УДК 512.625
MSC 11S31

Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 2

*Посвящается Александру Ивановичу Генералову,
замечательному ученому, выдающемуся педагогу
и уникальному человеку*

Функциональная лемма Хазевинкеля и классификация формальных групп

А. И. Мадунц

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Мадунц А. И.* Функциональная лемма Хазевинкеля и классификация формальных групп // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 2. С. 245–253.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.207

Основная область применения формальных групп — алгебраическая геометрия и теория полей классов. В последней используются как классический символ Гильберта (символ норменного вычета), так и его обобщения. Одна из важнейших задач — нахождение явных формул для различных модификаций данного символа, связанных с формальными группами. Заметим, что имеется два подхода к построению формальных групп (то есть степенных рядов, удовлетворяющих определенным условиям). Доказанная Хазевинкелем функциональная лемма позволяет составлять формальные группы с коэффициентами из кольца нулевой характеристики при помощи функциональных уравнений, использующих некий идеал этого кольца, надполе кольца и кольцевой гомоморфизм с заданными свойствами (например, тождественный, а для локального поля может быть выбран гомоморфизм Фробениуса). Есть удобный критерий изоморфности построенных по формуле Хазевинкеля формальных групп, а также формула для логарифмов (в частности, логарифма Артина — Хассе). В то же время у Любина с Тейтом формальные группы над локальными полями строятся при помощи изогении, а Хонда для построения формальных групп над кольцом целых дискретно нормированного поля характеристики ноль вводит некое некоммутативное кольцо, индуцированное исходным кольцом и фиксированным гомоморфизмом. В представленной работе устанавливается связь между классической классификацией формальных групп (стандартных, обобщенных и относительных формальных групп Любина — Тейта и формальных групп Хонды) и их классификацией при помощи функциональной леммы Хазевинкеля. Для каждого типа составляются соответствующие функциональные уравнения и изучаются логарифмы, а также ряды, использующиеся при построении явной формулы символа Гильберта.

Ключевые слова: локальные поля, формальные группы, символ Гильберта, классификация Хазевинкеля.

1. Функциональная лемма Хазевинкеля. Пусть K — поле нулевой характеристики, A — некоторое его подкольцо с единицей, q — степень простого p, необратимого в A, а $\mathfrak{B}$ — идеал A, содержащий p, причем на K задан гомоморфизм σ со свойствами:

$$a^\sigma \in A, \quad a^\sigma \equiv a^q \mod \mathfrak{B} \quad \text{для всех} \quad a \in A.$$

Как обычно, $R[[X_1,\ldots,X_m]]$ — множество степенных рядов с коэффициентами из некоторого R, а $R[[X_1,\ldots,X_m]]^o$ — множество соответствующих рядов без свободного члена.

На кольце $K[[X]]$ введем гомоморфизм Δ, действующий следующим образом: для ряда $h(X)\in K[[X]]$ под $\Delta h(X)$ будем подразумевать $h^\sigma(X^q)$, то есть

$$\Delta\left(\sum_{n\geq 0} c_n X^n\right)=\sum_{n\geq 0} c_n^\sigma X^{qn}.$$

Назовем Δ индуцированным гомоморфизмом рядов.

Фиксируем $s_i\in K (i\in\mathbb{N})$, для которых $s_i\mathfrak{B}\subset A$. Легко видеть, что для любого $g(X)=\sum_{n\geq 1} b_n X^n\in A[[X]]^o$ существует единственный ряд $\lambda_g(X)=\sum_{n\geq 1} c_n X^n\in K[[X]]^o$, удовлетворяющий функциональному уравнению

$$\lambda_g(X)=g(X)+\sum_{i\geq 1} s_i\Delta^i\lambda_g(X).$$

Таким образом, уравнение можно записать как

$$\left(\mathrm{id}-\sum_{i\geq 1} s_i\Delta^i\right)(\lambda_g(X))=g(X),$$

а его решение есть $\lambda_g(X)=(\mathrm{id}-\sum_{i\geq 1} s_i\Delta^i)^{-1}(g(X))$.

Будем говорить, что функциональные уравнения принадлежат к одному типу, если у них совпадает набор s_i.

