Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 2
УДК 512.541+512.546
MSC 20K35, 22C09

Гомологические свойства факторно делимых абелевых групп и двойственных к ним компактных групп

Н. И. Крючков

Рязанский государственный университет,
Российская федерация, 390000, Рязань, ул. Свободы, 46

Для цитирования: *Крючков Н. И.* Гомологические свойства факторно делимых абелевых групп и двойственных к ним компактных групп // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 2. С. 236–244. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.206

Работа посвящена изучению гомологических свойств факторно делимых абелевых групп. Эти группы составляют важный класс групп, который интенсивно изучается в последние годы. В первой части работы изучаются условия равенства нулю групп расширений, в которых один из аргументов является факторно делимой группой. При некоторых дополнительных предположениях описываются группы гомоморфизмов из факторно делимых групп в редуцированные абелевы группы. Исследованы некоторые свойства универсальности факторно делимых абелевых групп. Вторая часть работы посвящена изучению гомологических свойств компактных абелевых групп, которые являются двойственными в смысле Л. С. Понтрягина факторно делимым группам. Такие группы называются факторно тороидальными. Изучены условия равенства нулю групп расширений, в которых один из аргументов является факторно тороидальной группой. Описываются некоторые группы непрерывных гомоморфизмов, в которых второй аргумент является факторно тороидальной группой. В последней части работы изучаются условия равенства нулю групп расширений факторно делимых групп с помощью компактных факторно тороидальных. Охарактеризована фундаментальная группа топологического пространства факторно тороидальной группы.

Ключевые слова: факторно делимая абелева группа, двойственная компактная группа, группа расширений, группа гомоморфизмов, гомотопическая группа.

1. Введение. В статье изучаются только абелевы группы, и в дальнейшем под словом «группа» понимается «абелева группа». Понятие факторно делимой группы было введено в классе групп без кручения Р. Бьюмонтом и Р. Пирсом [1], а в классе всех групп — У. Уиклессом и А. А. Фоминым [2]. Факторно делимые группы составляют достаточно широкий класс групп. Более того, существует двойственность между категориями факторно делимых групп и групп без кручения с квазигомоморфизмами в качестве морфизмов [2]. Позднее была построена двойственность между категорией факторно делимых групп с отмеченными свободными подгруппами и категорией групп без кручения с отмеченными свободными подгруппами [3, 4]. Смешанные факторно делимые группы изучались в последние годы многими авторами; заметный вклад в изучение факторно делимых групп внесли А. А. Фомин и его ученики. В работах [5] и [6] изложены фундаментальные результаты о факторно делимых группах, в них содержится также обширная библиография по этой проблематике. До последнего времени строение групп расширений и гомоморфизмов факторно делимых групп практически не исследовалось. Основная цель настоящей работы состоит в изучении групп расширений и групп гомоморфизмов факторно делимых групп и компактных групп, двойственных им в смысле Л. С. Понтрягина. В первой части исследуются группы расширений и гомоморфизмов, в которых один из аргументов является факторно делимой группой. Особое внимание уделяется исследованию условий равенства нулю групп расширений (любое такое утверждение дает достаточный признак расщепляемости групп). Во второй части аналогичные вопросы исследуются для факторно тороидальных групп (компактных групп, двойственных факторно делимым). Кроме этого, получены некоторые утверждения о строении нулевой и первой гомотопических групп компактных факторно тороидальных групп.

