij} = 0$ во всех остальных случаях. Символ $P_{(ij)}$ обозначает матрицу-перестановку, соответствующую транспозиции элементов i и j. Символ I обозначает единичную матрицу, а J — матрицу размера $n \times n$, все элементы которой равны 1. Для кортежа матриц $\mathcal{X}$ обозначим его j-ю матрицу через $\mathcal{X}_j$.

Пусть $A, B \in M_{n,m}$. Определим мажоризации на множестве матриц, которые будут рассматриваться в этой работе. Подробные сведения о них можно найти в работах [1–3].

- Слабая мажоризация: $A \preceq^w B$, если существует строчно-стохастическая матрица $X \in \Omega_n^{row}$ такая, что $A = XB$.
- Направленная мажоризация: $A \preceq^d B$, если $Ax \preceq Bx$ для любого $x \in \mathbb{R}^m$.
- Сильная мажоризация: $A \preceq^s B$, если существует матрица $X \in \Omega_n$ такая, что $A = XB$.

Известно, что из сильной мажоризации следует направленная, из направленной следует слабая, но ни одна из обратных импликаций, вообще говоря, неверна (см., например, [4]).

Следующая теорема показывает, что сильная мажоризация является обобщением векторной.

Теорема 1 [1, теорема I.2.B.2]. *Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$. Тогда $a \preceq b$, если и только если $a \preceq^s b$.*

Определение 2. Будем говорить, что линейное отображение $\Phi : M_{n,m} \to M_{n,m}$ сохраняет *слабую* (соответственно, *направленную* или *сильную*) *мажоризацию*, если из $A \preceq^w B$ (соответственно $A \preceq^d B$ или $A \preceq^s B$) следует, что $\Phi(A) \preceq^w \Phi(B)$ (соответственно $\Phi(A) \preceq^d \Phi(B)$ или $\Phi(A) \preceq^s \Phi(B)$) для любых $A, B \in M_{n,m}$.

В дальнейшем нам потребуется следующий результат о структуре линейных отображений, сохраняющих сильную и направленную мажоризации, полученный Ли и Пуном в работе [5].

Теорема 3 [5, теорема 2]. *Пусть Φ — линейный оператор на $M_{n,m}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) Φ сохраняет направленную мажоризацию;

(2) Φ сохраняет сильную мажоризацию;

(3) если $A \preceq^s B$, то $\Phi(A) \preceq^d \Phi(B)$ для любых $A, B \in M_{n,m}$;

(4) выполнено одно из следующих условий:

(a) существуют $S_1, \dots, S_m \in M_{n,m}$ такие, что $\Phi(X) = \sum_{j=1}^{m} (e^t X^{(j)}) S_j$;

(b) существуют такие $R, S \in M_m$ и $P \in P(n)$, что $\Phi(X) = PXR + JXS$.

Ранее в работе [6, предложение 5.1] было показано, что если линейное отображение имеет форму (b), то оно сохраняет отношение, эквивалентное направленной мажоризации, а в работе [7, теорема 2.5] была найдена характеризация отображений, сохраняющих сильную мажоризацию.

Для слабой мажоризации будем использовать результат Хасани и Раджабалипура (см. [8]).

Теорема 4 [8, теорема 3.1]. *Линейный оператор Φ, действующий на пространстве $M_{n,m}$, сохраняет отношение $\preceq^w$ тогда и только тогда, когда $\Phi(X) = (aI + bP)XL$ для любого $X \in M_{n,m}$, где $L \in M_m$, $P \in P(n)$, $P \neq I$, коэффициенты a, $b \in \mathbb{R}$ удовлетворяют условию $ab \leq 0$, причем, если $n \neq 2$, то $ab = 0$.*

Непосредственной проверкой легко убедиться, что отображения Φ, описанные в теореме 4, действительно сохраняют слабую мажоризацию, а отображения Φ, удовлетворяющие условию (a) теоремы 2, действительно сохраняют сильную и направленную мажоризации. Для полноты изложения покажем, что линейное отображение, удовлетворяющее условию (b) теоремы 2, сохраняет сильную и направленную мажоризации.

Лемма 5. *Пусть Φ — линейный оператор на $M_{n,m}$, заданный формулой $\Phi(X) = PXR + JXS$ для некоторых $R, S \in M_m$ и $P \in P(n)$.*

Тогда Φ сохраняет направленную мажоризацию.

Доказательство. Рассмотрим произвольное $v \in \mathbb{R}^m$. Тогда $\Phi(X)v = PXRv + JXSv$. Предположим, что $A \preceq^d B$ для некоторых $A, B \in M_{n,m}$.

1. Докажем, что $PARv \preceq PBRv$.

По определению направленной мажоризации (и так как $Rv \in \mathbb{R}^m$) из $A \preceq^d B$ следует, что $A(Rv) = QB(Rv)$ для некоторой двояко-стохастической матрицы Q. Значит, $PARv = PQB(Rv) = PQ(P^{-1}P)B(Rv) = (PQP^{-1})PBRv$. Поскольку $PQP^{-1} \in \Omega_n$, получаем, что $PARv \preceq PBRv$.

Напомним, что J — матрица размера $n \times n$, все элементы которой равны 1. В частности, это значит, что $J = JQ_1 = Q_2J$ для любых двояко-стохастических $(n \times n)$-матриц Q_1 и Q_2.

2. Покажем, что $JASv = JBSv = \lambda e$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$.

По определению направленной мажоризации (и так как $Sv \in \mathbb{R}^m$) из $A \preceq^d B$ следует, что $A(Sv) = Q'B(Sv)$ для некоторой двояко-стохастической матрицы Q'.

Значит, $JASv = JBSv$. Кроме того, поскольку $ASv \in \mathbb{R}^n$, получаем, что $J(ASv) = J(BSv) = \lambda e$, где $\lambda = e^t(ASv) \in \mathbb{R}$.

По определению векторной мажоризации из $PARv \preceq PBRv$ следует, что $PARv + \lambda e \preceq PBRv + \lambda e$.

