МАТЕМАТИКА

УДК 519.2
MSC 60E99

Об асимптотической нормальности в одном обобщении задачи Реньи*

С. М. Ананьевский, Н. А. Крюков

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Ананьевский С. М., Крюков Н. А.* Об асимптотической нормальности в одном обобщении задачи Реньи // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 3. С. 353–362.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.301

В представленной работе рассматривается одно обобщение известной задачи случайного заполнения отрезка большой длины единичными интервалами. На отрезок $[0, x]$, если $x \geq 1$, в соответствии с законом распределения F_x помещается открытый интервал единичной длины, где F_x — это распределение левого конца единичного интервала, которое сосредоточено на отрезке $[0,\ x-1]$. Первый размещаемый интервал занимает место $(t, t+1)$ и разбивает отрезок $[0, x]$ на две части $[0, t]$ и $[t+1, x]$, которые в дальнейшем заполняются независимо друг от друга согласно следующим правилам. На отрезке $[0, t]$ случайным образом выбирается точка t_1, распределенная в соответствии с законом F_t, и размещается интервал (t_1, t_1+1), а на отрезке $[t+1, x]$ случайным образом выбирается точка $t_2 = t+1+u$, где u — случайная величина, распределенная по закону F_{x-t-1}, и размещается интервал (t_2, t_2+1). Таким же образом далее заполняются вновь образованные отрезки. Если $x < 1$, то процесс заполнения считается законченным и на отрезок $[0, x]$ единичный интервал не размещается. В конце процесса заполнения на отрезке $[0, x]$ будут располагаться единичные интервалы так, что расстояния между соседними интервалами будут меньше единицы. В данной статье в качестве F_x рассматриваются законы распределения, имеющие плотности распределения, графики которых обладают свойством центральной симметрии относительно точки $(x-1/2, 1/x-1)$. В этот класс распределений входит, в частности, и равномерное распределение на отрезке $[0, x-1]$, согласно которому проблема случайного заполнения была исследована раньше другими авторами. В работе получено асимптотическое описание поведения центральных моментов и доказана асимптотическая нормальность случайной величины N_x, где N_x — общее количество разместившихся

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-01-00393).

единичных интервалов на отрезке $[0, x]$. Кроме того, в работе доказано, что распределения случайных величин N_x одинаковы для всех законов распределения указанного класса.

Ключевые слова: случайное заполнение, асимптотическое поведение моментов, асимптотическая нормальность.

Введение. Впервые эта задача в частном случае, когда закон распределения F_x имеет равномерную плотность распределения на отрезке $[0, x-1]$, изучалась А. Реньи [1]. Он интересовался асимптотическим поведением математического ожидания случайной величины N_x. Реньи показал, что математическое ожидание числа разместившихся единичных интервалов на отрезке $[0, x]$ удовлетворяет соотношению

$$EN_x = \lambda x + \lambda - 1 + O(x^{-n}) \quad (x \longrightarrow \infty) \tag{1}$$

при любом $n \geq 1$.

При этом им была вычислена константа

$$\lambda = \int\limits_0^\infty e^{-2\int\limits_0^t \frac{1-e^{-u}}{u} du} dt \approx 0.748. \tag{2}$$

В дальнейшем Дворецкий и Роббинс [2] продолжили изучение свойств распределения случайной величины N_x с равномерным законом распределения размещаемых интервалов. Они получили уточнение поведения математического ожидания этой случайной величины, изучили асимптотику центральных моментов старших порядков, а также привели доказательство асимптотической нормальности N_x.

В работе [3] было предложено изучать обобщение задачи Реньи в следующей постановке. На отрезок $[0, x+1]$ помещаем интервал $(t, t+1)$, где t — случайная величина, имеющая плотность распределения p_x, удовлетворяющая равенствам

$$p_x(u) + p_x(x-u) = \frac{2}{x} \quad \text{при} \quad u \in [0, x] \quad \text{и} \quad p_x(u) = 0 \quad \text{при} \quad u \notin [0, x]. \tag{3}$$

Отметим, что такая постановка задачи включает в себя все ситуации, когда плотность p_x является, в частности, линейной функцией на отрезке $[0, x]$. Классическая задача, рассмотренная в работах Реньи [1] и Дворецкого и Роббинса [2] подпадает под это описание и является частным случаем такой постановки задачи.

