УДК 531.31:434.1 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 3
MSC 34D20

# Об устойчивости положения равновесия осциллятора с бесконечно большой частотой собственных колебаний

*Ю. Н. Бибиков, В. Р. Букаты*

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** *Бибиков Ю. Н., Букаты В. Р.* Об устойчивости положения равновесия осциллятора с бесконечно большой частотой собственных колебаний // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 3. С. 394–398. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.304

Рассматривается вопрос об устойчивости положения равновесия осциллятора с бесконечно большой частотой собственных колебаний при периодических возмущениях осциллятора. Показано, что в случае общего положения вопрос решается рассмотрением только линейного приближения возмущения. В критическом случае указана процедура построения ненулевой постоянной, если она существует, знак которой определяет наличие асимптотической устойчивости либо неустойчивости положения равновесия.

*Ключевые слова*: дифференциальные уравнения второго порядка, устойчивость, периодические возмущения, осциллятор, неограниченная частота.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается вопрос об устойчивости нулевого решения дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + x^{\frac{p}{q}} = X(x, \dot{x}, t) \tag{1}$$

при следующих предположениях:

1) $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь, $p$ и $q$ — нечетные числа, $p < q$;

2) $X(x, y, t)$ — вещественно аналитическая функция переменных $x$ и $y$ в окрестности точки $(x = 0,\ y = 0)$, непрерывная и периодическая по $t$ с периодом $T$;

3) $X(0, 0, t) = 0$.

Уравнение (1) будем рассматривать как возмущение осциллятора

$$\ddot{x} + x^{\frac{p}{q}} = 0, \tag{2}$$

решения которого удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{q}{p+q}x^{\frac{p+q}{q}} = \mathrm{const} \tag{3}$$

и, следовательно, являются периодическими функциями $t$.

Заметим, что к осциллятору вида (2) приводится любой осциллятор, восстанавливающая сила которого описывается нечетной степенной функцией, аннулирующейся при $x = 0$.

Если $p = q$, то имеем задачу об устойчивости положения равновесия гармонического осциллятора, исследованную в классических работах А. Пуанкаре [1] и А. М. Ляпунова [2]. Случай $p > q = 1$ для автономных возмущений исследовал А. М. Ляпунов [3]. Общий случай $p > q$ исследован в работе [4].

Таким образом, осталось рассмотреть случай $q > p$, чему и посвящена настоящая работа.

Введем в системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x^{\frac{p}{q}} + X(x, y, t), \end{cases} \tag{4}$$

эквивалентной уравнению (1), восходящие к А. М. Ляпунову [3] «полярные координаты» $r$, $\varphi$ согласно формулам

$$x = r^q C(\varphi), \quad y = -r^{\frac{p+q}{2}} S(\varphi), \quad r > 0, \tag{5}$$

где периодические функции $C$, $S$ определяются как решение задачи Коши

$$C' = -S, \quad S' = C^{\frac{p}{q}}, \quad C(0) = 1, \quad S(0) = 0.$$

Обозначим период функций $C$, $S$ через $\omega$. Используя вытекающее из соотношения (3) тождество

$$(p+q)S^2(\varphi) + 2qC^{1+\frac{p}{q}}(\varphi) = 2q, \tag{6}$$

получим систему

$$\begin{cases} \dot{r} = -q^{-1} r^{1-\frac{p+q}{2}} X(r^q C, -r^{\frac{p+q}{2}} S, t) S(\varphi), \\ \dot{\varphi} = r^{-s} - r^{-\frac{p+q}{2}} X(r^q C, -r^{\frac{p+q}{2}} S, t) C(\varphi), \end{cases} \tag{7}$$

где $s = \frac{q-p}{2} \geq 1$.

Таким образом, у невозмущенного осциллятора (2) частота собственных колебаний является бесконечно большой функцией амплитуды $r$ при $r \to 0$, в отличие от случая $p > q$, когда она является бесконечно малой функцией амплитуды.