В работе используются аддитивная терминология и аддитивная форма записи. Основные обозначения являются стандартными и почерпнуты из [7]. P обозначает множество всех простых чисел: если p — простое число, то $T_p(A)$ обозначает p-примарную компоненту периодической части группы A (для периодической группы T ее p-примарная компонента обозначается просто T_p); $\pi(A) = \{p \in P | T_p(A) \neq 0\}$, $q(A) = \{p \in P | pA \neq A\}$. $\mathbf{Z}_p$ — аддитивная группа целых p-адических чисел. Если A — дискретная группа, то $\mathrm{Char}(A)$ обозначает группу гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(A, \prod_{p \in P} Z(p^\infty))$. $r_0(A)$ — ранг (без кручения) группы A (максимальное число линейно независимых над кольцом целых чисел элементов группы A). Все топологические группы предполагаются отделимыми (хаусдорфовыми), произведения топологических групп наделены тихоновской топологией, $\mathrm{Hom}^c(A, B)$ — группа непрерывных гомоморфизмов из топологической группы A в топологическую группу B. Функтор Ext в категории локально компактных групп понимается в смысле [8] (для обозначения групп расширений в категориях дискретных и компактных групп используется один тот же символ, так как из контекста ясно, о какой категории идет речь). Всюду в дальнейшем, упоминая двойственность, мы имеем в виду классическую двойственность между категорией дискретных групп и категорией компактных абелевых групп, построенную Л. С. Понтрягиным [9, глава 6]. Если L — локально компактная группа, то символ L^* обозначает двойственную к L в смысле Л. С. Потрягина. $\mathbf{T}$ — мультипликативная группа комплексных чисел, модуль которых равен 1, с естественной топологией; $\mathbf{S}$ — группа, двойственная аддитивной группе рациональных чисел (соленоид).

2. Факторно делимые группы.

Определение 1 [5]. Группа A_{qd} называется *факторно делимой*, если она содержит свободную подгруппу конечного ранга F такую, что факторгруппа A_{qd}/F является периодической делимой группой. При этом группа A_{qd} не содержит подгрупп, являющихся периодическими делимыми группами, другими словами, периодическая часть группы A_{qd} является редуцированной.

Напомним, что факторно делимая группа A_{qd} имеет тот же ранг, что и свободная подгруппа F, а p-примарные компоненты факторгруппы A_{qd}/F являются конечными прямыми суммами квазициклических групп (здесь F — свободная подгруппа, упомянутая в определении 1); p-примарные компоненты группы A_{qd} являются конечными группами [5].

Теорема 2. *Пусть A_{qd} — факторно делимая группа, F — ее свободная подгруппа конечного ранга такая, что факторгруппа $A_{qd}/F = T$, где T является периодической делимой группой, а X — произвольная редуцированная группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если $\pi(T) \cap q(X) = \varnothing$, то $\mathrm{Ext}(A_{qd}, X) = 0$;

2) если $\pi(T) \cap q(X) = \varnothing$, то $\mathrm{Hom}(A_{qd}, X) \cong \bigoplus\limits_{r_0(A_{qd})} X$;

3) если X — группа без кручения конечного ранга, то группа $\mathrm{Ext}(A_{qd}, X)$ изоморфна факторгруппе прямого произведения аддитивных групп целых p-адических чисел.

Доказательство. 1) Пусть $\pi(T) \cap q(X) = \varnothing$. Согласно условию, имеет место точная последовательность $0 \to F \to A_{qd} \to T \to 0$, которая дает точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(T, X) \to \mathrm{Hom}(A_{qd}, X) \to \mathrm{Hom}(F, X) \to \mathrm{Ext}(T, X) \to \mathrm{Ext}(A_{qd}, X) \to 0, \quad (1)$$

так как F — свободная группа, поэтому $\mathrm{Ext}(F, X) = 0$, а если X — редуцированная группа, то $\mathrm{Hom}(T, X) = 0$. Кроме того, учтем, что $\mathrm{Hom}(F, X) \cong \bigoplus\limits_{r_0(A_{qd})} X$, а тогда из (1) получим точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(A_{qd}, X) \to \bigoplus_{r_0(A_{qd})} X \to \mathrm{Ext}(T, X) \to \mathrm{Ext}(A_{qd}, X) \to 0. \quad (2)$$

Так как $\pi(T) \cap q(X) = \varnothing$, то согласно [10, теорема 2] получаем, что $\mathrm{Ext}(T, X) = 0$, и из точности (2) следует, что $\mathrm{Ext}(A_{qd}, X) = 0$.

2) Если $\pi(T) \cap q(X) = \varnothing$, то, как отмечено выше, $\mathrm{Ext}(T, X) = 0$, и тогда из точности (2) заключаем, что $\mathrm{Hom}(A_{qd}, X) \cong \bigoplus\limits_{r_0(A_{qd})} X$.