Непосредственным вычислением проверяется, что при заданных s_i коэффициенты ряда $\lambda_g(X)$ считаются по формулам $c_n=b_n$ при $q\nmid n$ и

$$c_{q^r m}=b_{q^r m}+s_1 c^\sigma_{q^{r-1}m}+\cdots+s_r c_m^{\sigma^r},\quad q\nmid m.$$

В работе Хазевинкеля [1] доказывается следующее утверждение, называемое функциональной леммой.

Функциональная лемма. *Пусть $s_i\in K, i\in\mathbb{N}, s_i\mathfrak{B}\subset A, g(X)=\sum_{n\geq 1} b_n X^n\in A[[X]]^o$, причем b_1 обратим в A. Тогда верны следующие утверждения.*

(1) Ряд

$$F(X,Y)=\lambda_g^{-1}(\lambda_g(X)+\lambda_g(Y))\in A[[X,Y]].$$

(2) Для любого $h(X)\in A[[X]]^o$ имеем $\lambda_g^{-1}(\lambda_h(X))\in A[[X]]^o$.

(3) Для любого $l(X)\in A[[X]]^o$ существует единственный ряд $h(X)\in A[[X]]^o$ такой, что $\lambda_g(l(X))=\lambda_h(X)$.

(4) Для любых $\alpha(X)\in A[[X]], \beta(X)\in K[[X]]$ имеем

$$\alpha(X)\equiv\beta(X) \bmod \mathfrak{B}^r A[[X]]\Leftrightarrow \lambda(\alpha(X))\equiv\lambda(\beta(X)) \bmod \mathfrak{B}^r A[[X]] (r\in\mathbb{N}).$$

(5) Пусть $g(X)\equiv X \bmod \deg 2$. Тогда $F_g(X)$ — формальная группа над кольцом A, а $\lambda_g(X)$ — ее логарифм.

Если, кроме того, задано $h(X)\in A[[X]]^o, h(X)\equiv X \bmod \deg 2$ и λ_h получено с помощью некоторого функционального уравнения, то формальные группы $F_g(X,Y)$

и $F_h(X,Y)$ изоморфны тогда и только тогда, когда соответствующие функциональные уравнения принадлежат к одному типу, причем изоморфизм в этом случае будет строгим.

Заметим, что в каждом классе изоморфных формальных групп можно выбрать так называемый представитель Артина — Хассе с $g(X) = X$. Его логарифм, полученный по формуле $\lambda_a(X) = (\mathrm{id} - \sum_{i\geq 1} s_i\Delta^i)^{-1}(X)$, имеет вид

$$\lambda_a(X) = X + \sum_{n\geq 1} c_n X^{q^n},$$

где $c_1 = s_1, c_n = s_1 c_{n-1}^{\sigma} + \dots + s_{n-1} c_1^{\sigma^{n-1}} + s_n, n \geq 2$.

Для произвольного $g(X)$ тогда получаем $\lambda_g(X) = \lambda_a(g(X))$.

Естественный пример применения функциональной леммы: $K = \mathbb{Q}, A = \mathbb{Z}, \sigma = \mathrm{id}, q = p^f, \mathfrak{B} = p\mathbb{Z}$, где p — некоторое простое число.

Введем обозначения

$$s_i = \frac{a_i}{p}, \quad a_i \in \mathbb{Z}, \quad g(X) = \sum_{n\geq 1} b_n X^n, \quad b_n \in \mathbb{Z}, \quad b_1 = 1.$$

В этом случае функциональное уравнение для

$$\lambda_g(X) = \sum_{n\geq 1} c_n X^n \in \mathbb{Q}[[X]]^o$$

записывается в виде

$$\lambda_g(X) = g(X) + \frac{1}{p}\sum_{i\geq 1} a_i \lambda_g(X^{q^i}),$$

причем $c_n = b_n$ при $q \nmid n$ и

$$c_{q^r m} = b_{q^r m} + \frac{1}{p}(s_1 c_{q^{r-1}m}^{\sigma} + \dots + s_r c_m^{\sigma^r}), \quad q \nmid m.$$