Итак, если $A \preceq^d B$ для некоторых $A, B \in M_{n,m}$, то $\Phi(A)v \preceq \Phi(B)v$ для любого $v \in \mathbb{R}^m$, т. е. $\Phi(A) \preceq^d \Phi(B)$, и Φ сохраняет направленную мажоризацию. $\square$

Лемма 6. *Пусть Φ — линейный оператор на $M_{n,m}$, заданный формулой $\Phi(X) = PXR + JXS$ для некоторых $R, S \in M_m$ и $P \in P(n)$.*

Тогда Φ сохраняет сильную мажоризацию.

Доказательство. Предположим, что $A \preceq^s B$ для некоторых $A, B \in M_{n,m}$. По определению это значит, что существует такая двояко-стохастическая матрица Q, что $A = QB$.

Докажем, что $\Phi(A) \preceq^s \Phi(B)$. Напомним, что $J = JQ_1 = Q_2J$ для любых двояко-стохастических $(n \times n)$-матриц Q_1 и Q_2.

Итак, $\Phi(A) = PAR + JAS = PQBR + JQBS = PQ(P^{-1}P)BR + JBS = (PQP^{-1})(PBR) + (PQP^{-1})(JBS) = (PQP^{-1})\Phi(B)$. Поскольку $(PQP^{-1}) \in \Omega_n$, это значит, что $\Phi(A) \preceq^s \Phi(B)$, и Φ сохраняет сильную мажоризацию. $\square$

Лемма 7. *Пусть Φ — линейный оператор на $M_{n,m}$, заданный формулой $\Phi(X) = PXR + JXS$ для некоторых $R, S \in M_m$ и $P \in P(n)$.*

Тогда из $A \preceq^s B$ следует, что $\Phi(A) \preceq^d \Phi(B)$ для любых $A, B \in M_{n,m}$.

Доказательство. Поскольку сильная мажоризация влечет направленную, получаем, что $A \preceq^s B$ влечет $A \preceq^d B$, что, в свою очередь, влечет $\Phi(A) \preceq^d \Phi(B)$, так как по доказанному выше Φ сохраняет направленную мажоризацию. $\square$

Пусть $M_{n,m}^k$ обозначает множество всех кортежей длины k, состоящих из матриц $M_{n,m}$. Будем рассматривать $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in M_{n,m}^k$, т.е. $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_k)$, $\mathcal{B} = (B_1, B_2, \ldots, B_k)$. Тогда кортеж $\mathcal{A}$ слабо (соответственно, направленно или сильно) мажорируется кортежем $\mathcal{B}$ (или $\mathcal{B}$ мажорирует $\mathcal{A}$), если $A_i \preceq^w B_i$ (соответственно, $A_i \preceq^d B_i$ или $A_i \preceq^s B_i$) для всех индексов $i = 1, \ldots, k$.

Целью настоящей статьи является характеризация линейных отображений матричных кортежей (упорядоченных множеств матриц одинакового размера), сохраняющих мажоризации. Отметим, что мажоризации матриц имеют многочисленные приложения (см., например, [9, 10]). В частности, используются для сравнения статистических экспериментов (см. [11]). В [2] были предложены применения мажоризаций наборов нескольких матриц для сравнения серий статистических экспериментов.

Настоящая работа организована следующим образом. В главе 2 рассматриваются основные понятия, в главе 3 охарактеризованы отображения, сохраняющие сильную и направленную мажоризации кортежей матриц, а в главе 4 — отображения, сохраняющие слабую мажоризацию.

2. Линейные отображения кортежей матриц. Линейное отображение Φ, переводящее кортеж матриц длины l в кортеж матриц длины k, т.е. $\Phi : M_{n,m}^l \to M_{n,m}^k$, может быть однозначно задано своим образом на кортежах вида $(0, \cdots, 0, X, 0, \cdots, 0)$. Если матрица X расположена в i-й позиции в кортеже, напишем

$$\Phi(0, \cdots, 0, X, 0, \cdots, 0) = (\Phi_i^1(X), \cdots, \Phi_i^k(X)).$$

Легко видеть, что отображение Φ линейно тогда и только тогда, когда каждое отображение Φ_i^j, $1 \le i \le l, 1 \le j \le k$, также линейно. Таким образом, для задания линейного отображения Φ необходимо и достаточно определить все отображения Φ_i^j, $1 \le i \le l, 1 \le j \le k$.

Тогда для линейного отображения $\Phi : M_{n,m}^l \to M_{n,m}^k$ справедливо

$$\Phi(X_1, \cdots, X_l) = (\Phi_1^1(X_1) + \cdots + \Phi_l^1(X_l), \cdots, \Phi_1^k(X_1) + \cdots + \Phi_l^k(X_l)),$$

где все отображения Φ_i^j линейны.

Далее $\preceq^x$ и $\preceq^y$ обозначают любые из введенных выше типов мажоризаций, в том числе совпадающие, т. е. $\preceq^x, \preceq^y \in \{\preceq^w, \preceq^d, \preceq^s\}$.

Лемма 8. *Пусть $\Phi : M_{n,m}^l \to M_{n,m}^k$ — такое линейное отображение, что из $\mathcal{A} \preceq^x \mathcal{B}$ следует $\Phi(\mathcal{A}) \preceq^y \Phi(\mathcal{B})$ для любых $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in M_{n,m}^l$. Тогда для каждого отображения Φ_i^j верно, что из $A \preceq^x B$ следует $\Phi_i^j(A) \preceq^y \Phi_i^j(B)$ для любых $A, B \in M_{n,m}$.*

Доказательство. Для любых $A, B \in M_{n,m}$ неравенство $A \preceq^x B$ справедливо тогда и только тогда, когда $(0, \cdots, 0, A, 0, \cdots, 0) \preceq^x (0, \cdots, 0, B, 0, \cdots, 0)$, здесь рассмотрены кортежи с единственной ненулевой матрицей на i-м месте для некоторого $i \in \{1, \ldots, l\}$. По условию получаем, что $(\Phi_i^1(A), \cdots, \Phi_i^k(A)) \preceq^y (\Phi_i^1(B), \cdots, \Phi_i^k(B))$. По определению это означает, что $\Phi_i^j(A) \preceq^y \Phi_i^j(B)$ для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$. Таким образом, для Φ_i^j верно, что из $A \preceq^x B$ следует $\Phi_i^j(A) \preceq^y \Phi_i^j(B)$ для всех индексов $i \in \{1, \ldots, l\}$, $j \in \{1, \ldots, k\}$. $\square$

Аналогично определению 2 будем говорить, что линейное отображение $\Phi : M_{n,m}^l \to M_{n,m}^k$ *сохраняет* мажоризацию кортежей $\preceq^x$, если из $\mathcal{A} \preceq^x \mathcal{B}$ следует, что $\Phi(\mathcal{A}) \preceq^x \Phi(\mathcal{B})$ для любых $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in M_{n,m}^l$.