3) Так как X — группа без кручения, то согласно теореме Эйленберга—Маклейна имеет место изоморфизм $\mathrm{Ext}(T, X) \cong \mathrm{Hom}(T, D(X)/X)$, где $D(X)$ — делимая оболочка группы X (см., например, [7, глава 12, теорема 3.5]). Так как X имеет конечный ранг, то факторгруппа $D(X)/X$ будет иметь конечные p-ранги. Поэтому, используя простейшие свойства функтора Hom [7, глава 7], хорошо известный изоморфизм $\mathrm{Hom}(Z(p^\infty), Z(p^\infty)) \cong \mathbf{Z}_p$, из точной последовательности (2) получим нужное утверждение. □

Замечание 1. Утверждения 1 и 2 теоремы 2 справедливы для более широкого класса групп нежели факторно делимые. В их доказательствах не используется конечность ранга свободной подгруппы, то есть эти утверждения верны для любой группы, содержащей свободную подгруппу, факторгруппа по которой является делимой периодической.

Теорема 3. *Пусть A_{qd} — факторно делимая группа, содержащая свободную подгруппу F такую, что $A_{qd}/F = T$, где T — периодическая делимая группа, и X — периодическая группа. Тогда если $\pi(T) \cap \pi(X) = \varnothing$, то $\mathrm{Ext}(X, A_{qd}) \cong \bigoplus\limits_{r_0(A_{qd})} \mathrm{Char}(X)$.*

Доказательство. Согласно условию, имеет место точная последовательность

$$0 \to F \to A_{qd} \to T \to 0, \quad (3)$$

которая дает точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(X, F) \to \mathrm{Hom}(X, A_{qd}) \to \mathrm{Hom}(X, T) \to \mathrm{Ext}(X, F) \to \mathrm{Ext}(X, A_{qd}) \to \\ \to \mathrm{Ext}(X, T) \to 0. \quad (4)$$

Если теперь $\pi(T) \cap \pi(X) = \varnothing$, то, используя свойства функтора Hom [7, глава 7], упомянутую выше теорему Куликова [10, теорема 2], получим, что $\mathrm{Hom}(X, T) = 0$ и $\mathrm{Ext}(X, T) = 0$. Тогда из точности (4) следует, что $\mathrm{Ext}(X, A_{qd}) \cong \mathrm{Ext}(X, F)$. Далее, так как Ext перестановочен с конечными суммами по второму аргументу и свободный ранг группы A_{qd} является конечным, то $\mathrm{Ext}(X, F) \cong \mathrm{Ext}(X, \bigoplus\limits_{r_0(A_{qd})} Z) \cong \bigoplus\limits_{r_0(A_{qd})} \mathrm{Ext}(X, Z)$, а $\mathrm{Ext}(X, Z) \cong \mathrm{Char}(X)$ [7, глава 9, следствие 3.6]. □

Напомним определение группы Уайтхеда, фигурирующее в формулировке следующей теоремы. Группа A называется *группой Уайтхеда*, если она удовлетворяет равенству $\mathrm{Ext}(A, Z) = 0$. Комментарии, связанные со строением группы Уайтхеда, и ее связи со свойствами топологических групп будут даны ниже.

Предложение 4. *Справедливы следующие утверждения:*

1) группа A обладает свойством $\mathrm{Ext}(A, A_{qd}) = 0$ для любой факторно делимой группы A_{qd} тогда и только тогда, когда A является группой Уайтхеда;

2) группа A обладает свойством $\mathrm{Ext}(A_{qd}, A) = 0$ для любой факторно делимой группы A_{qd} тогда и только тогда, когда A является делимой группой.