Логарифмы всех изоморфных между собой формальных групп, и только таких, удовлетворяют общему условию

$$p\lambda(X) \equiv \sum_{i\geq 1} a_i \lambda(X^{q^i}) \mod p\mathbb{Z}.$$

Логарифм Артина — Хассе $\lambda_a(X) = X + \sum_{n\geq 1} c_n X^{q^n}$ имеет коэффициенты

$$c_1 = \frac{a_1}{p}, \quad c_n = a_1\frac{c_{n-1}}{p} + \dots + a_{n-1}\frac{c_1}{p} + a_n\frac{1}{p}, \quad n \geq 2.$$

2. Функциональные уравнения для обобщенных формальных групп Любина — Тейта. Пусть теперь K — числовое локальное поле (конечное расширение поля $\mathbb{Q}_p$), $\mathcal{O}_K$ — его кольцо целых, v_K — нормирование, π — произвольный униформизирующий элемент, $\wp$ — максимальный идеал.

Под $\overline{K}$ будем подразумевать поле вычетов K (конечное поле характеристики p с числом элементов $q = p^{f_0}$).

Для любого натурального числа m введем множество

$$\mathcal{F}_\pi = \{f(X) \in \mathcal{O}_K[[X]] : f(X) \equiv \pi X \bmod \deg 2, f(X) \equiv X^{q^m} \bmod \pi\}.$$

Тогда (см. [2, 3]) для любого $f(X) \in \mathcal{F}_\pi$ существует единственная формальная группа $F_f(X,Y)$ над $\mathcal{O}_K$, для которой $f(X)$ является эндоморфизмом. Формальную группу F_f, полученную таким образом, называют обобщенной формальной группой Любина — Тейта (при $m = 1$ это классическая формальная группа Любина — Тейта). Соответствующее $f(X) \in \mathcal{F}_\pi$ в отношении данной формальной группы называют изогенией и обозначают $[\pi](X)$.

В [3] доказано, что обобщенные формальные группы Любина — Тейта находятся во взаимно-однозначном соответствии с формальными группами, полученными применением функциональной леммы для случая $\sigma = \mathrm{id}, s_m = \frac{1}{\pi}, s_i = 0$ при $i \neq m$, причем две обобщенные формальные группы Любина — Тейта изоморфны тогда и только тогда, когда они построены по изогении из одного и того же множества.

Таким образом, логарифм $\lambda_F(X)$ произвольной формальной группы Любина — Тейта $F(X,Y)$, построенный по изогении $f(X) \in \mathcal{F}_\pi$, удовлетворяет условию

$$\left(\mathrm{id} - \frac{\Delta^m}{\pi}\right)(\lambda_F(X)) = l_F(X) \in \mathcal{O}_K[[X]]$$

и, обратно, любая формальная группа, построенная по решению $\lambda_g(X)$ уравнения $(\mathrm{id} - \frac{\Delta^m}{\pi})(\lambda(X)) = g(X) \in \mathcal{O}_K[[X]]$, является обобщенной формальной группой Любина — Тейта с изогенией

$$f(X) = [\pi](X) = \lambda_g^{-1}(\pi\lambda_g(X)) \in \mathcal{F}_\pi.$$

Пусть $g(X) = X + \sum_{n>1} b_n X^n, \lambda(X) = X + \sum_{n>1} c_n X^n$. Тогда $c_n = b_n$, если $q^m \nmid n$,

$$c_{q^{mk}} = b_{q^{mk}} + \frac{1}{\pi} b_{q^{m(k-1)}} + \cdots + \frac{1}{\pi^{k-1}} b_{q^m} + \frac{1}{\pi^k},$$

$$c_{q^{mk}s} = b_{q^{mk}s} + \frac{1}{\pi} b_{q^{m(k-1)}s} + \cdots + \frac{1}{\pi^k} b_s, \quad 2 \leq s \leq q^m - 1.$$

Логарифм Артина — Хассе имеет вид $\lambda_a(X) = \sum_{n \geq 0} \frac{X^{q^{mn}}}{\pi^n}$.

Ряд, обратный к $\lambda_F(X)$ в смысле суперпозиции, обозначают $\exp_F X$ и называют формальной экспонентой.

Пусть теперь T — неразветвленное расширение поля K, $\mathcal{O}_T$ — его кольцо целых, σ — автоморфизм Фробениуса T/K. Построим гомоморфизм Δ на $T[[X]]^o$ по формуле

$$\Delta\left(\sum_{n \geq 1} a_n X^n\right) = \sum_{n \geq 1} a_n^\sigma X^{qn}$$

(поскольку на K имеем $\sigma = \mathrm{id}$, это продолжение гомоморфизма из функциональной леммы, заданного на $K[[X]]^o$).