В работе [3] было доказано, что при сделанных предположениях (3) на закон распределения F_x выполняется равенство

$$EN_x = \lambda x + \lambda - 1 + O\left(\left(\frac{2e}{x}\right)^{x-\frac{3}{2}}\right) \qquad (x \to \infty), \tag{4}$$

где λ — константа из (2).

Отметим, что эта же асимптотика для математического ожидания случайной величины N_x в случае, когда $p_x(u)$ — плотность равномерного закона распределения на отрезке $[0, x]$, была получена Дворецким и Роббинсом [2]. В работах [4–8] изучались иные, в том числе более общие постановки задачи. В работах [4–7] рассматривались задачи, когда размещаемые интервалы могли, в свою очередь, иметь случайную длину. В работе [8] предложена дискретная модель заполнения отрезка.

В этой работе мы продолжаем исследования свойств распределения случайной величины N_x, когда закон размещения интервалов отличается от равномерного, начатые в работе [3].

Статья состоит из двух частей. В первой части изучено асимптотическое поведение центральных моментов случайной величины N_x при $x \to \infty$ и доказана ее асимптотическая нормальность. Во второй части работы мы доказываем, что для всех $p_x(u)$, удовлетворяющих условию (3), распределение случайной величины N_x одинаково.

1. Центральные моменты и асимптотическая нормальность случайной величины N_x. Докажем, что поведение моментов случайной величины N_x одинаковое для всех законов распределения F_x, удовлетворяющих свойству (3).

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Существует положительная константа λ_2 такая, что*

$$E\left(N_x - EN_x\right)^2 = \lambda_2 x + \lambda_2 + O\left(\left(\frac{4e}{x}\right)^{x-4}\right) \qquad (x \to \infty). \tag{5}$$

Теорема 2. *Для любого натурального k и любого положительного ε*

$$E\left(N_x - EN_x\right)^k = c_k x^{\left[\frac{k}{2}\right]} + o\left(x^{\left[\frac{k}{2}\right]-1-\varepsilon}\right) \qquad (x \to \infty), \tag{6}$$

где c_k — некоторые положительные константы и

$$c_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!}\lambda_2^k.$$

Теорема 3. *Случайные величины*

$$Z_x = \frac{N_x - EN_x}{\sqrt{E\left(N_x - EN_x\right)^2}}$$

асимптотически нормальны при $x \to \infty$.

Замечание. Здесь следует особо отметить, что формулировки этих теорем не отличаются от формулировок теорем, приведенных и доказанных Дворецким и Роббинсом в работе [2] для случая, когда F_x — равномерный закон распределения. В нашем случае F_x — произвольное распределение, удовлетворяющее условиям (3).

Доказательство теорем. Пусть далее P_x — распределение с плотностью $p_x(t)$, удовлетворяющей условиям (3). Покажем, что справедлива следующая лемма.

Лемма. *Для любых измеримых функций φ и ψ верно равенство*

$$\int\limits_0^x \left(\varphi(t)\psi(x-t) + \varphi(x-t)\psi(t)\right) dP_x(t) = \frac{1}{x}\int\limits_0^x \left(\varphi(t)\psi(x-t) + \varphi(x-t)\psi(t)\right) dt. \tag{7}$$

Доказательство леммы. Введем функцию $f(t) = \varphi(t)\psi(x-t)$. Заметим, что для любой измеримой и интегрируемой на $[0,x]$ функции $g(t)$ выполнено равенство

$$\int_0^x (g(t) + g(x-t))\, dP_x(t) = \frac{2}{x}\int_0^x g(t)dt.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^x (\varphi(t)\psi(x-t) + \varphi(x-t)\psi(t))\, dP_x(t) = \int\limits_0^x (f(t) + f(x-t))\, dP_x(t) = \frac{2}{x}\int\limits_0^x f(t)dt.$$

Продолжая, далее получаем

$$\frac{2}{x}\int\limits_0^x f(t)dt = \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)dt + \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(x-t)dt = \frac{1}{x}\int\limits_0^x (\varphi(t)\psi(x-t) + \varphi(x-t)\psi(t))\, dt,$$

что доказывает лемму.