Следующие примеры показывают, что утверждение, обратное к лемме 8, вообще говоря, неверно. Первый демонстрирует это для сильной и направленной мажоризаций, второй — для слабой.

Пример 9. Пусть $P = \left(\begin{smallmatrix} 0&0&1\\ 1&0&0\\ 0&1&0 \end{smallmatrix}\right)$, $R = \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3\\ 4&5&6\\ 7&8&9 \end{smallmatrix}\right)$. Рассмотрим линейное отображение $\Phi : M_{3,3}^3 \to M_{3,3}^2$, заданное формулой $\Phi(X_1, X_2, X_3) = (PX_1R + PX_2R + PX_3R,\ 0)$. Тогда Φ не сохраняет сильную и направленную мажоризации, в то время как покомпонентные отображения сохраняют соответствующие отношения.

Действительно, пусть $B_1 = P^{-1}\left(\begin{smallmatrix} 1&0&0\\ 0&0&0\\ 0&0&0 \end{smallmatrix}\right)$, $B_2 = P^{-1}\left(\begin{smallmatrix} 0&0&0\\ 1&0&0\\ 0&0&0 \end{smallmatrix}\right)$, $A_1 = A_2 = B_1$ и $A_3 = B_3 = 0$. Непосредственная проверка показывает, что $A_i \preceq^s B_i$ и $A_i \preceq^d B_i$.

Тогда $(\Phi(B_1, B_2, B_3))_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3\\ 1&2&3\\ 0&0&0 \end{smallmatrix}\right)$, а $(\Phi(A_1, A_2, A_3))_1 = \left(\begin{smallmatrix} 2&4&6\\ 0&0&0\\ 0&0&0 \end{smallmatrix}\right)$. Поскольку, например, $(\Phi(A_1, A_2, A_3))_1 e_1 = (2,0,0)^t \not\preceq (1,1,0)^t = (\Phi(B_1, B_2, B_3))_1 e_1$, получаем, что $\Phi(A_1, A_2, A_3) \not\preceq^d \Phi(B_1, B_2, B_3)$ и $\Phi(A_1, A_2, A_3) \not\preceq^s \Phi(B_1, B_2, B_3)$.

Пример 10. Пусть $\Phi : M_{2,2}^3 \to M_{2,2}^2$ — линейное отображение, определенное $\Phi(X_1, X_2, X_3) = (\left(\begin{smallmatrix} 5&-5\\ -5&5 \end{smallmatrix}\right) X_1 L + \left(\begin{smallmatrix} -1&2\\ 2&-1 \end{smallmatrix}\right) X_2 L + X_3 L,\ 0)$, где $L = \left(\begin{smallmatrix} 1&2\\ 3&4 \end{smallmatrix}\right)$. Тогда Φ не сохраняет слабую мажоризацию, в то время как все покомпонентные отображения ее сохраняют.

Действительно, пусть $B_1 = \dfrac{1}{5}\left(\begin{smallmatrix} 1&0\\ 0&0 \end{smallmatrix}\right)$, $B_2 = \left(\begin{smallmatrix} -1&2\\ 2&-1 \end{smallmatrix}\right)^{-1}\left(\begin{smallmatrix} -1&0\\ 1&0 \end{smallmatrix}\right)$, $A_1 = \dfrac{1}{5}\left(\begin{smallmatrix} 1&0\\ 1&0 \end{smallmatrix}\right)$, $A_2 = B_2$ и $A_3 = B_3 = 0$. Непосредственная проверка показывает, что $A_i \preceq^w B_i$.

Тогда $(\Phi(B_1, B_2, B_3))_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1&0\\ -1&0 \end{smallmatrix}\right) L + \left(\begin{smallmatrix} -1&0\\ 1&0 \end{smallmatrix}\right) L + 0 = 0$. Но $(\Phi(A_1, A_2, A_3))_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1&-1\\ -1&1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1&0\\ 1&0 \end{smallmatrix}\right) L + \left(\begin{smallmatrix} -1&0\\ 1&0 \end{smallmatrix}\right) L + 0 = \left(\begin{smallmatrix} -1&-2\\ 1&2 \end{smallmatrix}\right) \neq 0$.

Это значит, что $\Phi(A_1, A_2, A_3) \not\preceq^w \Phi(B_1, B_2, B_3)$.

3. Линейные отображения, сохраняющие сильную и направленную мажоризации кортежей матриц.

Лемма 11. *Пусть $\Phi : M_{n,m}^l \to M_{n,m}^k$ — линейное отображение. Предположим, что существуют такие индексы $u, w \in \{1, \ldots, l\}$ и $p \in \{1, \ldots, k\}$, что*

$$\Phi_u^p(X) = P_1XR_1 + JXS_1 \quad и \quad \Phi_w^p(X) = P_2XR_2 + JXS_2$$

для некоторых матриц $P_1, P_2 \in P(n)$ и $R_1, R_2 \in M_m$. Предположим также, что из $\mathcal{A} \preceq^s \mathcal{B}$ следует $\Phi(\mathcal{A}) \preceq^d \Phi(\mathcal{B})$ для любых $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in M_{n,m}^l$. Тогда выполняется хотя бы одно из равенств $R_1 = 0$ и $R_2 = 0$.