Для любой обобщенной формальной группы Любина — Тейта $F(X,Y)$ будем теперь обозначать

$$l_F(X) = \left(1 - \frac{\Delta^m}{\pi}\right)(\lambda_F(X)) \in \mathcal{O}_K[[X]]^o.$$

Заметим, что в функциональной лемме именно по этому ряду строится формальная группа и ее логарифм. Случай $g(X) = l_a(X) = X$ дает логарифм Артина — Хассе $\lambda_a(X)$, причем $l_F(X) = \lambda_a^{-1}(\lambda_F(X))$.

Отображение, обратное к $l_F(X)$ в смысле суперпозиции, обозначим $E_F(X)$ (см. [4, 5]). Легко убедиться, что

$$E_F(X) = \lambda_F^{-1}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{\Delta^{mn}(X)}{\pi^n}\right) = \lambda_F^{-1}(\lambda_a(X)),$$

то есть это эндоморфизм из F в F_a. Кроме того,

$$E_F(X) \equiv X \bmod \deg 2, \quad l_F(X) \equiv X \bmod \deg 2.$$

Действие введенных отображений естественным образом продолжается на $\mathcal{O}_T[[X]]^o$, то есть для любого $\varphi(X) \in \mathcal{O}_T[[X]]^o$ имеем

$$l_F(\varphi) = \left(1 - \frac{\Delta^m}{\pi}\right)(\lambda_F(\varphi)), \quad E_F(\varphi) = \lambda_F^{-1}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{\Delta^{mn}(\varphi)}{\pi^n}\right).$$

Именно эти конструкции используются в формулах явной формы закона взаимности. Например, при нечетных простых p для обобщенного символа Гильберта $(\alpha,\beta)_F$ имеет место формула $(\alpha,\beta)_F = [\mathrm{tr}_{T/k}\gamma](\zeta)$, где

$$\gamma = \mathrm{res}_X\left(\frac{l_F(\beta)}{A}\frac{dA}{dX} - l_m(\varepsilon)\frac{d}{dX}(\frac{\Delta}{\pi}\lambda_g(\beta))\right)/s(X)$$

(подробные обозначения см. в [3, 5]).

Обратим внимание, что $E_F(X)$ является обобщением классической экспоненты Артина — Хассе, а $l_F(X)$ — обобщением его классического логарифма.

3. Функциональные уравнения для относительных формальных групп Любина — Тейта. Пусть k — числовое локальное поле, $\mathcal{O}_k$ — его кольцо целых, v_k — нормирование, π_0 — произвольный униформизирующий элемент, $\wp_k$ — максимальный идеал. Под $\overline{k}$ будем подразумевать поле вычетов k (конечное поле характеристики p с числом элементов $q = p^{f_0}$), под $\tilde{k}$ — пополнение максимального неразветвленного расширения k, а под Ω — пополнение алгебраического замыкания k.

Фиксируем K — неразветвленное расширение k конечной степени d. Тогда $\mathcal{O}_K$ будет его кольцом целых, v_K — нормированием, π — произвольным униформизирующим элементом, а $\wp_K$ — максимальным идеалом. Поле вычетов $\overline{K}$ содержит $q^d = p^{f_0 d}$ элементов. Под σ будем подразумевать автоморфизм Фробениуса расширения $\tilde{K}/k$.

Для каждого элемента $\xi \in k$ со свойством $v_k(\xi) = d$ составим множество

$$\mathcal{F}_\xi = \{f(X) \in \mathcal{O}_K[[X]] : f(X) \equiv X^q \bmod \wp_K, f(X) \equiv \pi X \bmod \deg 2, N_{K/k}(\pi) = \xi\}.$$

Ряд из $\mathcal{F}_\xi$ будем называть изогенией. Изогению со свойством

$$f(X) \equiv \pi X \bmod \deg 2$$

обозначим $[\pi](X)$.