**2. Устойчивость по первому приближению.** Представим функцию $X(x, y, t)$ в виде

$$X = a(t)x + b(t)y + X^*(x, y, t),$$

где $a(t)$, $b(t)$ — непрерывные $T$-периодические функции, а разложение функции $X^*$ по степеням $x$ и $y$ начинается с членов порядка не ниже второго. Система (7) примет вид

$$\begin{cases} \dot{r} = R(r, \varphi, t), \\ \dot{\varphi} = r^{-s} + \Phi(r, \varphi, t), \end{cases} \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} qR &= b(t)S^2 r - a(t)CSr^{1+s} + O(r^{1+s+p}), \\ \Phi &= b(t)SC - a(t)C^2 r^s + O(r^{s+p}). \end{aligned} \tag{9}$$

**Лемма 1.** *Существует замена*

$$r = \rho P(t) + Q(t, \varphi)\rho^{1+s}, \tag{10}$$

*где $P(t)$, $Q(t,\varphi)$ — периодические функции с указанными периодами, $P(t) > 0$, $\rho > 0$, приводящая систему (8) к виду*

$$\begin{cases} \dot\rho = g\rho + O(\rho^{1+s}), \\ \dot\varphi = (\rho P(t))^{-s} + O(1), \quad \rho \to 0, \end{cases} \tag{11}$$

*где $g$ — некоторая постоянная.*

Доказательство. Для построения замены (10) продифференцируем равенство (10) по $t$ в силу систем (8) и (11). Получим соотношение

$$q^{-1}bS^2\rho(P+Q\rho^s) + O(\rho^{1+s}) = (g\rho + O(\rho^{1+s}))P + \rho\frac{dP}{dt} + \\ + (1+s)\rho^s(g\rho + O(\rho^{1+s}))Q + \frac{\partial Q}{\partial t}\rho^{1+s} + \rho^{1+s}\frac{\partial Q}{\partial\varphi}(\rho^{-s}P^{-s} + O(1)). \tag{12}$$

Приравнивая в (12) коэффициенты при $\rho$, приходим к уравнению

$$(b_1S^2 - g)P = \frac{dP}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial\varphi}P^{-s}, \tag{13}$$

где $b_1(t) = q^{-1}b(t)$.

Представим функцию $b_1(t)S^2(\varphi)$ в виде

$$b_1(t)S^2(\varphi) = g + \overline{S^2}(b_1(t) - \overline{b}_1) + b_1(t)(S^2(\varphi) - \overline{S^2}),$$

где $g = \overline{b}_1\overline{S^2}$, а черта обозначает среднее значение функции.

Используя это, разобьем уравнение (13) на два:

$$\frac{dP}{dt} = \overline{S^2}(b_1(t) - \overline{b}_1)P(t),$$
$$\frac{\partial Q}{\partial\varphi}P^{-s} = (S^2(\varphi) - \overline{S^2})b_1(t),$$

откуда

$$P(t) = \exp\left\{\overline{S^2}\int(b_1(t) - \overline{b}_1)dt\right\},$$
$$Q(t,\varphi) = P^s(t)b_1(t)\int(S^2(\varphi) - \overline{S^2})d\varphi.$$

Этим замена (10) определена. □

**Замечание.** Знак $g$ совпадает со знаком $\overline{b(t)}$.

В силу (3) и (6) устойчивость по отношению к $x$, $\dot x$ эквивалентна устойчивости по отношению к $\rho$. Следовательно, справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** *Нулевое решение уравнения (1) асимптотически устойчиво, если $\overline{b(t)} < 0$, и неустойчиво, если $\overline{b(t)} > 0$.*

Итак, в общем случае вопрос об устойчивости решается в первом приближении. Следовательно, вообще говоря, бифуркация положения равновесия при наличии малого параметра не имеет места.

**3. Критический случай.** Пусть $g = 0$. Тогда система (11) имеет вид

$$\begin{cases} \dot\rho = A(t,\varphi)\rho^{1+s} + \cdots, \\ \dot\varphi = (P(t)\rho)^{-s} + B(t,\varphi) + \cdots, \end{cases} \tag{14}$$

где $A(t,\varphi)$, $B(t,\varphi)$ — функции, периодические по $t$ и $\varphi$. Здесь и в дальнейшем многоточием отмечены члены, порядок которых выше выписанных.

Приписывая в системе (14) переменной $\rho$ и функциям $A$ и $B$ индекс 0, рассмотрим при $k=1,2,\ldots$ преобразования

$$\rho_{k-1}=\rho_k+h_k(t)\rho_k^{s+k}+f_k(t,\varphi)\rho_k^{2s+k} \tag{15}$$

систем вида

$$\begin{cases}\dot\rho_{k-1}=A_{k-1}(t,\varphi)\rho_{k-1}^{s+k}+\cdots\,,\\ \dot\varphi=(P(t)\rho_{k-1})^{-s}+B_{k-1}(t,\varphi)+\cdots\,.\end{cases} \tag{16}$$

**Лемма 2.** *Существует замена (15), переводящая систему (16) в систему*

$$\begin{cases}\dot\rho_k=g_k\rho_k^{s+k}+A_k(t,\varphi)\rho_k^{s+k+1}+\cdots\,,\\ \dot\varphi=(P(t)\rho_k)^{-s}+B_k(t,\varphi)+\cdots\,,\end{cases} \tag{17}$$

