УДК 519.8+512.64 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 3
MSC 65K10, 15A80, 90B35, 90C47, 90C48

Решение задачи тропической оптимизации с приложением к оптимальному планированию*

Н. К. Кривулин, У. Л. Баско

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Кривулин Н. К., Баско У. Л.* Решение задачи тропической оптимизации с приложением к оптимальному планированию // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 3. С. 440–451. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.309

Рассматривается многомерная задача оптимизации, которая формулируется и решается в терминах тропической математики, изучающей теорию и приложения полуколец с идемпотентным сложением. Для решения задачи, целевая функция которой задается при помощи некоторой матрицы, используются методы и результаты идемпотентной алгебры и тропической оптимизации. Сначала строится точная нижняя оценка для целевой функции задачи, что позволяет определить минимальное значение целевой функции. Затем составляется и решается уравнение для целевой функции и ее минимального значения, откуда находится полное решение в виде множества всех собственных векторов матрицы задачи. В качестве приложения полученного результата приводится решение в явном виде задачи составления оптимального плана проекта, который состоит в выполнении некоторого набора работ при заданных ограничениях на время их начала и завершения. Критерий оптимальности плана определяется как минимум максимального разброса времени рабочего цикла по всем работам, которое задано как интервал между временем начала и завершения работы. Полученный аналитический результат расширяет и дополняет существующие алгоритмические численные решения задач оптимального планирования. Представлен иллюстративный пример применения этого результата к решению задачи планирования проекта, состоящего из трех работ.

Ключевые слова: идемпотентное полуполе, $(\max, +)$-алгебра, собственные число и вектор матрицы, тропическая оптимизация, задача планирования.

1. Введение. Задачи тропической оптимизации составляют важный класс задач тропической (идемпотентной) математики, которая является областью, занимающейся изучением полуколец с идемпотентным сложением. Первые публикации [1–4], посвященные тропической математике, появились в 60-х годах XX века. В частности, в работе [2] была рассмотрена одна из первых задач тропической оптимизации. Дальнейшее развитие методов тропической математики и оптимизации отражено в большом числе публикаций, включая монографии [5–10], где изучались задачи оптимизации, продиктованные конкретными проблемами в технике, экономике и менеджменте.

Одной из особенностей задач тропической оптимизации является то, что их решение часто сводится к решению линейных векторных уравнений, исследованию спектра линейного оператора и другим вычислительным проблемам идемпотентной

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-010-00723).

алгебры, что во многих случаях позволяет получать прямое решение в компактной векторной форме. Приложения задач тропической оптимизации включают многокритериальные задачи принятия решений, минимаксные задачи размещения объектов на плоскости и в пространстве, а также задачи планирования сроков выполнения проектов.

Оптимальное планирование сроков выполнения проектов является важной задачей управления проектами, направленной на определение оптимального времени начала и завершения работ проекта при различных временных ограничениях и критериях оптимальности. В 1910 году для решения таких задач американский инженер Г. Л. Гантт разработал технику календарного планирования с использованием горизонтальных диаграмм [11]. На основе диаграмм Гантта появились другие алгоритмы с использованием теории графов, известные как методы сетевого планирования.

Впервые методы сетевого планирования были разработаны в США в 50-х годах XX века. Специалисты из корпораций DuPont и Remington Rand, занятые ремонтом оборудования заводов DuPont, предложили метод критического пути (CPM — Critical Path Method) [12]. Компания Lockheed и консалтинговая фирма Booz Allen Hamilton при разработке баллистической ракеты «Поларис» по заказу ВМФ США создали метод оценки и пересмотра планов (PERT — Program Evaluation and Review Technique) [13].

Одна из трудностей решения задач планирования сроков выполнения проектов заключается в нелинейности и негладкости целевой функции и ограничений. Традиционные методы решения таких задач на основе линейного программирования или оптимизации на графах дают численное решение в виде итерационных вычислительных алгоритмов и не гарантируют получение аналитического решения в явном виде. В отличие от указанных методов решение задач планирования в форме многомерных задач тропической оптимизации во многих случаях позволяет получить результат в явном виде в компактной векторной форме [14–17]. Такое аналитическое решение позволяет прямо применять формальные методы анализа для исследования задач и их решений и обычно приводит к конечношаговым вычислительным схемам, для которых можно точно определить число операций, необходимых для получения результата.