Доказательство. 1) Пусть группа A обладает свойством $\mathrm{Ext}(A, A_{qd}) = 0$ для любой факторно делимой группы A_{qd}. Так как группа Z является факторно делимой, то должно выполняться $\mathrm{Ext}(A, Z) = 0$, поэтому A является группой Уайтхеда. Обратно, пусть A — группа Уайтхеда и F — свободная подгруппа конечного ранга группы A_{qd} такая, что A_{qd}/F является делимой и периодической. Тогда точная последовательность $0 \to F \to A_{qd} \to A_{qd}/F \to 0$ дает точную последовательность

$$\mathrm{Ext}(A, F) \to \mathrm{Ext}(A, A_{qd}) \to \mathrm{Ext}(A, A_{qd}/F) = 0,$$

так как A_{qd}/F является делимой группой. Из того, что F — свободная группа конечного ранга, следует, что $\mathrm{Ext}(A, F) \cong \bigoplus\limits_{n} \mathrm{Ext}(A, Z) = 0$, так как A — группа Уайтхеда. Из этих утверждений вытекает, что $\mathrm{Ext}(A, A_{qd}) = 0$.

2) Ясно, что если A — делимая группа, то верно равенство $\mathrm{Ext}(A_{qd}, A) = 0$. Обратно, пусть $\mathrm{Ext}(A_{qd}, A) = 0$ верно для любой факторно делимой группы A_{qd}. Группа Q является факторно делимой, поэтому для A должно выполняться равенство $\mathrm{Ext}(Q, A) = 0$, откуда будет следовать, что A — копериодическая группа. Если D — делимая часть A, то $A \cong D \oplus C$, где группа C является редуцированной копериодической и для нее выполняется $\mathrm{Ext}(A_{qd}, C) = 0$. Докажем, что $C = 0$. Действительно, для любого простого p группа $Z(p) \oplus Q$ — факторно делимая, поэтому получим цепочку изморфизмов $0 = \mathrm{Ext}(Z(p) \oplus Q, C) \cong \mathrm{Ext}(Z(p), C) \cong C/pC$. Так как должно выполняться равенство $C/pC = 0$, то получаем, что для любого простого числа p верно равенство $C = pC$, то есть группа C должна быть делимой и значит она нулевая. □

3. Факторно тороидальные группы.

Определение 5 [11]. Компактная группа K называется *факторно тороидальной*, если она содержит вполне несвязную подгруппу, являющуюся группой без кручения F такую, что $K/F \cong \mathbf{T}^n$, $n \in \mathbf{N}$, и группа K не содержит прямых слагаемых, являющихся вполне несвязными группами без кручения.

В [11, теорема 2] доказано, что компактная группа K является факторно тороидальной тогда и только тогда, когда двойственная группа K^* является факторно делимой.

Несколько следующих утверждений являются «переводами» на двойственный язык теории компактных групп теорем 2, 3 и предложения 4, поэтому мы ограничимся краткими комментариями к их доказательствам. Напомним, что $\mathrm{Ext}(K_1, K_2) \cong \mathrm{Ext}(K_2^*, K_1^*)$ и $\mathrm{Hom^c}(K_1, K_2) \cong \mathrm{Hom}(K_2^*, K_1^*)$ для любых компактных групп K_1 и K_2. Эти утверждения будут основными инструментами в доказательствах. Компактную группу будем называть *коредуцированной*, если двойственная к ней группа является редуцированной.

Теорема 6. *Пусть K_{qt} — факторно тороидальная группа, которая содержит вполне несвязную подгруппу без кручения E такую, что $K_{qt}/E \cong \mathbf{T}^n$ и X — любая коредуцированная компактная группа. Справедливы следующие утверждения:*

1) если $\pi(X) \cap q(E) = \varnothing$, то $\mathrm{Ext}(X, K_{qt}) = 0$;

2) если $\pi(X) \cap q(E) = \varnothing$, то $\mathrm{Hom^c}(X, K_{qt}) \cong \bigoplus\limits_{\dim(K_{qt})} X^*$;

3) если X имеет конечную размерность, то группа $\mathrm{Ext}(X, K_{qt})$ изоморфна факторгруппе конечного прямого произведения аддитивных групп целых p-адических чисел.