Доказательство. С точностью до перестановки матриц в кортеже можно предположить, что $u = 1$, $w = 2$. Тогда, по условию, для любых $X_1, X_2 \in M_{n,m}$ выполняется равенство

$$(\Phi(X_1, X_2, 0, \ldots, 0))_p = (P_1X_1R_1 + JX_1S_1) + (P_2X_2R_2 + JX_2S_2). \tag{1}$$

Для произвольных матриц $B_1, B_2 \in M_{n,m}$ и произвольных двояко-стохастических матриц $Q_1, Q_2 \in \Omega_n$ рассмотрим кортежи $\mathcal{A} = (Q_1B_1, Q_2B_2, 0, \ldots, 0) \in M_{n,m}^l$ и $\mathcal{B} = (B_1, B_2, 0, \ldots, 0) \in M_{n,m}^l$. По определению имеем $\mathcal{A} \preceq^s \mathcal{B}$. Тогда $\Phi(\mathcal{A}) \preceq^d \Phi(\mathcal{B})$.

Используя представление (1), получаем по определению направленной мажоризации и теореме 1, что для любого $v \in \mathbb{R}^m$ существует такая двояко-стохастическая матрица Q, что $((P_1Q_1B_1R_1 + JQ_1B_1S_1) + (P_2Q_2B_2R_2 + JQ_2B_2S_2))v = Q((P_1B_1R_1 + JB_1S_1) + (P_2B_2R_2 + JB_2S_2))v$. Поскольку $JQ_1 = JQ_2 = QJ = J$, из этого следует, что

$$(P_1Q_1B_1R_1 + P_2Q_2B_2R_2)v = Q(P_1B_1R_1 + P_2B_2R_2)v. \tag{2}$$

Допустим, что обе матрицы R_1 и R_2 ненулевые. Тогда, если существует такой индекс $j \in \{1, \ldots, m\}$, что столбцы $R_1^{(j)}$ и $R_2^{(j)}$ одновременно ненулевые, то положим $v = e_j$. Иначе положим $v = e_{j_1} + e_{j_2}$, где $R_1^{(j_1)}$ и $R_2^{(j_2)}$ одновременно ненулевые, $j_1, j_2 \in \{1, \ldots, m\}$. В обоих случаях векторы R_1v и R_2v являются ненулевыми.

Заметим, что равенство (2) выполняется для произвольных матриц B_1, B_2 и произвольных двояко-стохастических матриц Q_1, Q_2. Выберем такие B_1, B_2, что $P_iB_iR_iv = e_i$, $i = 1, 2$. Это возможно, так как векторы R_1v и R_2v являются ненулевыми. Пусть Q'_1, Q'_2 — такие двояко-стохастические матрицы, что $Q_1'^{(1)} = Q_2'^{(2)} = e_1$. Тогда положим $Q_i = P_i^{-1}Q'_iP_i$, $i = 1, 2$.

В этом случае равенство (2) принимает вид $(Q'_1P_1B_1R_1 + Q'_2P_2B_2R_2)v = Q(P_1B_1R_1 + P_2B_2R_2)v$, откуда $Q_1e_1 + Q_2e_2 = Q(e_1 + e_2)$. Итак, существует такое $Q \in \Omega_n$, что $Q_1'^{(1)} + Q_2'^{(2)} = Q^{(1)} + Q^{(2)}$. Но по выбору Q'_1 и Q'_2 получается, что сумма элементов первой строки матрицы Q не меньше 2, т. е. Q не является двояко-стохастической.

Таким образом, хотя бы одна из матриц R_1 и R_2 должна быть нулевой. $\square$

Заметим, что в примере 9 выполняется $\Phi_1^1(X) = \Phi_2^1(X) = PXR$, где $R \neq 0$, и рассуждения в этом примере иллюстрируют доказательство предыдущей леммы.

Лемма 12. *Пусть* $\Phi : M^l_{n,m} \to M^k_{n,m}$ — *линейное отображение. Предположим, что существуют такие индексы* $u, w \in \{1,\dots,l\}$ *и* $p \in \{1,\dots,k\}$, *что*

$$\Phi^p_u(X) = PXR + JXS \quad \text{и} \quad \Phi^p_w(X) = \sum_{j=1}^m (e^t X^{(j)}) S_j$$

для некоторых матриц $P \in P(n)$, *ненулевой* $R \in M_m$ *и* $S_j \in M_{n,m}$, $j = 1,\dots,m$.

Предположим также, что из $\mathcal{A} \preceq^s \mathcal{B}$ *следует* $\Phi(\mathcal{A}) \preceq^d \Phi(\mathcal{B})$ *для любых* $\mathcal{A},\mathcal{B} \in M^l_{n,m}$. *Тогда* $|R(S_j)| = 1$ *для любого* j.

Доказательство. С точностью до перестановки матриц в кортеже можно предположить, что $u = 1$, $w = 2$. Тогда по условию для любых $X_1, X_2 \in M_{n,m}$ выполняется равенство

$$(\Phi(X_1, X_2, 0, \dots, 0))_p = (PX_1R + JX_1S) + \sum_{j=1}^m (e^t X_2^{(j)}) S_j. \tag{3}$$

Для произвольных матриц $B_1, B_2 \in M_{n,m}$ и произвольных двояко-стохастических матриц $Q_1, Q_2 \in \Omega_n$ рассмотрим кортежи $\mathcal{A} = (Q_1B_1, Q_2B_2, 0,\dots,0) \in M^l_{n,m}$ и $\mathcal{B} = (B_1, B_2, 0, \dots, 0) \in M^l_{n,m}$. По определению имеем $\mathcal{A} \preceq^s \mathcal{B}$. Тогда $\Phi(\mathcal{A}) \preceq^d \Phi(\mathcal{B})$.

Используя представление (3), получаем по определению направленной мажоризации и теореме 1, что для любого $v \in \mathbb{R}^m$ существует такая двояко-стохастическая матрица Q', что

$$PQ_1B_1Rv + JQ_1B_1Sv + \left(\sum_{j=1}^m (e^t Q_2 B_2^{(j)}) S_j\right) v =$$
$$= Q'PB_1Rv + Q'JB_1Sv + Q'\left(\sum_{j=1}^m (e^t B_2^{(j)}) S_j\right) v.$$

Поскольку $JQ_1 = Q'J = J$, последнее равенство равносильно

$$PQ_1B_1R + \sum_{j=1}^m (e^t Q_2 B_2^{(j)}) S_j \preceq^d PB_1R + \sum_{j=1}^m (e^t B_2^{(j)}) S_j.$$

Фиксируем произвольную B_2 и обозначим

$$K = (k_{ij}) := \sum_{j=1}^m (e^t Q_2 B_2^{(j)}) S_j = \sum_{j=1}^m (e^t B_2^{(j)}) S_j \in M_{n,m}.$$

Последнее равенство верно, поскольку матрица Q_2 двояко-стохастическая.