Существует ряд задач оптимального планирования, где требуется минимизировать максимальное по всем работам время рабочего цикла, которое определяется как разность между временем завершения и временем начала работы [2, 5, 14, 15, 17]. В терминах тропической математики эти задачи приводят к минимизации функции $\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{A}$ — заданная квадратная матрица, а $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}^{-}$ — неизвестный вектор и мультипликативно сопряженный к нему. В работе [2] было показано, что минимум этой функции равен тропическому спектральному радиусу матрицы $\boldsymbol{A}$. Описание решений задачи в неявной форме в виде векторного неравенства было дано в [18, 19]. Прямое полное решение задачи и некоторых ее обобщений получено в работах [14, 15].

В настоящей работе рассматривается задача минимизации функции $\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{-}\boldsymbol{x}$, возникающая в задачах планирования, в которых необходимо минимизировать максимальный разброс времени цикла по всем работам. Получено полное решение задачи, сформулированной в терминах произвольного идемпотентного полуполя. Представлен иллюстративный пример применения полученного результата к решению задачи планирования проекта, состоящего из трех работ.

2. Элементы идемпотентной алгебры. В этом разделе представлен краткий обзор основных понятий и обозначений идемпотентной алгебры, необходимых для формулировки и решения задачи оптимизации в следующих частях работы. Дополнительные сведения по теории, методам и приложениям тропической математики можно найти, например, в работах [5–10].

2.1. Идемпотентное полуполе. Рассмотрим непустое множество $\mathbb{X}$, замкнутое относительно двух операций: сложения $\oplus$ и умножения $\odot$. По сложению множество $\mathbb{X}$ является идемпотентным коммутативным моноидом с нейтральным элементом $\mathbb{0}$. Свойство идемпотентности означает, что для любого элемента $x \in \mathbb{X}$ выполняется $x \oplus x = x$. Относительно умножения множество $\mathbb{X} \setminus \{\mathbb{0}\}$ образует коммутативную группу с нейтральным элементом $\mathbb{1}$. Для любого ненулевого x существует обратный элемент x^{-1} такой, что $x \odot x^{-1} = \mathbb{1}$. Кроме того, умножение $\odot$ обладает свойством дистрибутивности относительно сложения $\oplus$ и имеет $\mathbb{0}$ в качестве поглощающего элемента. Алгебраическая система $\langle \mathbb{X}, \oplus, \odot, \mathbb{0}, \mathbb{1} \rangle$ с указанными свойствами называется идемпотентным полуполем.

В силу ассоциативности умножения операция возведения в целую степень может быть введена стандартным образом. Для любого ненулевого $x \in \mathbb{X}$ и натурального числа n определим: $x^0 = \mathbb{1}$, $x^n = x^{n-1} \odot x$, $x^{-n} = (x^{-1})^n$, $\mathbb{0}^n = \mathbb{0}$. Будем считать, что введенная операция возведения в целую степень может быть распространена в полуполе на случай вещественного показателя степени.

Далее для упрощения записи знак умножения в алгебраических выражениях будем опускать: $x \odot y = xy$.

Идемпотентность сложения порождает на $\mathbb{X}$ такое отношение $\leqslant$ частичного порядка, что $x \leqslant y$ тогда и только тогда, когда $x \oplus y = y$. Из этого определения следует выполнение неравенств $x \leqslant x \oplus y$ и $y \leqslant x \oplus y$, а также равносильность неравенства $x \oplus y \leqslant z$ и системы неравенств $x \leqslant z$ и $y \leqslant z$ для любых $x, y, z \in \mathbb{X}$. Операции $\oplus$ и $\odot$ монотонны в смысле указанного порядка по каждому из аргументов: если $x \leqslant y$, то для любого $z \in \mathbb{X}$ выполняются неравенства $x \oplus z \leqslant y \oplus z$ и $xz \leqslant yz$. Отметим, что для любых ненулевых элементов $x, y \in \mathbb{X}$, для которых выполняется неравенство $x \leqslant y$, справедливо неравенство $x^{-1} \geqslant y^{-1}$. В дальнейшем будем предполагать, что введенный частичный порядок является линейным.