Доказательство. 1) $\mathrm{Ext}(X, K_{qt}) \cong \mathrm{Ext}((K_{qt})^*, X^*)$, X^* — редуцированная дискретная группа, $(K_{qt})^*$ — факторно делимая группа. По условию существует короткая точная последовательность $0 \to E \to K_{qt} \to \mathbf{T}^n \to 0$, поэтому по двойственности получится точная последовательность $0 \to \oplus_n Z \to (K_{qt})^* \to E^* \to 0$. Значит, $(K_{qt})^*$ — расширение свободной группы конечного ранга при помощи делимой периодической группы. Учтем, что $q(X^*) = \pi(X)$ и $\pi(E^*) = q(E)$, и применим теорему 2, п. 1.

2) Утверждение следует из того, что $\mathrm{Hom}^c(X, K_{qt}) \cong \mathrm{Hom}((K_{qt})^*, X^*)$, X — группа без кручения конечного ранга, $\dim(K_{qt}) = r_0((K_{qt})^*)$ и п. 2 теоремы 2.

3) Непосредственное следствие п. 3 теоремы 2. ☐

Теорема 7. *Пусть K_{qt} — факторно тороидальная группа, содержащая вполне несвязную подгруппу без кручения F такую, что $K_{qt}/F \cong \mathbf{T}^n$ и X является вполне несвязной компактной группой. Тогда если $q(F) \cap q(X) = \varnothing$, то $\mathrm{Ext}(K_{qt}, X) \cong \bigoplus\limits_{\dim(K_{qt})} \mathrm{Char}(X^*)$.*

Доказательство. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству предыдущей теоремы со ссылкой на теорему 3. ☐

Теорема 8. *Следующие условия для компактной группы K эквивалентны:*

1) K обладает свойством $\mathrm{Ext}(L_{qt}, K) = 0$ для любой факторно тороидальной группы L_{qt};

2) K является группой, двойственной группе Уайтхеда;

3) K является линейно связной.

Доказательство. 1) $\Leftrightarrow$ 2). Согласно теории двойственности $\mathrm{Ext}(L_{qt}, K) = \mathrm{Ext}(K^*, L_{qt}^*)$, поэтому $\mathrm{Ext}(L_{qt}, K) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ext}(K^*, L_{qt}^*) = 0$, а это эквивалентно тому, что K^* является группой Уайтхеда.

2) $\Leftrightarrow$ 3). Известно [12, теорема 8.30], что компактная группа является линейно связной тогда и только тогда, когда ее дуальная группа является группой Уайтхеда. $\square$

Замечание 2. Строение группы Уайтхеда зависит от теоретико-множественных аксиом [7, глава 8]. Если принять аксиому конструктивности Гёделя, то группа Уайтхеда свободна. Таким образом, если $V = L$, то компактная группа линейно связна тогда и только тогда, когда она изоморфна тору. В системе аксиом Цермело — Френкеля, с аксиомой выбора, отрицанием континуум-гипотезы и аксиомой Мартина существуют несвободные группы Уайтхеда, причем найдется группа, мощность которой не превосходит $\aleph_1$. Поэтому в этой ситуации существуют линейно связные компактные группы, не изоморфные тору, причем найдется группа, вес которой не превосходит $\aleph_1$ [13].

Теорема 9. *Справедливы следующие утверждения.*

1) Если K_{qt} — произвольная (компактная) факторно тороидальная группа, и T — любая дискретная периодическая группа, то группа $\mathrm{Ext}(K_{qt}, T)$ является периодической. Более того, любая ее p-примарная компонента изоморфна конечной прямой сумме групп T_p и групп вида T_p/p^sT_p, где s — некоторое натуральное число. Равенство $\mathrm{Ext}(K_{qt}, T) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $\pi(K_{qt}) \cap \pi(T) = \varnothing$.

2) Если A_{qt} — произвольная факторно делимая группа, и F — любая вполне несвязная компактная группа, то группа $\mathrm{Ext}(F, A_{qt})$ является периодической. Более того, каждая ее p-примарная компонента изоморфна прямой сумме групп F_p^* и групп вида $F_p^*/p^sF_p^*$, где s — некоторое натуральное число. Равенство $\mathrm{Ext}(F, A_{qt}) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $q(A_{qt}) \cap q(F) = \varnothing$.