Далее, положим $L(x) = \lambda x + \lambda - 1$, где λ — константа из (2). Введем последовательность функций $\varphi_k(x) = E\,(N_x - L(x))^k$, $k = 1, 2, \ldots$, и $\varphi_0(x) = 1$.

Пусть N_x/t обозначает количество разместившихся единичных интервалов на отрезке $[0,x]$ при условии, что первый интервал занял место $(t, t+1)$. Также η_x будет обозначать случайную величину, обладающую плотностью $p_x(t)$. Тогда

$$\begin{aligned}
\varphi_k(x+1) &= E\left(E\,(N_{x+1} - L(x+1))^k/\eta_x\right) = \\
&= E\,((N_{\eta_x} - L(\eta_x)) + (N_{x-\eta_x} - L(x-\eta_x)))^k = \\
&= \int\limits_0^x \sum_{i=0}^k C_k^i \varphi_i(t)\varphi_{k-i}(x-t)p_x(t)dt = \sum_{i=0}^k C_k^i \int\limits_0^x \varphi_i(t)\varphi_{k-i}(x-t)p_x(t)dt = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^k C_k^i \int\limits_0^x (\varphi_i(t)\varphi_{k-i}(x-t) + \varphi_{k-i}(t)\varphi_i(x-t))\, p_x(t)dt = \\
&= \sum_{i=0}^k C_k^i \frac{1}{x}\int\limits_0^x \varphi_i(t)\varphi_{k-i}(x-t)dt.
\end{aligned}$$

Последнее равенство следует из леммы.

Таким образом, верно равенство

$$\varphi_k(x+1) = \sum_{i=0}^k C_k^i \frac{1}{x}\int\limits_0^x \varphi_i(t)\varphi_{k-i}(x-t)dt. \tag{8}$$

Также заметим, что при $0 < x < 1$

$$\varphi_k(x) = E\,(N_x - L(x))^k = (1 - \lambda - \lambda x)^k \tag{9}$$

и при $x = 1$

$$\varphi_k(1) = E\,(N_1 - L(1))^k = (2 - 2\lambda)^k\,. \tag{10}$$

Здесь мы можем сказать, что для всех $k \geq 0$ функции $\varphi_k(x)$ совпадают при $x \in (0,1]$ для разных $p(x)$, удовлетворяющих (3), и, в частности, совпадают со случаем, когда $p(x) = \frac{1}{x}$ при $0 < x < 1$ и $p(x) = 0$ при $x \notin (0,1)$, то есть со случаем, рассматриваемым в работе [2].

Равенство (8) однозначно определяет функции $\varphi_k(x)$ для любых $k \geq 0$. Кроме того, справедливы следующие соотношения:

$$E\left(N_x - EN_x\right)^k = E\left((N_x - L(x)) - \varphi_1(x)\right)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \varphi_i(x)(-\varphi_1(x))^{k-i}. \qquad (11)$$

Значит, центральные моменты случайных величин N_x однозначно определяются функциями $\varphi_k(x)$, и они точно такие же как и для классического случая, когда

$$p(x) = \frac{1}{x} \quad \text{при} \quad 0 < x < 1 \quad \text{и} \quad p(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \notin (0,1).$$

Следовательно, для них выполнены теоремы 1 и 2.

Для того чтобы показать, что из теоремы 2 следует теорема 3 воспользуемся результатом, который можно найти в [9, стр. 390], и формулировку которого приведем здесь.