В качестве примера идемпотентного полуполя рассмотрим вещественное полуполе $\mathbb{R}_{\max,+} = \langle \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +, -\infty, 0 \rangle$, где роль нулевого элемента выполняет $-\infty$, а единичного — 0. Для любого $x \in \mathbb{R}$ существует обратный элемент x^{-1}, равный $-x$ в обычной арифметике. Для любых $x, y \in \mathbb{R}$ определена степень x^y, значение которой совпадает с арифметическим произведением xy. Порядок, порожденный на $\mathbb{R}_{\max,+}$ идемпотентным сложением, соответствует обычному линейному порядку на $\mathbb{R}$. Это полуполе обычно называют $(\max, +)$-алгеброй.

2.2. Векторы и матрицы. Обозначим через $\mathbb{X}^{m \times n}$ множество матриц над $\mathbb{X}$, состоящих из m строк и n столбцов. Матрица, все элементы которой равны $\mathbb{0}$, является нулевой. Матрица, у которой отсутствуют нулевые столбцы, называется регулярной по столбцам.

Операции сложения и умножения матриц подходящего размера, а также умножения матрицы на скаляр выполняются по стандартным правилам с заменой соответствующих покомпонентных операций на $\oplus$ и $\odot$.

Рассмотрим квадратные матрицы из $\mathbb{X}^{n\times n}$. Матрица $\boldsymbol{I} = \mathrm{diag}(\mathbb{1},\dots,\mathbb{1})$, у которой все недиагональные элементы равны $\mathbb{0}$, называется единичной. Для любой квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$ и натурального n определена степень: $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{A}$.

Квадратная матрица является разложимой, если путем одинаковых перестановок строк и столбцов ей можно придать блочно-треугольную форму, где все блоки выше (ниже) диагональных блоков — нулевые. Иначе матрица называется неразложимой.

Следом матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{X}^{n\times n}$ называется число $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A} = a_{11} \oplus \cdots \oplus a_{nn}$.

Обозначим множество векторов-столбцов над $\mathbb{X}$ порядка n через $\mathbb{X}^n$. Вектор называется регулярным, если у него отсутствуют нулевые компоненты.

Векторные операции сложения и умножения на скаляр выполняются по стандартным правилам с заменой соответствующих скалярных операций на $\oplus$ и $\odot$. Свойства монотонности операций $\oplus$ и $\odot$ для скаляров распространяется на операции над векторами, в которых неравенства понимаются покомпонентно.

Нетрудно проверить, что для неразложимой матрицы $\boldsymbol{A}$ и регулярного вектора $\boldsymbol{x}$ вектор $\boldsymbol{Ax}$ также будет регулярным.

Для любого ненулевого вектора-столбца $\boldsymbol{x} = (x_i) \in \mathbb{X}^n$ определен мультипликативно сопряженный вектор-строка $\boldsymbol{x}^- = (x_i^-)$ с элементами $x_i^- = x_i^{-1}$, если $x_i \neq \mathbb{0}$, и $x_i^- = \mathbb{0}$ в противном случае.

Если $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ — ненулевые векторы, то для них справедливо равенство $(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^-)^- = \boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^-$. Для регулярных векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{X}^n$ из неравенства $\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{y}$ следует неравенство $\boldsymbol{x}^- \geqslant \boldsymbol{y}^-$.

Для любого регулярного вектора $\boldsymbol{x}$ выполняется неравенство $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^- \geqslant \boldsymbol{I}$. Если вектор $\boldsymbol{x}$ ненулевой, для него справедливо равенство $\boldsymbol{x}^-\boldsymbol{x} = \mathbb{1}$.