Доказательство. 1) Известно [14], что если K — произвольная компактная, а A — любая дискретная группы, то $\mathrm{Ext}(K, A) \cong K^* \otimes A$, а значит, $\mathrm{Ext}(K_{qt}, T) \cong (K_{qt})^* \otimes T$. Пусть $T \cong \oplus_p T_p$ — разложение группы T в прямую сумму ее p-примарных компонент. Тогда $(K_{qt})^* \otimes T \cong \oplus_p((K_{qt})^* \otimes T_p)$. Известно [7], что группа $(K_{qt})^* \otimes T_p$ изоморфна группе $B \otimes T_p$, где B — p-базисная подгруппа группы $(K_{qt})^*$. B является прямой суммой бесконечных циклических групп и p-примарных групп, а так как $Z \otimes T_p \cong T_p$ и $Z(p^s) \otimes T_p \cong T_p/p^sT_p$, то первое утверждение справедливо. Далее, из доказанного выше следует, что группа $\mathrm{Ext}(K_{qt}, T)$ будет нулевой тогда и только тогда, когда все ее p-примарные компоненты будут нулевыми. Сохраняя введенные выше обозначения, получаем, что это эквивалентно следующему: если $T_p \neq 0$, то $B = 0$, а последнее эквивалентно тому, что группа $(K_{qt})^*$ является p-делимой. Окончательно, $\mathrm{Ext}(K_{qt}, T) = 0$ тогда и только тогда, когда $q((K_{qt})^*) \cap \pi(T) = \varnothing$, но $q((K_{qt})^*) = \pi(K_{qt})$, поэтому $\mathrm{Ext}(K_{qt}, T) = 0$ тогда и только тогда, когда $\pi(K_{qt}) \cap \pi(T) = \varnothing$.

2) Так как $\mathrm{Ext}(F, A_{qt}) \cong \mathrm{Ext}((A_{qt})^*, F^*)$, то это утверждение следует из утверждения 1. $\square$

Хорошо известно, что любая локально компактная группа L может быть представлена в виде $L \cong \mathbf{R}^n \oplus M$, где M содержит компактную открытую подгруппу, то есть является расширением компактной группы при помощи дискретной. Поэтому важной и интересной задачей является описание групп расширений компактных групп при помощи дискретных, которые описаны в [15, теорема 2.1]. В следующем предложении рассматривается частный случай этого утверждения, обсуждается строение группы расширений факторно тороидальной группы с помощью факторно делимой.

Предложение 10. *Если K_{qt} — произвольная компактная факторно тороидальная группа и A_{qd} — любая факторно делимая группа, то группа* $\mathrm{Ext}(A_{qd}, K_{qt})$ *является прямым произведением не более чем счетного семейства конечных примарных групп. Более того, если $|\pi(A_{qd}) \cap q(K_{qt})| < \aleph_0$, то группа* $\mathrm{Ext}(A_{qd}, K_{qt})$ *является конечной.*

Доказательство. В [15, теорема 2.1] доказано, что $\mathrm{Ext}(A_{qd}, K_{qt})$ изоморфна прямому произведению по простым числам p, принадлежащим множеству $\pi(A_{qd}) \cap q(K_{qt})$ групп вида $\mathrm{Ext}(T_p(A_{qd}), T_p((K_{qt}/(K_{qt})_0)^*)$ (здесь $K_{qt}/(K_{qt})_0$ — факторгруппа группы K_{qt} по компоненте связности нуля). p-примарные компоненты факторно делимой группы являются конечными группами [5], то есть группа $T_p(A_{qd})$ — прямая сумма конечного числа p-примарных групп. Группа $(K_{qt}/(K_{qt})_0)^*$ дуальна периодической части факторно делимой группы и поэтому также является прямой суммой конечного числа p-примарных групп. Значит, каждая группа $\mathrm{Ext}(T_p(A_{qd}), T_p((K_{qt}/(K_{qt})_0)^*)$ является прямой суммой p-примарных групп или нулевой. $\square$

Предложение 11. *Если K_{qt} — факторно тороидальная группа размерности n, то фундаментальная группа топологического пространства группы K_{qt} является нулевой или свободной группой ранга, не превосходящего n. Более того, для любого натурального n и любого натурального $1 \le k \le n$ найдется факторно тороидальная группа размерности n, фундаментальная группа которой является нулевой или свободной группой ранга k.*