Тогда $PQ_1B_1R + K \preceq^d PB_1R + K$. Рассмотрим $B = PB_1$ и $Q = PQ_1P^{-1}$. Тогда мы получаем, что $QBR + K \preceq^d BR + K$, т. е. $(QBR + K)v \preceq (BR + K)v$ для любого $v \in \mathbb{R}^m$.

1. Рассмотрим произвольный индекс j, для которого $R^{(j)} \neq 0$, и положим $v = e_j$. Пусть l — такой индекс, что $k_{lj} \leq k_{ij}$ для всех индексов i, $1 \leq i \leq n$.

Поскольку столбец $R^{(j)}$ ненулевой, мы можем выбрать такую матрицу B, что $BR^{(j)} = \lambda e_l$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенствам $\lambda \geq k_{ij} - k_{lj}$ для любого $1 \leq i \leq n$. Тогда мы получим, что $(\lambda Q e_l + K^{(j)}) \preceq (\lambda e_l + K^{(j)})$.

Пусть $Q = P_{(lq)}$ для некоторого произвольного q. Тогда, по определению векторной мажоризации, $\max(\lambda e_q + K^{(j)}) \leq \max(\lambda e_l + K^{(j)})$. Но по выбору λ имеем, что $\lambda + k_{qj} \geq \lambda + k_{lj} \geq k_{ij}$ для всех индексов $i = 1, \ldots, n$. Отсюда следует, что $\max(\lambda e_q + K^{(j)}) = \lambda + k_{qj}$, а $\max(\lambda e_l + K^{(j)}) = \lambda + k_{lj}$. Значит, $k_{qj} \leq k_{lj}$, но по предположению $k_{qj} \geq k_{lj}$. Итак, $k_{lj} = k_{ij}$ для любого i.

2. Теперь рассмотрим произвольное h, для которого $R^{(h)} = 0$. Поскольку матрица R ненулевая, существует такое $g \in \{1, \ldots, m\}$, что $R^{(g)} \neq 0$. Положим $v = e_h + e_g$ и будем рассуждать абсолютно аналогично пункту 1. Получим, что $k_{lh} + k_{lg} = k_{ih} + k_{ig}$ для любого i. По доказанному выше $k_{lg} = k_{ig}$, а значит $k_{lh} = k_{ih}$.

Таким образом, $|R(K)| = 1$ для любой матрицы B_2. Напомним, что $K = \sum_{j=1}^{m}(e^t B_2^{(j)}) S_j$. Для каждого индекса $j \in \{1, \ldots, m\}$ выберем B_2 так, что $B_2^{(j)} = e_1$ и $B_2^{(q)} = 0$ при $q \neq j$. В этом случае $K = S_j$ и мы получаем, что $|R(S_j)| = 1$ для каждого индекса $j \in \{1, \ldots, m\}$. $\square$

Лемма 13. *Пусть для $A, B \in M_{n,m}$ выполняется $A \preceq^d B$. Тогда $e^t A = e^t B$ и $JA = JB$.*

Доказательство. Пусть $A \preceq^d B$. Тогда по определению направленной мажоризации $A^{(j)} = Ae_j \preceq Be_j = B^{(j)}$ для любого $j \in \{1, \ldots, m\}$. Тогда по определению векторной мажоризации $e^t A^{(j)} = e^t B^{(j)}$. Значит, $e^t A = e^t B$ и $JA = ee^t A = ee^t B = JB$. $\square$

Теорема 14. *Пусть отображение $\Phi : M_{n,m}^l \to M_{n,m}^k$ является линейным. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) Φ сохраняет направленную мажоризацию кортежей матриц;

(2) Φ сохраняет сильную мажоризацию кортежей матриц;

(3) из $\mathcal{A} \preceq^s \mathcal{B}$ следует $\Phi(\mathcal{A}) \preceq^d \Phi(\mathcal{B})$ для любых $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in M_{n,m}^l$;

(4) для каждого отображения Φ_i^j выполнено одно из следующих условий:

(a) существуют $S_1, \ldots, S_m \in M_{n,m}$ такие, что $|R(S_p)| = 1$ для любого p, и $\Phi_i^j(X) = \sum\limits_{p=1}^{m}(e^t X^{(p)}) S_p$;

(b) существует такая матрица $S \in M_m$, что $\Phi_i^j(X) = JXS$;

(c) существуют $S_1, \ldots, S_m \in M_{n,m}$ такие, что $|R(S_p)| > 1$ для некоторого p, и $\Phi_i^j(X) = \sum\limits_{p=1}^{m}(e^t X^{(p)}) S_p$;

(d) существуют $R, S \in M_m$ и $P \in P(n)$ такие, что $R \neq 0$ и $\Phi_i^j(X) = PXR + JXS$.

Кроме того, если Φ_i^j имеет вид (d), то Φ_q^j могут быть только вида (a) или (b) для любого $q \neq i$.

Доказательство. 1. Покажем, что верна импликация «*(4)* $\Rightarrow$ *(1)*». Действительно, если некоторый оператор T на $M_{n,m}$ имеет вид (a), (b) или (c), то из $A \preceq^d B$ следует, что $T(A) = T(B)$ по лемме 13. Более того, если T имеет вид (a) или (b), то $T(X) = QT(X)$ для любых $X \in M_{n,m}$ и $Q \in \Omega_n$.