Вектор $\boldsymbol{y} \in \mathbb{X}^n$ линейно зависит от векторов $\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_m \in \mathbb{X}^n$, если его можно представить в виде линейной комбинации $\boldsymbol{y} = a_1\boldsymbol{x}_1 \oplus \cdots \oplus a_m\boldsymbol{x}_m$ с коэффициентами $a_1,\dots,a_m \in \mathbb{X}$. Векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ являются коллинеарными, если $\boldsymbol{y} = a\boldsymbol{x}$, где $a \in \mathbb{X}$.

2.3. Спектральный радиус и собственные векторы матрицы. Число λ является собственным значением матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n\times n}$, если существует ненулевой вектор $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$, для которого выполняется равенство

$$\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}.$$

Любой ненулевой вектор $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$, удовлетворяющий этому равенству, называется собственным вектором матрицы $\boldsymbol{A}$, соответствующим собственному числу λ. Собственные векторы неразложимой матрицы являются регулярными.

Спектральным радиусом матрицы $\boldsymbol{A}$ называется ее максимальное собственное число. Если $\boldsymbol{A}$ — неразложимая матрица, то она имеет единственное собственное число $\lambda > \mathbb{0}$, которое совпадает с ее спектральным радиусом и вычисляется по формуле

$$\lambda = \mathrm{tr}\,\boldsymbol{A} \oplus \mathrm{tr}^{1/2}(\boldsymbol{A}^2) \oplus \cdots \oplus \mathrm{tr}^{1/n}(\boldsymbol{A}^n) = \bigoplus_{m=1}^{n} \mathrm{tr}^{1/m}(\boldsymbol{A}^m). \tag{1}$$

Все собственные векторы неразложимой матрицы $\boldsymbol{A}$, соответствующие ее единственному собственному числу λ, можно найти следующим путем.

Используя обозначение $\boldsymbol{A}_\lambda = \lambda^{-1}\boldsymbol{A}$, определим две матрицы («звезда» Клини и «плюс» Клини):

$$\boldsymbol{A}_\lambda^* = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{A}_\lambda \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}_\lambda^{n-1} = \bigoplus_{m=0}^{n-1} \boldsymbol{A}_\lambda^m, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{A}_\lambda^+ = \boldsymbol{A}_\lambda \boldsymbol{A}_\lambda^* = \boldsymbol{A}_\lambda \oplus \boldsymbol{A}_\lambda^2 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}_\lambda^n = \bigoplus_{m=1}^{n} \boldsymbol{A}_\lambda^m. \tag{3}$$

Пусть $\boldsymbol{a}_i^*$ обозначает столбец i матрицы $\boldsymbol{A}_\lambda^*$, а a_{ii}^+ — диагональный элемент матрицы $\boldsymbol{A}_\lambda^+$. Рассмотрим подмножество столбцов $\boldsymbol{a}_i^*$ с индексами i, для которых выполняется $a_{ii}^+ = \mathbb{1}$. Из этого подмножества выберем столбцы, которые линейно не зависят от остальных, и составим из них матрицу $\boldsymbol{A}_\lambda^\times$. Множество всех собственных векторов матрицы $\boldsymbol{A}$ совпадает с линейной оболочкой столбцов $\boldsymbol{A}_\lambda^\times$ и определяется равенством

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}_\lambda^\times \boldsymbol{v},$$

где $\boldsymbol{v}$ — любой ненулевой вектор соответствующей размерности.

3. Предварительные результаты. Приведем известные результаты тропической математики, которые будут использованы при решении задачи оптимизации в следующем разделе. Сначала предположим, что заданы матрица $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{m\times n}$ и регулярный вектор $\boldsymbol{d} \in \mathbb{X}^m$. Требуется найти все векторы $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$, удовлетворяющие неравенству

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{d}. \tag{4}$$

Решение неравенства (4) описывает следующее утверждение, полное доказательство которого приводится, например, в работе [14].

Лемма 1. *Для любой регулярной по столбцам матрицы $\boldsymbol{A}$ и регулярного вектора $\boldsymbol{d}$ все решения неравенства* (4) *имеют вид*

$$\boldsymbol{x} \leqslant (\boldsymbol{d}^- \boldsymbol{A})^-.$$

Пусть теперь задана неразложимая матрица $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n\times n}$ с собственным числом λ и необходимо найти регулярные векторы $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$, которые решают задачи

$$\min_{\boldsymbol{x}} \ \boldsymbol{x}^- \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \tag{5}$$

$$\min_{\boldsymbol{x}} \ (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^- \boldsymbol{x}. \tag{6}$$

Для решения задачи оптимизации в следующем разделе потребуется результат, который был получен для случая неразложимой матрицы в работе [20] в таком виде.