Теорема о слабой сходимости. *Пусть распределение случайной величины X однозначно определяется ее моментами и случайные величины X_n имеют моменты любого порядка. Пусть*

$$\lim_{n\to\infty} EX_n^k = EX^k, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Тогда X_n слабо сходятся к X.

Рассмотрим моменты порядка k случайных величин Z_x.

Из теорем 1 и 2 следует, что

$$\lim_{x\to\infty} EZ_x = \frac{c_k x^{[\frac{k}{2}]} + o\left(x^{[\frac{k}{2}]-1-\varepsilon}\right)}{\left(\lambda_2 x + \lambda_2 + O\left(\left(\frac{4e}{x}\right)^{x-4}\right)\right)^{\frac{k}{2}}} = 0, \quad \text{если} \quad k \text{ — нечетное},$$

и

$$\lim_{x\to\infty} EZ_x = \frac{c_k x^{[\frac{k}{2}]} + o\left(x^{[\frac{k}{2}]-1-\varepsilon}\right)}{\left(\lambda_2 x + \lambda_2 + O\left(\left(\frac{4e}{x}\right)^{x-4}\right)\right)^{\frac{k}{2}}} = \frac{(2k)!}{2^k k!}, \quad \text{если} \quad k \text{ — четное}.$$

Для окончания доказательства теоремы 3 достаточно применить приведенную теорему о слабой сходимости.

2. Одинаковая распределенность. Покажем, что распределения случайных величин N_x одинаковы для всех законов распределения F_x, которые удовлетворяют условию (3).

Пусть $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ — две случайные величины, имеющие плотности распределения $p_{1,t}$ и $p_{2,t}$, соответственно, и удовлетворяющие условию

$$p_{i,t}(u)+p_{i,t}(t-u)=\frac{2}{t} \quad \text{при} \quad u\in[0,t] \quad \text{и} \quad p_{i,t}(u)=0 \quad \text{при} \quad u\notin[0,t], \qquad i=1,2. \tag{12}$$

Введем два семейства случайных величин $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$, которые определяются равенствами

$$\xi_1(t+1)=1+\xi_1(\eta_1(t))+\hat{\xi}_1(t-\eta_1(t)), \quad \xi_1(t)=0 \quad \text{при} \quad 0\le t<1 \quad \text{и} \quad \xi_1(1)=1, \tag{13}$$

$$\xi_2(t+1)=1+\xi_2(\eta_2(t))+\hat{\xi}_2(t-(\eta_2(t)), \quad \xi_2(t)=0 \quad \text{при} \quad 0\le t<1 \quad \text{и} \quad \xi_2(1)=1, \tag{14}$$

где $\hat{\xi}_1(x)$ при $x\in[0,t]$ обозначает случайную величину, одинаково распределенную со случайной величиной $\xi_1(x)$ и независимую с $\xi_1(s)$ для всех $s\in[0,t]$, а $\hat{\xi}_2(x)$ обозначает случайную величину, одинаково распределенную со случайной величиной $\xi_2(x)$ и независимую с $\xi_2(s)$ для всех $s\in[0,t]$.

Теорема 4. *При любом $t>0$ распределения случайных величин $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ совпадают, т. е.*

$$\xi_1(t)\overset{d}{=}\xi_2(t).$$

Следствие из теоремы 4. *Пусть $\eta_1(x)$ и $\eta_2(x)$ — случайные величины, имеющие плотности распределения $p_1(u)$ и $p_2(u)$, которые удовлетворяют условию (3). Через N_x^i обозначим количество разместившихся единичных интервалов на отрезке $[0,x]$, когда случайное размещение интервала $(t,t+1)$ происходит в соответствии с плотностью $p_i(u)$, где $i=1,2$.*

Тогда

$$N_x^1\overset{d}{=}N_x^2.$$

Доказательство теоремы 4. Пусть

$$\tau_i(t)=\eta_i(t) \quad \text{при} \quad \eta_i(t)\le\frac{t}{2} \quad \text{и} \quad \tau_i(t)=t-\eta_i(t) \quad \text{при} \quad \eta_i(t)>\frac{t}{2} \qquad \text{для} \quad i=1,2.$$

Покажем, что

$$\tau_1(t)\overset{d}{=}\tau_2(t)\overset{d}{=}\tau(t), \tag{15}$$

где $\tau(t)$ — случайная величина с равномерным распределением на отрезке $[0,\frac{t}{2}]$.