*где $g_k$ — постоянная.*

Доказательство. Дифференцируя замену (15) по $t$ с учетом систем (16) и (17) и приравнивая коэффициенты при $\rho_k^{s+k}$ (остальные степени $\rho_k$ имеют более высокие порядки), получим уравнение

$$\frac{dh_k}{dt}+\frac{\partial f_k}{\partial\varphi}P^{-s}=A_{k-1}-g_k. \tag{18}$$

Представив функцию $A_{k-1}$ в виде

$$A_{k-1}=g_k+\widehat{A}_{k-1}(t)+\widetilde{A}_{k-1}(t,\varphi),$$

где $g_k=\overline{A}_{k-1}$, $\widehat{A}_{k-1}(t)$ равно среднему значению функции $A_{k-1}-g_k$ по $\varphi$, разобьем уравнение (18) на два:

$$\frac{dh_k}{dt}=\widehat{A}_{k-1}(t)\quad\text{и}\quad\frac{\partial f_k}{\partial\varphi}=P^s(t)\widetilde{A}_{k-1}(t,\varphi),$$

откуда $h_k$ и $f_k$ найдутся интегрированием. $\square$

Если $g_k=0$, то к системе (17) применима доказанная лемма.

Выполняя замены (15), начиная с системы (14), получим последовательность постоянных $g_1,g_2,\ldots$, обрывающуюся на первом номере $N$, для которого $g_N\neq0$. Из вида системы (17) при $k=N$ вытекает следующая теорема.

**Теорема 2.** *Если $g_N<0$, то нулевое решение уравнения (1) асимптотически устойчиво, если $g_N>0$, то оно неустойчиво.*

**Замечание.** Можно доказать, что $g_1=0$. Следовательно, $N>1$.

### Литература

1. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.; Л.: ГИТТЛ, 1947.

2. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч. в пяти томах. Т. 2. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 7–267.

3. *Ляпунов А. М.* Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. Собр. соч. в пяти томах. Т. 2. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 272–331.

4. *Бибиков Ю. Н., Букаты В. Р., Трушина Н. В.* Об устойчивости положения равновесия при периодических возмущениях осциллятора со степенной восстанавливающей силой с рациональным показателем // Прикладная математика и механика. 2016. Т. 80. Вып. 6. С. 626–636.

Статья поступила в редакцию 1 февраля 2019 г.;
после доработки 23 февраля 2019 г.;
рекомендована в печать 21 марта 2019 г.

Контактная информация:

*Бибиков Юрий Николаевич* — д-р физ.-мат. наук, проф.; bibicoff@yandex.ru
*Букаты Вероника Ромуальдовна* — ст. преподаватель; v.bukaty@spbu.ru

## On the stability of the state of equilibrium of an oscillator with infinitely great frequency of proper oscillations

*Yu. N. Bibikov, V. R. Bukaty*

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

**For citation:** Bibikov Yu. N., Bukaty V. R. On the stability of the state of equilibrium of an oscillator with infinitely great frequency of proper oscillations. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2019, vol. 6 (64), issue 3, pp. 394–398. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.304 (In Russian)

A problem of the stability of the state of equilibrium of an oscillator with infinitely great frequency of proper oscillations under periodic in time perturbations, is considered. It is shown that in general case the problem can be solved by consideration of the linear approximation of the perturbation only. In singular case a procedure of the construction of a constant whose sign defines the character of the stability or instability, is presented. Namely, if this constant is negative then the state of equilibrium is asymptotically stable; in the opposite case it is unstable.

*Keywords*: second order differential equation, stability, periodic perturbation, oscillation, infinitely great frequency.

### References

1. Poincaré H., *Sur les courbes définies par une équation differentielle* (Oeuvres, 1892).
2. Lyapunov A. M., *Problème Général de la Stabilité du Movement* (Prinston Univ. Press, 1947).
3. Lyapunov A. M., *Investigation of one particular case of the problem of stability of motion. Collected works in 5 vol.* **2**, 272–331 (Izd. AN SSSR, Moscow, Leningrad, 1956). (In Russian)
4. Bibikov Yu., Bukaty V., Trushina N., "On the stability of the equilibrium under periodic perturbations of an oscillator with a power-law restoring force with a rational exponent", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **80**, issue 6, 443–448 (2016). https:/doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2017.06.002

Received: February 1, 2019
Revised: February 23, 2019
Accepted: March 21, 2019

Author's information:

*Yuri N. Bibikov* — bibicoff@yandex.ru
*Veronika R. Bukaty* — v.bukaty@spbu.ru