Тогда (см. [6, 7]) для любого $f(X) \in \mathcal{F}_\xi$ существует единственная формальная группа $F_f(X, Y)$ над $\mathcal{O}_K$, для которой $f(X) \in \mathrm{Hom}(F, F^\sigma)$ (то есть $f \circ F_f = F_f^\sigma \circ f$).

Формальную группу F_f, полученную таким образом, называют относительной формальной группой Любина — Тейта.

В [7] доказано, что данные формальные группы находятся во взаимно-однозначном соответствии с группами, полученными по функциональной лемме для поля K, его кольца целых $\mathcal{O}_K$, автоморфизма Фробениуса σ в K/k и $s_1 = \frac{1}{\pi}, s_i = 0$ при $i \neq 1$. Таким образом, соответствующее функциональное уравнение имеет вид

$$\lambda_g(X) = g(X) + \frac{1}{\pi}\lambda_g^\Delta(X), \quad g(X) \in \mathcal{O}_K[[X]]^o.$$

Доказано также, что две обобщенные формальные группы Любина — Тейта изоморфны тогда и только тогда, когда они построены по изогении $[\pi](X)$ из одного и того же множества.

Для элемента $a \in \mathcal{O}_{\tilde{k}}$ введем обозначение

$$a^{(i)} = a^{1+\sigma+\cdots+\sigma^{i-1}}.$$

Пусть $g(X) = X + \sum_{n>1} b_n X^n, \lambda_g(X) = X + \sum_{n>1} c_n X^n$. Тогда $c_n = b_n$ при $q \nmid n$ и

$$c_{q^m s} = b_{q^m s} + \frac{1}{\pi} b_{q^{m-1}s}^\sigma + \frac{1}{\pi^{(2)}} b_{q^{m-2}s}^{\sigma^2} + \cdots + \frac{1}{\pi^{(m)}} b_s^{\sigma^m}$$

для $n = q^m s, q \nmid s$.

В случае $g(X) = X$ имеем $\lambda_a(X) = \sum_{n\geq 0} \frac{X^{q^n}}{\pi^{(n)}}$ — логарифм Артина — Хассе.

Пусть теперь T — неразветвленное расширение поля K, причем $\mathcal{O}_T$ — его кольцо целых.

По основному соотношению для логарифма из функциональной леммы для любой относительной формальной группы Любина — Тейта $F(X, Y)$ верно

$$l_F(X) = \left(1 - \frac{\Delta}{\pi}\right)(\lambda_g(X)) \in \mathcal{O}_K[[X]]^o,$$

причем

$$l_F(X) = \lambda_a^{-1}(\lambda_g(X)) = [1]_{f_a, f}.$$

Отображение E_F, обратное к l_F в смысле суперпозиции, имеет вид

$$E_F(X) = \lambda_g^{-1}\left(\sum_{n\geq 0} \frac{\Delta^n(X)}{\pi^n}\right),$$

причем

$$E_F(X) \equiv X \bmod \deg 2, \quad l_F(X) \equiv X \bmod \deg 2.$$

Действие l_F и E_F продолжается на $\mathcal{O}_T[[X]]^o$, то есть для любого $\varphi(X) \in \mathcal{O}_T[[X]]^o$ имеем

$$l_F(\varphi) = \left(1 - \frac{\Delta}{\pi}\right)(\lambda_g(\varphi)), \quad E_F(\varphi) = \lambda_g^{-1}\left(\sum_{n\geq 0} \frac{\Delta^n(\varphi)}{\pi^n}\right).$$

Мы получили величины из явной формулы обобщенного символа Гильберта для относительных формальных групп Любина — Тейта, которые выглядят аналогично случаю обобщенных формальных групп Любина — Тейта.

4. Функциональные уравнения для формальных групп Хонды. Теперь найдем функциональное уравнение для формальных групп Хонды (см. [8]). Заметим, что способ их построения отличен от метода Любина — Тейта.

Пусть K — дискретно нормированное поле нулевой характеристики, $\mathcal{O}_K$ — его кольцо целых, $\wp$ — максимальный идеал, причем поле вычетов $\overline{K}$ имеет положительную характеристику p, а $q = p^f$. Под π будем подразумевать униформизующую, а под σ гомоморфизм поля K со свойством

$$a^\sigma \in A, \quad a^\sigma \equiv a^q \mod \wp$$

для всех $a \in \mathcal{O}_K$.