Заметим, что

$$P\left(\tau_1(t)\in\left[0,\frac{t}{2}\right]\right)=P\left(\tau_2(t)\in\left[0,\frac{t}{2}\right]\right)=1.$$

Пусть $[a, b] \subset \left[0, \frac{t}{2}\right]$. Тогда вероятность того, что случайная величина $\tau_i(t)$ принимает значения из $[a, b)$, равна

$$P\left(\tau_i(t) \in [a, b]\right) = P\left(\eta_i \in [a, b]\right) + P\left(\eta_i \in [t-b, t-a]\right) =$$
$$= \int\limits_a^b p_{i,t}(u)du + \int\limits_{t-b}^{t-a} p_{i,t}(u)du = \int\limits_a^b p_{i,t}(u)du + \int\limits_{t-b}^{t-a} \left(\frac{2}{t} - p_{i,t}(t-u)\right) du =$$
$$= \int\limits_a^b \left(p_{i,t}(u) + \frac{2}{t} - p_{i,t}(u)\right) du = \frac{2(b-a)}{t} = P(\tau \in [a, b)).$$

Это и означает справедливость (15).

Далее, определим при $t \geq 0$ семейство случайных величин $\xi(t)$ следующими равенствами:

$$\begin{gathered} \xi(t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 1, \quad \xi(1) = 1, \\ \xi(t+1) = 1 + \xi(\tau(t)) + \hat{\xi}(t - \tau(t)), \end{gathered} \tag{16}$$

где $\hat{\xi}(x)$ при $x \in [0, t]$ обозначает случайную величину одинаково распределенную со случайной величиной $\xi(x)$ и независимую с $\xi(s)$ для всех $s \in [0, t]$.

Докажем, что $\xi_1(t) \stackrel{d}{=} \xi(t)$ для любого $t \geq 0$.

Доказательство будем проводить по индукции.

Для $0 < t \leq 1$ равенство верно.

Предположим, что оно выполняется для всех $t \leq m$. Докажем, что оно в этом случае выполняется и для $t \leq m+1$. Не умаляя общности можно считать, что $t > 0$.

Тогда

$$\xi_1(t+1) = 1 + \xi_1(\eta_1(t)) + \hat{\xi}_1(t - \eta_1(t)),$$

$$\xi(t+1) = 1 + \xi(\tau(t)) + \hat{\xi}(t - \tau(t)).$$

Докажем справедливость равенства

$$\xi_1(\eta_1(t)) + \hat{\xi}_1(t - \eta_1(t)) \stackrel{d}{=} \xi(\tau_1(t)) + \hat{\xi}(t - \tau_1(t - \tau(t)). \tag{17}$$

Заметим, что при $\eta_1(t) \leq \frac{t}{2}$ выполняется равенство $\eta_1(t) = \tau_1(t)$ и равенство (17) очевидно.

Если же $\eta_1(t) > \frac{t}{2}$, то

$$\eta_1(t) + \tau_1(t) = t,$$

и в этом случае получаем

$$\xi_1(\eta_1(t)) + \hat{\xi}_1(t - \eta_1(t)) = \xi_1(t - \tau_1(t)) + \hat{\xi}_1(\tau_1(t)) \stackrel{d}{=} \xi_1(\tau_1(t)) + \hat{\xi}_1(t - \tau_1(t)).$$

Остается принять во внимание (15). Тогда

$$\xi_1(\eta_1(t)) + \hat{\xi}_1(t - \eta_1(t)) \stackrel{d}{=} \xi_1(\tau(t)) + \hat{\xi}_1(t - \tau(t))$$

для всех $0 < t \leq m$.