Доказательство. Известно [12, теорема 8.62], что для компактной группы K справедливо $\pi_1(K) \cong \mathrm{Hom}(K^*, Z)$. Значит, в условиях этой теоремы $\pi_1(K_{qt}) \cong \mathrm{Hom}((K_{qt})^*, Z)$, а $(K_{qt})^*$ — факторно делимая группа ранга n. Если F — свободная подгруппа ранга n группы $(K_{qt})^*$ такая, что факторгруппа $(K_{qt})^*/F$ делимая периодическая, то точная последовательность $0 \to F \to (K_{qt})^* \to (K_{qt})^*/F \to 0$ дает точную последовательность $0 \to \mathrm{Hom}((K_{qt})^*/F, Z) \to \mathrm{Hom}((K_{qt})^*, Z) \to \mathrm{Hom}(F, Z)$. Группа $\mathrm{Hom}((K_{qt})^*/F, Z)$ нулевая и имеется изоморфизм $\mathrm{Hom}(F, Z) \cong \oplus_n Z$. Поэтому группа $\mathrm{Hom}((K_{qt})^*, Z)$ изоморфна подгруппе свободной группы ранга n, а значит она является нулевой или свободной группой ранга не больше n.

Легко видеть, что группа $\mathbf{S}^n$ — факторно тороидальная размерности n, ее фундаментальная группа нулевая. Группа $\mathbf{S}^{n-k} \oplus \mathbf{T}^k$, где $1 \le k \le n$, — факторно тороидальная размерности n и ее фундаментальная группа является свободной группой ранга k. $\square$

Автор благодарит рецензентов за внимательное изучение его работы; их конструктивные замечания, безусловно, способствовали ее улучшению.

Литература

1. *Beaumont R., Pierce R.* Torsion-free rings // Illinois J. Math. 1961. Vol. 5, no 1. P. 61–98.

2. *Fomin A. A., Wickless W.* Quotient divisible Abelian groups // Proc. Am. Math. Soc. 1998. Vol. 126, no 1. P. 45–52.

3. *Fomin A. A.* Invariants for Abelian groups and dual exact sequences // J. Algebra. 2009. Vol. 322, no 7. P. 2544–2565.

4. *Яковлев А. В.* Двойственность категорий абелевых групп без кручения конечного ранга и факторно делимых групп // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2010. Т. 375. С. 195–202.

5. *Фомин А. А.* К теории факторно делимых групп. I // Фундаментальная и прикладная математика. 2011/2012. Т. 17. Вып. 8. С. 153–167.

6. *Фомин А. А.* К теории факторно делимых групп. II // Фундаментальная и прикладная математика. 2015. Т. 20. Вып. 5. С. 157–196.

7. *Fuchs L.* Abelian groups. New York: Springer, 2015.

8. *Fulp R. O., Griffith Ph. A.* Extensions of locally compact abelian groups. I, II // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 154. P. 341–363.

9. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. М.: Наука, 1973.

10. *Куликов Л. Я.* Условия, при которых группа абелевых расширений является нулевой. В кн.: Л. Я. Куликов: абелевы группы: избр. труды: сб. работ Л. Я. Куликова / Под ред. Е. А. Тимошенко. М.: ООО «Буки Веди», 2013. С. 382–402.

11. *Крючков Н. И.* Компактные группы, двойственные факторно делимым абелевым группам // Фундаментальная и прикладная математика. 2015. Т. 20. Вып. 5. С. 113–119.

12. *Hofmann K. H., Morris S. A.* The structure of compact groups. A primer for the student — A handbook for the expert. Berlin: de Gruyter, 2006.

13. *Shelah S.* Infinite abelian groups, Whitehead problem and some constructions // Isr. J. Math. 1974. Vol. 18. Iss. 3. P. 243–256.

14. *Крючков Н. И.* Группы расширений локально компактных абелевых групп. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: Моск. гос. пед. ин-т, 1980.

15. *Крючков Н. И.* К теории абелевых расширений локально компактных абелевых групп // Матем. сб. Т. 113(155). Вып. 4(12). С. 617–631.