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in M^l_{n,m}$ и $\mathcal{A} \preceq^d \mathcal{B}$. Фиксируем произвольное $j \in \{1, \dots, k\}$. Положим $A = \mathcal{A}_j$, $B = \mathcal{B}_j$. Если каждое отображение Φ^j_i имеет вид $(a), (b)$ или (c), то $(\Phi(\mathcal{A}))_j = (\Phi(\mathcal{B}))_j$. Если же Φ^j_i имеет вид (d) для некоторого i, то все отображения Φ^j_q могут быть только вида (a) или (b) для любого $q \neq i$. В этом случае $(\Phi(\mathcal{A}))_j = \Phi^j_i(A) + F$, а $(\Phi(\mathcal{B}))_j = \Phi^j_i(B) + F$, где $A \preceq^d B$ и $F \in M_{n,m}$ такое, что $QF = F$ для любой матрицы $Q \in \Omega_n$. По условию $\Phi^j_i(A) \preceq^d \Phi^j_i(B)$, если $A \preceq^d B$. Тогда по определению направленной мажоризации и теореме 1 получаем, что для любого $v \in \mathbb{R}^m$ существует такое $Q' \in \Omega_n$, что $\Phi^j_i(A)v = Q'\Phi^j_i(B)v$. Поскольку $QF = F$ для любой матрицы $Q \in \Omega_n$, для матрицы Q' тоже выполнено равенство $F = Q'F$. Тогда $\Phi^j_i(A)v + Fv = Q'\Phi^j_i(B)v + Fv = Q'(\Phi^j_i(B) + F)v$. Это значит, что $(\Phi(\mathcal{A}))_j \preceq^d (\Phi(\mathcal{B}))_j$ и *(1)* действительно верно.

2. Покажем, что «*(4)* $\Rightarrow$ *(2)*». Рассуждая совершенно аналогично пункту 1, получаем, что если $\mathcal{A} \preceq^s \mathcal{B}$, то существует такая матрица $Q' \in \Omega_n$, что $\Phi^j_i(A) + F = Q'(\Phi^j_i(B) + F)$, и, как следствие, $\Phi^j_i(A) \preceq^s \Phi^j_i(B)$, если $A \preceq^s B$ и *(2)*, действительно, верно.

3. Импликации «*(1)* $\Rightarrow$ *(3)*» и «*(2)* $\Rightarrow$ *(3)*» верны, поскольку сильная мажоризация влечет направленную.

4. Остается показать, что «*(3)* $\Rightarrow$ *(4)*». Из леммы 8 следует, что каждое отображение Φ^j_i удовлетворяет условию *(3)* теоремы 3. Тогда, по этой же теореме, каждое отображение Φ^j_i имеет вид (a), (b), (c) или (d). Остается доказать, что если некоторое отображение Φ^j_i имеет вид (d), то Φ^j_q могут быть только вида (a) или (b) для любого $q \neq i$. Предположим, что некоторый Φ^j_i имеет вид (d). Тогда по лемме 12 отображение Φ^j_w имеет вид, отличный от вида (c) для любого $w \neq i$, а по лемме 11 — отличный от вида (d) для любого $w \neq i$. Значит, выполнено утверждение *(4)*. □

4. Линейные отображения, сохраняющие слабую мажоризацию кортежей матриц.

Лемма 15. *Пусть $\Phi : M^l_{n,m} \to M^k_{n,m}$ — линейное отображение. Предположим, что существуют такие индексы $u, w \in \{1, \dots, l\}$ и $p \in \{1, \dots, k\}$, что*

$$\Phi^p_u(X) = P_1 X L_1 \quad \text{и} \quad \Phi^p_w(X) = P_2 X L_2$$

для некоторых матриц $P_1, P_2 \in P(n)$ и $L_1, L_2 \in M_m$. Предположим также, что из $\mathcal{A} \preceq^w \mathcal{B}$ следует $\Phi(\mathcal{A}) \preceq^w \Phi(\mathcal{B})$ для любых $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in M^l_{n,m}$. Тогда выполняется хотя бы одно из равенств $L_1 = 0$ и $L_2 = 0$.

Доказательство. С точностью до перестановки матриц в кортеже можно предположить, что $u = 1$, $w = 2$. Тогда по условию для любых $X_1, X_2 \in M_{n,m}$ выполняется равенство

$$(\Phi(X_1, X_2, 0, \dots, 0))_p = (P_1 X_1 L_1) + (P_2 X_2 L_2). \tag{4}$$

Для произвольных матриц $B_1, B_2 \in M_{n,m}$ и произвольных строчно-стохастических матриц $R_1, R_2 \in \Omega^{row}_n$ рассмотрим кортежи $\mathcal{A} = (R_1 B_1, R_2 B_2, 0, \dots, 0) \in M^l_{n,m}$ и $\mathcal{B} = (B_1, B_2, 0, \dots, 0) \in M^l_{n,m}$. По определению имеем $\mathcal{A} \preceq^w \mathcal{B}$. Тогда $\Phi(\mathcal{A}) \preceq^w \Phi(\mathcal{B})$.

Используя представление (4), получаем по определению слабой мажоризации, что существует такая строчно-стохастическая матрица R, что

$$P_1 R_1 B_1 L_1 + P_2 R_2 B_2 L_2 = R(P_1 B_1 L_1 + P_2 B_2 L_2). \tag{5}$$

Допустим, что обе матрицы L_1, L_2 ненулевые. Тогда, как и в доказательстве леммы 11, мы можем выбрать такие B_1, B_2 и $v \in \mathbb{R}^m$, что $P_i B_i L_i v = e_i$, $i = 1, 2$. Тогда, домножив обе стороны (5) справа на v, получим $R_1^{(1)} + R_2^{(2)} = R^{(1)} + R^{(2)}$ для некоторой строчно-стохастической матрицы R, что также, как и в доказательстве леммы 11, приводит к противоречию. Итак, хотя бы одна из матриц L_1, L_2 является нулевой. □

Лемма 16. *Пусть $\Phi : M_{2,m}^l \to M_{2,m}^k$ — линейное отображение. Предположим, что существуют такие индексы $u, w \in \{1, \dots, l\}$ и $p \in \{1, \dots, k\}$, что*

$$\Phi_u^p(X) = (a_1 I + b_1 P) X L_1 \quad и \quad \Phi_w^p(X) = (a_2 I + b_2 P) X L_2$$

для некоторых матриц $L_1, L_2 \in M_m$, $P \in P(2)$, $P \neq I$ и действительных чисел a_s, b_s, где $a_s b_s \leq 0$, $s = 1, 2$.

Предположим также, что из $\mathcal{A} \preceq^w \mathcal{B}$ следует $\Phi(\mathcal{A}) \preceq^w \Phi(\mathcal{B})$ для любых $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in M_{n,m}^l$. Тогда хотя бы одно из равенств $\Phi_u^j(X) = 0$ и $\Phi_w^j(X) = 0$ выполняется для всех матриц $X \in M_{2,m}$.