Учитывая индукционное предположение, делаем заключение, что

$$\xi_1(\eta_1(t)) + \hat{\xi}_1(t - \eta_1(t)) \stackrel{d}{=} \xi(\tau(t)) + \hat{\xi}(t - \tau(t))$$

для всех $0 < t \le m$.

Принимая во внимание определения (13) и (16) семейств случайных величин $\xi_1(t)$ и $\xi(t)$, приходим к равенству

$$\xi_1(t) \stackrel{d}{=} \xi(t) \quad \text{при всех } t \le m + 1.$$

Это верно для любого натурального m. Отсюда следует утверждение теоремы 4.

Доказательство следствия из теоремы 4. Для случайных величин $N_{x+1}/\eta_i(x)$ справедливо равенство

$$N_{x+1}/\eta_i(x) = N_{\eta_i(x)} + N_{x-\eta_i(x)} + 1,$$

где $N_{\eta_i(x)}$ и $N_{x-\eta_i(x)}$ — независимые случайные величины ($i = 1, 2$). Из описания процедуры заполнения отрезка $[0, x+1]$ следует равенство $N_{x+1}/\eta_i(x) = N^i_{x+1}$.

Таким образом, выполняются равенства

$$N^i_{x+1} = N_{\eta_i(x)} + N_{x-\eta_i(x)} + 1 \quad (i = 1, 2),$$

при этом $N^i_x = 0$, если $0 \le x < 1$, и $N^i_1 = 1$ ($i = 1, 2$).

Это полностью удовлетворяет описанию случайных величин, данных в (13) и (14). Осталось сослаться на теорему 4. Тогда

$$N^1_x \stackrel{d}{=} N^2_x,$$

что завершает доказательство следствия.

Литература

1. *Renyi A.* On a one-dimensional problem concerning space-filling // Publ. of the Math. Inst. of Hungarian Acad. of Sciences. 1958. Vol. 3. P. 109–127.

2. *Dvoretzky A., Robbins H.* On the “parking” problem // Publ. of the Math. Inst. of Hungarian Acad. of Sciences. 1964. Vol. 9. P. 209–226.

3. *Ananjevskii S. M.* Some Generalizations of Parking Problem // Vestnik St. Petersburg University: Mathematics. 2016. Vol. 49. Issue 4. P. 299–304. https://doi.org/10.3103/S1063454116040026

4. *Ney P. E.* A random interval filling problem // Annals of Math. Statist. 1962. Vol. 33. P. 702–718.

5. *Mannion D.* Random packing of an interval // Adv. Appl. Prob. 1976. Vol. 8. P. 477–501.

6. *Ananjevskii S. M.* The “parking” problem for segments of different length // Journal of Mathematical Sciences. 1999. Vol. 93. P. 259–264. https://doi.org/10.1007/BF02364808

7. *Ананьевский С. М., Шульгина Е. А.* О мере заполненной части отрезка в задаче «парковки» // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2013. Вып. 4. С. 3–12.

8. *Ananjevskii S. M., Kryukov N. A.* The Problem of Selfish Parking // Vestnik St. Petersburg University, Mathematics. 2018. Vol. 51. Issue 4. P. 322–326. https://doi.org/10.3103/S1063454118040039

9. *Billingsley P.* Probability and Measure. In: Wiley series in probability and mathematical statistics. Third Edition. New York: John Wiley Sons, 1985.

Статья поступила в редакцию 6 марта 2019 г.;
после доработки 17 марта 2019 г.;
рекомендована в печать 21 марта 2019 г.