Как обычно, Δ — индуцированный гомоморфизм кольца степенных рядов.

Множество

$$K[[\Delta]] = \left\{ u = \sum_{i \geq 0} u_i \Delta^i, u_i \in K \right\}$$

с естественным сложением и умножением

$$u_i \Delta^i v_j \Delta^j = u_i v_j^{\Delta^i} \Delta^{i+j}$$

образует некоммутативное кольцо (заметим, что $v_j^\Delta = v_j^\sigma$). В нем содержится подкольцо $\mathcal{O}_K[[\Delta]]$. Элемент $u = \sum_{i\geq 0} u_i \Delta^i$ подобного кольца обратим тогда и только тогда, когда обратимо u_0. В этом случае выполнены соотношения $u_0 v_0 = 1$, $u_0 v_i + u_1 v_{i-1}^\sigma + \dots + u_i v_0^{\sigma^i} = 0$, где $v = \sum_{i\geq 0} v_i \Delta^i$ — элемент, обратный к u.

Таким образом, $u(X) = \sum_{i\geq 0} u_i X^{q^i}$, а произвольное функциональное уравнение может быть записано в виде

$$\lambda_g(X) = g(X) + s(\lambda_g(X)), \quad s = \sum_{i\geq 1} s_i \Delta^i \in K[[\Delta]], \quad s_i \pi \in \mathcal{O}_K.$$

Решение этого уравнения имеет вид $\lambda_g(X) = w^{-1}(g(X))$, где $w = \mathrm{id} - s$, а w^{-1} — обратный элемент кольца $K[[\Delta]]$.

Для $u = \pi - \sum_{i\geq 1} u_i \Delta^i \in \mathcal{O}_K[[\Delta]]$ имеем $v = u^{-1}\pi = \mathrm{id} + \sum_{i\geq 1} v_i \Delta^i$, причем коэффициенты рядов u и v связаны соотношениями

$$\pi v_i = u_1 v_{i-1}^\sigma + \dots + u_{i-1} v_1^{\sigma^{i-1}} + u_i.$$

Поскольку $uv = \pi$, для

$$v(X) = X + \sum_{i\geq 1} v_i X^{q^i} \in K[[X]]$$

верно $u(v(X)) = \pi X$, то есть $v(X) = X + s(v(X))$, где $s = \sum_{i\geq 1} s_i \Delta^i$, причем $s_i = \frac{u_i}{\pi}, u_i \in \mathcal{O}_K$. Мы получили функциональное уравнение, решение которого $v(X)$ по функциональной лемме является логарифмом формальной группы

$F(X,Y) = v^{-1}(v(X) + v(Y)) \in \mathcal{O}_K[[X,Y]]$. Это и есть формальная группа Хонды. Заметим, что в данном случае $g(X) = X$, то есть $v(X) = \lambda_a(X)$ — логарифм Артина — Хассе. По функциональной лемме логарифмы изоморфных формальных групп, и только они, удовлетворяют уравнениям одного типа, то есть логарифм произвольной формальной группы Хонды, изоморфной данной, задан уравнением вида

$$\lambda(X) = g(X) + s(\lambda(X)), \quad g(X) \in \mathcal{O}_K[[X]], \quad g(X) \equiv X \bmod \deg 2.$$

Логарифм такой группы есть $\lambda_g(X) = \lambda_a(g(X))$. Получается, для формальной группы Хонды ряд $g(X) = l_F(X) = u(\lambda_g(X))$ имеет целые коэффициенты. Обратный к нему находится по формуле $E_F(X) = \lambda_g^{-1}(v(X))$.

Далее T — неразветвленное расширение поля K, а $\mathcal{O}_T$ — его кольцо целых.

Действие l_F и E_F продолжается на $\mathcal{O}_T[[X]]^o$, то есть для любого $\varphi(X) \in \mathcal{O}_T[[X]]^o$ имеем

$$l_F(\varphi) = \left(\mathrm{id} - \sum_{i\geq 1} \frac{u_i}{\pi}\Delta^i\right)(\lambda_g(\varphi)), \quad E_F(\varphi) = \lambda_g^{-1}\left(\sum_{i\geq 0} v_i \Delta^i(\varphi)\right).$$

Эти функции используются в явной формуле обобщенного символа Гильберта.