Доказательство. С точностью до перестановки матриц в кортеже можно предположить, что $u = 1$, $w = 2$. Тогда мы получим, что для любых B_i, $R_i \in \Omega_2^{row}$ существует $R \in \Omega_2^{row}$ такое, что $(a_1 I + b_1 P_1) R_1 B_1 L_1 + (a_2 I + b_2 P_2) R_2 B_2 L_2 = R((a_1 I + b_1 P_1) B_1 L_1 + (a_2 I + b_2 P_2) B_2 L_2))$. Мы можем переписать это уравнение, поскольку в $P(2)$ существует единственное $P \neq I$:

$$\left(\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{smallmatrix}\right) R_1 B_1 L_1 + \left(\begin{smallmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{smallmatrix}\right) R_2 B_2 L_2 = R(\left(\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{smallmatrix}\right) B_1 L_1 + \left(\begin{smallmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{smallmatrix}\right) B_2 L_2).$$

Рассмотрим следующие случаи.

Случай 1. Предположим, что $a_i^2 \neq b_i^2$, $i = 1, 2$. Тогда матрицы $\left(\begin{smallmatrix} a_i & b_i \\ b_i & a_i \end{smallmatrix}\right)$ обратимы. В этом случае заменим B_i на $\left(\begin{smallmatrix} a_i & b_i \\ b_i & a_i \end{smallmatrix}\right)^{-1} B_i$ и положим $R_1 = I$, $R_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Таким образом, мы получим

$$\left(\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{smallmatrix}\right) I \left(\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{smallmatrix}\right)^{-1} B_1 L_1 + \left(\begin{smallmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{smallmatrix}\right)^{-1} B_2 L_2 = R(B_1 L_1 + B_2 L_2).$$

Поскольку $\left(\begin{smallmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{smallmatrix}\right)$, мы можем переписать это уравнение в виде

$$B_1 L_1 + \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) B_2 L_2 = R(B_1 L_1 + B_2 L_2). \tag{6}$$

Выберем $v \in \mathbb{R}^2$ так, что $v = e_i$, если существует такое i, что векторы $L_1^{(i)}$ и $L_2^{(i)}$ оба ненулевые, и $v = e$ иначе. Предполагаем, что L_1 и L_2 ненулевые, иначе все доказано. Тогда существуют такие матрицы B_i, что $B_i L_i v = e_i$. В этом случае, домножив равенство (6) на v, мы получаем $e_1 + \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) e_2 = 2e_1 = R(e_1 + e_2) = Re = e$, противоречие.

Осталось рассмотреть случай, когда $a_1^2 = b_1^2$. Более того, $a_1 = -b_1$, поскольку $a_1 b_1 \leq 0$. Отметим, что если $a_1 = 0$, то $\Phi_1^j(X) = 0$.

Случай 2. Пусть $a_1^2 = b_1^2$, но $a_2^2 \neq b_2^2$. Без ограничения общности, предположим, что $a_1 = 1$. Иначе можно заменить B_1 на $(\frac{1}{a_1}) B_1$. Тогда получается, что

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) R_1 B_1 L_1 + \left(\begin{smallmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{smallmatrix}\right) R_2 B_2 L_2 = R(\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) B_1 L_1 + \left(\begin{smallmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{smallmatrix}\right) B_2 L_2)). \tag{7}$$

Выбираем $v \in \mathbb{R}_2$ из тех же соображений, что и выше, так, чтобы $L_1 v, L_2 v \neq 0$. Поскольку $\left(\begin{smallmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{smallmatrix}\right)$ обратима, мы можем подобрать B_1 и B_2 так, чтобы $B_1 L_1 v = e_1$ и $\left(\begin{smallmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{smallmatrix}\right) B_2 L_2 v = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) e_2$.

Домножим обе части равенства (7) на v. Тогда правая часть обратится в ноль. Действительно, $R(\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)(e_1+e_2)) = 0$. Пусть $R_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $R_2 = I$. Тогда левая часть станет равна $0 + \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \neq 0$, противоречие.

Случай 3. Пусть $a_1 = -b_1$, $a_2 = -b_2$. В этом случае получается, что $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)(R_1 B_1 L_1 + R_2 B_2 L_2) = R\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)(B_1 L_1 + B_2 L_2)$. Доказательство этого случая полностью повторяет доказательство предыдущего. Достаточно лишь рассмотреть такую матрицу B_2, что $B_2 L_2 v = e_2$ вместо $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) e_2$. $\square$

Заметим, что в примере 10 отображения Φ_1^1 и Φ_2^1 на $M_{2,m}$ оба не тождественно равны нулю, и рассуждения в этом примере иллюстрируют доказательство предыдущей леммы.

Теорема 17. *Пусть $\Phi : M_{n,m}^l \to M_{n,m}^k$ — линейное отображение. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) Φ сохраняет слабую мажоризацию кортежей матриц;

(2) каждое отображение Φ_i^j является линейным отображением и сохраняет слабую мажоризацию; кроме того, если $\Phi_i^j \neq 0$ для некоторых i, j, то $\Phi_q^j = 0$ для любого $q \neq i$.

Доказательство. По лемме 8 достаточно доказать, что если $\Phi_i^j \neq 0$ для некоторых i, j, то $\Phi_q^j = 0$ для любого $q \neq i$. Это уже было доказано в предыдущих леммах: случай $n \neq 2$ рассмотрен в лемме 15, а случай $n = 2$ — в лемме 16. $\square$

Авторы благодарны рецензенту за внимательное прочтение и ценные замечания.

Литература

1. *Marshall A. W., Olkin I., Arnold B. C.* Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications. Second Edition. New York: Springer, 2011.