Лемма 2. *Пусть $\boldsymbol{A}$ — неразложимая матрица, λ — ее собственное число. Тогда имеют место равенства*

$$\min_{\boldsymbol{x}} \ \boldsymbol{x}^- \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda, \tag{7}$$

$$\min_{\boldsymbol{x}} \ (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^- \boldsymbol{x} = \lambda^{-1}, \tag{8}$$

причем минимумы достигаются на любом собственном векторе матрицы $\boldsymbol{A}$.

Для произвольной матрицы $\boldsymbol{A}$ решение задач (5) и (6) было найдено в [14, 21].

4. Решение задачи тропической оптимизации. В этом разделе рассматривается новая задача тропической оптимизации, которая состоит в минимизации функции, заданной в форме идемпотентного произведения целевых функций в задачах (5) и (6). Пусть $\boldsymbol{A}$ — заданная неразложимая матрица. Задача состоит в том, чтобы найти регулярные векторы $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$, на которых достигается

$$\min_{\boldsymbol{x}} \ \boldsymbol{x}^- \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^- \boldsymbol{x}. \tag{9}$$

Для решения задачи используется подход, при котором сначала строится точная нижняя оценка для целевой функции задачи, что позволяет определить минимальное значение целевой функции. Затем задача сводится к решению уравнения для целевой функции и найденного минимума, из которого находятся все решения задачи.

Следующая теорема описывает множество всех решений задачи (9).

Теорема 1. *Пусть $\boldsymbol{A}$ — неразложимая матрица со спектральным радиусом λ и $\boldsymbol{A}_\lambda = \lambda^{-1}\boldsymbol{A}$. Тогда минимум в задаче* (9) *равен $\mathbb{1}$ и достигается тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{x}$ — собственный вектор матрицы $\boldsymbol{A}$, который имеет вид*

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}_\lambda^\times \boldsymbol{v},$$

где $\boldsymbol{v}$ — любой ненулевой вектор соответствующей размерности.

Доказательство. Сначала оценим целевую функцию $\boldsymbol{x}^-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^-\boldsymbol{x}$ задачи (9) снизу. Согласно условию задачи матрица $\boldsymbol{A}$ является неразложимой, а вектор $\boldsymbol{x}$ — регулярным. Тогда векторы $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ и $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^-$ также будут регулярными и выполняется неравенство $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^- \geqslant \boldsymbol{I}$. Учитывая это неравенство, получим $\boldsymbol{x}^-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^-\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{x}^-\boldsymbol{x} = \mathbb{1}$, откуда следует, что $\mathbb{1}$ является оценкой снизу для функции $\boldsymbol{x}^-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^-\boldsymbol{x}$. Заметим, что эту оценку можно также прямо получить, используя равенства (7) и (8).

В силу того, что матрица $\boldsymbol{A}$ является неразложимой, она имеет единственное собственное число $\lambda > \mathbb{0}$ и регулярный собственный вектор $\boldsymbol{x}_0$. Подстановка $\boldsymbol{x}_0$ в целевую функцию дает $\boldsymbol{x}_0^-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0)^-\boldsymbol{x}_0 = \lambda\boldsymbol{x}_0^-\boldsymbol{x}_0(\lambda\boldsymbol{x}_0)^-\boldsymbol{x}_0 = \lambda\lambda^{-1}\boldsymbol{x}_0^-\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_0^-\boldsymbol{x}_0 = \mathbb{1}$, а это означает, что $\mathbb{1}$ является минимумом целевой функции в задаче (9).

Найдем все векторы, на которых целевая функция $\boldsymbol{x}^-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^-\boldsymbol{x}$ достигает своего минимального значения. Для этого решим уравнение

$$\boldsymbol{x}^-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^-\boldsymbol{x} = \mathbb{1} \tag{10}$$

и покажем, что, кроме собственных векторов матрицы $\boldsymbol{A}$, других решений оно не имеет.