Контактная информация:

Ананьевский Сергей Михайлович — канд. физ.-мат. наук, доц.; ananjevskii@mail.ru
Крюков Николай Алексеевич — аспирант; kryuknik@gmail.com

On asymptotic normality in one generalization of the Renyi problem*

S. M. Ananjevskii, N. A. Kryukov

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Ananjevskii S. M., Kryukov N. A. On asymptotic normality in one generalization of the Renyi problem. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2019, vol. 6 (64), issue 3, pp. 353–362. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.301 (In Russian)

In this present paper we consider one generalization of the well-known problem of random filling a segment of large length with unit intervals. On the segment $[0, x]$, if $x \geq 1$, in accordance with the distribution law F_x we will place an open interval of unit length. F_x is the distribution of the left end of the unit interval, which is concentrated on the segment $[0, x-1]$. Let the first allocated interval take the place of $(t, t+1)$ and divide the segment $[0, x]$ into two parts $[0, t]$ and $[t+1, x]$, which are further filled independently of each other according to the following rules. On the segment $[0, t]$ a point t_1 is selected randomly in accordance with the law F_t, and the interval (t_1, t_1+1) is placed. A point t_2 is selected randomly in the segment $[t+1, x]$ such that $u = t_2 - t - 1$ is a random variable distributed according to the law F_{x-t-1}, and we place the interval (t_2, t_2+1). In the same way then the newly formed segments are filled. If $x < 1$, then the filling process is considered complete and the unit interval is not placed on the segment $[0, x]$. At the end of the filling process, unit intervals will be located on the segment $[0, x]$ so that the distances between adjacent intervals are less than one. In this article we consider distribution laws F_x having distribution densities such that their graphs have the property of central symmetry with respect to the point $(x - 1/2, 1/x - 1)$. This class of distributions includes, in particular, a uniform distribution on the segment $[0, x-1]$, according to which the problem of random filling was investigated earlier by other authors. Let N_x be the total number of single units placed on the segment $[0, x]$. We are interested in the properties of the distribution of this random variable. We obtain an asymptotic description of the behavior of central moments and prove the asymptotic normality of the random variable N_x. In addition, we establish that the distributions of the random variables N_x are the same for all the distribution laws of the specified class.

Keywords: random fill, the asymptotic behaviour of moments, asymptotic normality.

References

1. Renyi A., “On a one-dimensional problem concerning space-filling”, *Publ. of the Math. Inst. of Hungarian Acad. of Sciences* **3**, 109–127 (1958).

2. Dvoretzky A., Robbins H., “On the “parking” problem”, *Publ. of the Math. Inst. of Hungarian Acad. of Sciences* **9**, 209–226 (1964).

3. Ananjevskii S. M., “Some Generalizations of Parking Problem”, *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics* **49**, issue 4, 299–304 (2016). https://doi.org/10.3103/S1063454116040026

4. Ney P. E., “A random interval filling problem”, *Annals of Math. Statist.* **33**, 702–718 (1962).

5. Mannion D., “Random packing of an interval”, *Adv. Appl. Prob.* **8**, 477–501 (1976).

*The work is supported by Russian Foundation for Basic Research (grant N 18-01-00393).

6. Ananjevskii S. M., "The "parking" problem for segments of different length", *Journal of Mathematical Sciences* **93**, 259–264 (1999). https://doi.org/10.1007/BF02364808

7. Ananjevskii S. M., Shulgina E. A., "On the measure of the occupied part of a segment in the parking "problem", *Vestnik St. Petersburg University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, issue 4, 3–12 (2013). (In Russian)

8. Ananjevskii S. M., Kryukov N. A., "The problem of selfish parking", *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics* **51**, issue 4, 322–326 (2018). https://doi.org/10.3103/S1063454118040039

9. Billingsley P., *Probability and Measure*, in *Wiley series in probability and mathematical statistics* (Third Edition, John Wiley Sons, New York, 1985).

Received: March 6, 2019
Revised: March 17, 2019
Accepted: March 21, 2019

Author's information:

Sergey M. Ananjevskii — ananjevskii@mail.ru
Nikolay A. Kryukov — kryuknik@gmail.com