2. *Dahl G., Guterman A., Shteyner P.* Majorization for matrix classes // Linear Algebra Appl. 2018. Vol. 555. P. 201–221. https://doi.org/10.1016/j.laa.2018.06.003

3. *Dahl G., Guterman A., Shteyner P.* Majorization for $(0,1)$-matrices // Linear Algebra Appl. 2019. Vol. 585. P. 147–163. https://doi.org/10.1016/j.laa.2019.09.038

4. *Martínez Pería F. D., Massey P. G., Silvestre L. E.* Weak matrix majorization // Linear Algebra Appl. 2005. Vol. 403. P. 343–368. https://doi.org/10.1016/j.laa.2005.02.003

5. *Li C.-K., Poon E.* Linear operators preserving directional majorization // Linear Algebra Appl. 2001. Vol. 325. P. 141–146. https://doi.org/10.1016/S0024-3795(00)00328-1

6. *Koshevoy G., Mosler K.* Lift zonoids, random convex hulls and the variability of random vectors // Bernoulli. 1998. Vol. 4, no. 3. P. 377–399.

7. *Beasley L. B., Lee S.-G.* Linear operators preserving multivariate majorization // Linear Algebra Appl. 2000. Vol. 304. P. 141–159. https://doi.org/10.1016/S0024-3795(99)00227-X

8. *Hasani A. M., Radjabalipour M.* Linear preserver of matrix majorization // International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2006. Vol. 32. Iss. 4. P. 475–482.

9. *Koshevoy G.* Multivariate Lorenz majorization // Soc. Choice Welfare. 1995. Vol. 12. Iss. 1. P. 93–102. https://doi.org/10.1007/BF00182196

10. *Koshevoy G.* The Lorenz zonotope and multivariate majorizations // Soc Choice Welfare. 1997. Vol. 15. Iss. 1. P. 1–14. https://doi.org/10.1007/s003550050087

11. *Torgersen E.* Stochastic orders and comparison of experiments. In: Stochastic Orders and Decision Under Risk: IMS Lecture Notes — Monograph Series, 1991.

Статья поступила в редакцию 29 октября 2019 г.;
после доработки 12 декабря 2019 г.;
рекомендована в печать 12 декабря 2019 г.

Контактная информация:

Гутерман Александр Эмилевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; guterman@list.ru
Штейнер Павел Михайлович — аспирант; pashteiner@ya.ru

Linear operators preserving majorization of matrix tuples*

A. E. Guterman, P. M. Shteyner

Lomonosov Moscow State University, 1, Leninskiye Gory, Moscow, 119991, Russian Federation
Moscow Institute of Physics and Technology, 9, Institutskiy per., Dolgoprudny,
Moscow, 141701, Russian Federation
Moscow Center for Continuous Mathematical Education,
11, Bolshoy Vlasyevskiy per., Moscow, 119002, Russian Federation

For citation: Guterman A. E., Shteyner P. M. Linear operators preserving majorization of matrix tuples. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 2, pp. 217–229. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.204 (In Russian)

In this paper, we consider weak, directional and strong matrix majorizations. Namely, for square matrices A and B of the same size we say that A is weakly majorized by B, if there is a row stochastic matrix X such that $A = XB$. Further, A is strongly majorized by B, if there is a doubly stochastic matrix X such that $A = XB$. Finally, A is directionally majorized by B, if for any vector x the vector Ax is majorized by the vector Bx under the usual vector majorization. We introduce the notion of majorization for matrix tuples, which is defined as a natural generalization of matrix majorizations: for a chosen type of majorization we say that one matrix tuple is majorized by another matrix tuple of the same size if every matrix of the "smaller" tuple is majorized by the matrix in the same position in the "bigger" tuple. We say that linear operator preserves a majorization if it maps ordered pairs to ordered pairs and the image of the smaller element does not exceed the image of the bigger one. This paper contains a full characterization of linear operators that preserve weak, strong or directional majorization for matrix tuples, as well as linear operators that map matrix tuples ordered with respect to the strong majorization to matrix tuples ordered with respect to the directional majorization. We have shown that every such operator preserves respective majorization for each component. For each of these three types of majorizations we provide counterexamples demonstrating that the inverse statement does not hold, that is, if majorization of each component is preserved, majorization of matrix tuples may not be preserved.

Keywords: matrix majorization, vector majorization, linear preservers.

References

1. Marshall A. W., Olkin I., Arnold B. C., *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications* (Second Edition, Springer, New York, 2011).

2. Dahl G., Guterman A., Shteyner P., "Majorization for matrix classes", *Linear Algebra Appl.* **555**, 201–221 (2018). https://doi.org/10.1016/j.laa.2018.06.003

3. Dahl G., Guterman A., Shteyner P., "Majorization for (0, 1)-matrices", *Linear Algebra Appl.* **585**, 147–163 (2019). https://doi.org/10.1016/j.laa.2019.09.038

*The work is supported by Russian Science Foundation (grant N 16-11-10075).

4. Martínez Pería F. D., Massey P. G., Silvestre L. E., "Weak matrix majorization", *Linear Algebra Appl.* **403**, 343–368 (2005). https://doi.org/10.1016/j.laa.2005.02.003

5. Li C.-K., Poon E., "Linear operators preserving directional majorization", *Linear Algebra Appl.* **325**, 141–146 (2001). https://doi.org/10.1016/S0024-3795(00)00328-1

6. Koshevoy G., Mosler K. "Lift zonoids, random convex hulls and the variability of random vectors", *Bernoulli* **4**(3), 377–399 (1998).

7. Beasley L. B., Lee S.-G., "Linear operators preserving multivariate majorization", *Linear Algebra Appl.* **304**, 141–159 (2000). https://doi.org/10.1016/S0024-3795(99)00227-X

8. Hasani A. M., Radjabalipour M., "Linear preserver of matrix majorization", *International Journal of Pure and Applied Mathematics* **32**, issue 4, 475–482 (2006).

9. Koshevoy G., "Multivariate Lorenz majorization", *Soc. Choice Welfare* **12**, issue 1, 93–102 (1995). https://doi.org/10.1007/BF00182196

10. Koshevoy G., "The Lorenz zonotope and multivariate majorizations", *Soc. Choice Welfare* **15**, issue 1, 1–14 (1997). https://doi.org/10.1007/s003550050087

11. Torgersen E., *Stochastic orders and comparison of experiments* (Stochastic Orders and Decision Under Risk: IMS Lecture Notes — Monograph Series, 1991).

Received: October 29, 2019
Revised: December 12, 2019
Accepted: December 12, 2019

Authors' information:

Alexander E. Guterman — guterman@list.ru
Pavel M. Shteyner — pashteiner@ya.ru