Пусть $\boldsymbol{x}^-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \alpha$. Вектор $\boldsymbol{x}$ — регулярный, откуда следует, что $\alpha \neq \mathbb{0}$. Тогда существует α^{-1} такое, что $\alpha\alpha^{-1} = \mathbb{1}$, а из уравнения (10) вытекает, что $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^-\boldsymbol{x} = \alpha^{-1}$.

Теперь уравнение (10) можно заменить эквивалентной системой

$$\boldsymbol{x}^-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \alpha, \qquad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^-\boldsymbol{x} = \alpha^{-1}, \qquad \alpha > \mathbb{0}. \tag{11}$$

Согласно утверждению леммы 2 собственное число λ матрицы $\boldsymbol{A}$ является минимальным значением функции $\boldsymbol{x}^-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, а λ^{-1} — функции $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^-\boldsymbol{x}$. Учитывая, что тогда

$\alpha = \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geqslant \lambda$ и $\alpha^{-1} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{-}\boldsymbol{x} \geqslant \lambda^{-1}$, получим двойное неравенство $\lambda \leqslant \alpha \leqslant \lambda$, откуда следует, что $\alpha = \lambda$. Теперь система (11) приобретает вид

$$\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda, \qquad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{-}\boldsymbol{x} = \lambda^{-1}.$$

Ясно, что множество решений полученной системы совпадает с множеством решений системы неравенств

$$\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \lambda, \qquad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{-}\boldsymbol{x} \leqslant \lambda^{-1}.$$

Применение леммы 1 для решения первого неравенства относительно $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, а второго — относительно $\boldsymbol{x}$ приводит к равносильной системе неравенств $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant (\lambda^{-1}\boldsymbol{x}^{-})^{-}$ и $\boldsymbol{x} \leqslant (\lambda(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{-})^{-}$, которую можно записать в виде $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \lambda\boldsymbol{x}$ и $\lambda\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$. Тогда выполняется двойное неравенство $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \lambda\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, которое эквивалентно равенству $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$.

При условии, что λ является собственным значением матрицы $\boldsymbol{A}$, последнее равенство означает, что $\boldsymbol{x}$ — собственный вектор матрицы $\boldsymbol{A}$, соответствующий λ. Следовательно, множество решений уравнения (10) совпадает с множеством собственных векторов матрицы $\boldsymbol{A}$, которое состоит из векторов $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}_{\lambda}^{\times}\boldsymbol{v}$, где $\boldsymbol{v}$ — любой ненулевой вектор соответствующей размерности. Других решений уравнение не имеет. ■

Заметим, что вычислительная сложность полученного решения прямо определяется затратами на вычисления собственного числа λ по формуле (1) и матриц $\boldsymbol{A}_{\lambda}^{*}$ и $\boldsymbol{A}_{\lambda}^{+}$ по формулам (2) и (3), которые опираются на нахождение суммы степеней матриц. Учитывая, что произведение двух матриц порядка n требует не более $O(n^3)$ арифметических операций, вычислительная сложность нахождения суммы n степеней и самого решения не будет превосходить величины $O(n^4)$.

5. Приложение к задачам планирования. Рассмотрим пример приложения полученного выше результата к решению задач оптимального планирования [22, 23]. Предположим, что имеется проект, согласно которому необходимо выполнить n работ. Для каждой работы $i = 1, \ldots, n$ обозначим через x_i время начала работы, а через y_i — время завершения работы. Пусть a_{ij} — наименьший допустимый интервал между началом работы j и завершением i. Заданы ограничения «старт-финиш», которые определяют отношения между временем начала и временем завершения работ в форме неравенств

$$y_i \geqslant x_j + a_{ij}, \quad i,\ j = 1, \ldots, n.$$

Будем предполагать, что каждая работа завершается немедленно, как только будут выполнены ограничения «старт-финиш», наложенные на время завершения работы. Тогда хотя бы одно из неравенств должно выполняться как равенство, а все неравенства для времени завершения работы i можно объединить в виде равенства

$$y_i = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} (x_j + a_{ij}), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Для каждой работы i время рабочего цикла определено как разность $y_i - x_i$ между временем завершения и начала. Максимальный разброс времени цикла по всем работам проекта вычисляется по формуле