Литература

1. *Hazewinkel M.* Formal groups and applications. New York: Academic Press, 1978.

2. *Lubin J., Tate J.* Formal complex multiplication in local fields // Ann. of Math. 1985. Vol. 8, no. 2. P. 380–387.

3. *Мадунц А. И., Востокова Р. П.* Формальные модули для обобщенных групп Любина — Тейта // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2015. Т. 435. С. 95–112.

4. *Шафаревич И. Р.* Общий закон взаимности // Матем. сб. 1950. Т. 26, no. 1. С. 113–146.

5. *Востоков С. В.* Явная форма закона взаимности // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1978. Т. 42, no. 6. С. 1288–1321.

6. *Shalite E.* Relative Lubin — Tate groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1985. Vol. 95, no. 1. P. 1–4.

7. *Madunts A. I.* Formal Modules for Relative Formal Lubin — Tate Groups // J. Math. Sci. 2018. Vol. 232. P. 704–716. https://doi.org/10.1007/s10958-018-3899-5

8. *Honda T.* On the theory of commutative formal groups // J. Math. Soc. Japan. 1970. Vol. 22, no. 2. P. 213–246.

Статья поступила в редакцию 11 июля 2019 г.;
после доработки 21 ноября 2019 г.;
рекомендована в печать 12 декабря 2019 г.

Контактная информация:

Мадунц Александра Игоревна — канд. физ.-мат. наук, ст. преп.; madunts@mail.ru

Hazewinkel functional lemma and formal groups classification

A. I. Madunts

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Madunts A. I. Hazewinkel functional lemma and formal groups classification. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 2, pp. 245–253. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.207 (In Russian)

There are two approaches to the construction of formal groups. The functional lemma proved by Hazewinkel allows to make formal groups with coefficients from a ring of zero characteristic by means of the functional equations using a certain ideal of this ring, overfield and a ring homomorphism with certain properties (for example, identical, and for a local field the Frobenius homomorphism can be chosen). There is a convenient criterion for the isomorphism of formal groups constructed by Hazewinkel's formula, as well as a formula for logarithms (in particular, the Artin — Hasse logarithm). At the same time, Lubin and Tate construct formal groups over local fields using isogeny, and Honda construct formal groups over discrete normalized ring of characteristic fields, introduces a certain noncommutative ring induced by the original ring and a fixed homomorphism. The paper establishes a connection between the classical classification of formal groups (standard, generalized and relative formal Lubin — Tate groups and formal Honda groups) and their classification using the Hazewinkel functional lemma. For each type, the corresponding functional equations are compiled and logarithms are studied, as well as series that use for construction the Hilbert symbol explicit formula.

Keywords: local fields, formal groups, Hilbert symbol, Hazewinkel classification.

References

1. Hazewinkel M., *Formal groups and applications* (Academic press, New York, 1978).

2. Lubin J., Tate J., "Formal complex multiplication in local fields", *Ann. of Math.* **8** (2), 380–387 (1985).

3. Madunts A. I., Vostokova R. P., "Formal modules for generalized Lubin — Tate groups", *J. Math. Sci. (N. Y.)* **219**(4), 553–564 (2016). https://doi.org/10.1007/s10958-016-3127-0

4. Shafarevich I. R., "The general reciprocity law", *Mat. Sb.* **26**(1), 113–146 (1950). (In Russian)

5. Vostokov S. V., "Explicit form of reciprocity low", *Math. USSR-Izv.* **13**(3), 557–588 (1979). http://dx.doi.org/10.1070/IM1979v013n03ABEH002077

6. Shalite E., "Relative Lubin — Tate groups", *Proc. Amer. Math. Soc.* **95**(1), 1–4 (1985).

7. Madunts A. I., "Formal Modules for Relative Formal Lubin — Tate Groups", *J. Math. Sci.* **232**, 704–716 (2018). https://doi.org/10.1007/s10958-018-3899-5

8. Honda T., "On the theory of commutative formal groups", *J. Math. Soc. Japan.* **22**(2), 213–246 (1970).

Received: July 11, 2019
Revised: November 21, 2019
Accepted: December 12, 2019

Author's information:

Alexandra I. Madunts — madunts@mail.ru