Статья поступила в редакцию 17 ноября 2019 г.;
после доработки 12 декабря 2019 г.;
рекомендована в печать 12 декабря 2019 г.

Контактная информация:

Крючков Николай Иванович — канд. физ.-мат. наук, доц.; kryuchkov.n@gmail.com

Homological properties of quotient divisible Abelian groups and compact groups dual to them

N. I. Kryuchkov

Ryazan State University, 46, ul. Svobody, Ryazan, 390000, Russian Federation

For citation: Kryuchkov N. I. Homological properties of quotient divisible Abelian groups and compact groups dual to them. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 2, pp. 236–244.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.206 (In Russian)

The paper is devoted to the study of homological properties of quotient divisible Abelian groups. These groups constitute an important class of groups that has been intensively studied in recent years. In the first part of the paper, we study the conditions for the vanishing of extension groups in which one of the arguments is a quotient divisible group. Under some additional assumptions, groups of homomorphisms from quotient divisible groups to reduced abelian groups are described. Some properties of the universality of quotient divisible Abelian groups are investigated. The second part of the work is devoted to the study of the homological properties of compact Abelian groups, which are dual in the sense of L. S. Pontryagin to quotient divisible groups. Such groups are called quotient toroidal. We study the conditions for the vanishing of extension groups in which one of the arguments is a quotient toroidal group. Some groups of continuous homomorphisms in which the second argument is a quotient toroidal group are described. In the last part of the paper, we study the conditions for the vanishing of extension groups of quotient divisible groups with the help of compact quotient toroidal ones. The fundamental group of the topological space of the quotient toroidal group is characterized.

Keywords: quotient divisible abelian group, dual compact group, group of extensions, homotopic group, group of homomorphisms.

References

1. Beaumont R., Pierce R., "Torsion-free rings", *Illinois J. Math.* **5**, 61–98 (1961).

2. Fomin A. A., Wickless W., "Quotient divisible Abelian groups", *Proc. Amer. Math. Soc.* **126**, 45–52 (1998).

3. Fomin A. A., "Invariants for Abelian groups and dual exact sequences", *J. Algebra* **322**, 2544–2565 (2009).

4. Yakovlev A. V., "Duality of the categories of torsion free abelian groups of finite rank and quotient divisible groups", *J. Math. Sci. (N. Y.)* **171**, 416–420 (2010).

5. Fomin A. A., "To quotient divisible group theory. I", *J. Math. Sci.* **197**, 688–697 (2014).

6. Fomin A. A., "To quotient divisible group theory. II", *J. Math. Sci.* **230**, 457–483 (2018).

7. Fuchs L., *Abelian groups* (Springer, New York, 2015).

8. Fulp R. O., Griffith Ph. A., "Extensions of locally compact abelian groups. I, II", *Trans. Amer. Math. Soc.* **154**, 341–363 (1971).

9. Pontryagin L. S., *Continuous groups* (Moscow, 1973). (In Russian)

10. Kulikov L. Ya., "Conditions under which the group of abelian extensions is zero", in Kulikov L. Ya. *Abelian groups, coll. works* (Moscow, 382–402, 2013). (In Russian)

11. Kryuchkov N. I., "Compact groups that are duals of quotient divisible Abelian groups", *J. Math. Sci.* **230**, 428–432 (2018).

12. Hofmann K. H., Morris S. A., *The structure of compact groups. A primer for the student — A handbook for the expert* (de Gruyter, Berlin, 2006).

13. Shelah S., "Infinite Abelian groups, Whitehead problem and some constructions", *Isr. J. Math.* **18**, 243–256 (1974).

14. Kryuchkov N. I., *Groups of extensions of locally compact Abelian groups* (Ph. D. theses, Moscow, 1980). (In Russian)

15. Kryuchkov N. I., "On the Abelian extensions of locally compact Abelian groups", *Math. USSR-Sb.* **41**, 511–522 (1982).

Received: November 17, 2019
Revised: December 12, 2019
Accepted: December 12, 2019

Author's information:

Nikolay I. Kryuchkov — kryuchkov.n@gmail.com