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} (y_i - x_i) - \min_{1 \leqslant i \leqslant n} (y_i - x_i) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (y_i - x_i) + \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i - y_i).$$

Задача планирования в соответствии с критерием минимума максимального разброса времени цикла формулируется как задача нахождения времени начала x_i и времени завершения y_i для каждой работы $i = 1, \ldots, n$, при которых достигается минимум

$$\begin{aligned} \min_{x_1,\ldots,x_n} \quad & \left(\max_{1\leqslant i\leqslant n} (y_i - x_i) + \max_{1\leqslant i\leqslant n} (x_i - y_i) \right), \\ & y_i = \max_{1\leqslant j\leqslant n} (x_j + a_{ij}), \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Эту задачу можно сформулировать как задачу линейного программирования и решить с помощью подходящего численного алгоритма, например, симплекс-алгоритма. Такой подход, однако, не позволяет получить все решения в аналитическом виде в замкнутой форме, удобной для формального анализа и непосредственных вычислений.

Чтобы построить аналитическое решение, запишем задачу в терминах идемпотентного полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$. Введем следующие векторы и матрицу:

$$\boldsymbol{x} = (x_i), \qquad \boldsymbol{y} = (y_i), \qquad \boldsymbol{A} = (a_{ij}).$$

Тогда задача записывается в виде

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \quad & \boldsymbol{y}^- \boldsymbol{x} \boldsymbol{x}^- \boldsymbol{y}, \\ & \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

С помощью подстановки $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ получаем задачу без ограничений

$$\min_{\boldsymbol{x}} \ \boldsymbol{x}^- \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^- \boldsymbol{x},$$

полное решение которой дает теорема 1.

Пример 1. Для иллюстрации найденного решения рассмотрим следующий пример. Пусть имеется проект, состоящий из $n = 3$ работ, связанных ограничениями «старт-финиш», которые задаются матрицей

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 37 \\ 25 & 31 & 43 \\ 25 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Используя арифметику полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$, найдем спектральный радиус λ матрицы $\boldsymbol{A}$ по формуле (1). Для этого сначала вычислим матрицы

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 62 & 42 & 43 \\ 68 & 62 & 74 \\ 30 & 36 & 62 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^3 = \begin{pmatrix} 68 & 73 & 99 \\ 99 & 93 & 105 \\ 87 & 67 & 79 \end{pmatrix}.$$

После определения следов матрицы $\boldsymbol{A}$ и ее степеней

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{A} = 31, \quad \operatorname{tr} \boldsymbol{A}^2 = 62, \quad \operatorname{tr} \boldsymbol{A}^3 = 93$$

находим спектральный радиус в виде

$$\lambda = \operatorname{tr} \boldsymbol{A} \oplus \operatorname{tr}^{1/2}(\boldsymbol{A}^2) \oplus \operatorname{tr}^{1/3}(\boldsymbol{A}^3) = 31.$$

Теперь составим матрицу $\boldsymbol{A}_\lambda = \lambda^{-1}\boldsymbol{A}$ и возведем ее в квадрат:

$$\boldsymbol{A}_\lambda = \begin{pmatrix} -27 & -31 & 6 \\ -6 & 0 & 12 \\ -6 & -26 & -30 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_\lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -20 & -19 \\ 6 & 0 & 12 \\ -32 & -26 & 0 \end{pmatrix}.$$

По формулам (2) и (3) вычислим матрицы

$$\boldsymbol{A}_\lambda^* = \boldsymbol{A}_\lambda^+ = \begin{pmatrix} 0 & -20 & 6 \\ 6 & 0 & 12 \\ -6 & -26 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что все столбцы матрицы $\boldsymbol{A}_\lambda^+$ имеют $0 = \mathbb{1}$ на диагонали. Учитывая, что третий столбец коллинеарен (в смысле полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$) первому, его можно отбросить.

Составляя матрицу $\boldsymbol{A}_\lambda^\times$ из первых двух столбцов матрицы $\boldsymbol{A}_\lambda^+$, получим решение задачи в векторной форме

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}_\lambda^\times \boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{A}_\lambda^\times = \begin{pmatrix} 0 & -20 \\ 6 & 0 \\ -6 & -26 \end{pmatrix},$$

где вектор $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)^T$ может быть выбран произвольно.

Переходя к обычной записи, запишем координаты вектора $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ в следующем виде:

$$x_1 = \max(v_1, v_2 - 20), \qquad x_2 = \max(v_1 + 6, v_2), \qquad x_3 = \max(v_1 - 6, v_2 - 26).$$

6. Заключение. В работе рассмотрена новая задача тропической оптимизации, в которой требуется минимизировать функцию, заданную при помощи неразложимой матрицы на множестве векторов над идемпотентным полуполем. Показано, что все решения задачи являются собственными векторами матрицы, соответствующими ее спектральному радиусу, и могут быть представлены в компактной векторной форме, удобной для формального анализа и непосредственных вычислений с невысокой вычислительной сложностью. Полученный результат использован для прямого решения в явном виде задачи оптимального планирования сроков выполнения проекта. Такое аналитическое решение дополняет и расширяет возможности существующих алгоритмических методов решения задач планирования, и будет полезным, когда алгоритмическое численное решение задачи по тем или иным причинам оказывается непригодным или невозможным.

Для дальнейшего исследования представляет интерес построение решения задачи при условии дополнительных ограничений и более сложной целевой функции.

Авторы благодарят рецензентов за ряд важных замечаний и предложений, которые были учтены при подготовке окончательного варианта статьи.

Литература

1. *Pandit S. N. N.* A new matrix calculus // J. SIAM. 1961. Vol. 9, N 4. P. 632–639. https://doi.org/10.1137/0109052

2. *Cuninghame-Green R. A.* Describing industrial processes with interference and approximating their steady-state behaviour // Oper. Res. Quart. 1962. Vol. 13, N 1. P. 95–100. https://doi.org/10.2307/3007584

3. *Vorob'ev N. N.* The extremal matrix algebra // Soviet Math. Dokl. 1963. Vol. 4, N 5. P. 1220–1223.

4. *Romanovskiĭ I. V.* Asymptotic behavior of dynamic programming processes with a continuous set of states // Soviet Math. Dokl. 1964. Vol. 5, N 6. P. 1684–1687.

5. *Cuninghame-Green R. A.* Minimax Algebra. In: Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Vol. 166. Berlin: Springer, 1979. https://doi.org/10.1007/978-3-642-48708-8

6. *Zimmermann U.* Linear and Combinatorial Optimization in Ordered Algebraic Structures. In: Annals of Discrete Mathematics. Vol. 10. Amsterdam: Elsevier, 1981.

7. *Маслов В. П., Колокольцов В. Н.* Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: Физматлит, 1994.

8. *Heidergott B., Olsder G. J., van der Woude J.* Max Plus at Work. In: Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 2006.

9. *Кривулин Н. К.* Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009.

10. *Butkovič P.* Max-linear Systems. In: Springer Monographs in Mathematics. London: Springer, 2010. https://doi.org/10.1007/978-1-84996-299-5

11. *Clark W., Polakov W. N., Trabold F. W.* The Gantt Chart. In: Ronald Manufacturing Management and Administration Series. New York: Ronald Press Company, 1922.

12. *Kelley J. E.* Critical-path planning and scheduling: mathematical basis // Oper. Res. 1961. Vol. 9, N 3. P. 296–320. https://doi.org/10.1287/opre.9.3.296

13. *Malcolm D. G., Roseboom J. H., Clark C. E., Fazar W.* Application of a technique for research and development program evaluation // Oper. Res. 1959. Vol. 7, N 5. P. 646–669. https://doi.org/10.1287/opre.7.5.646

14. *Krivulin N.* Extremal properties of tropical eigenvalues and solutions to tropical optimization problems // Linear Algebra Appl. 2015. Vol. 468. P. 211–232. https://doi.org/10.1016/j.laa.2014.06.044

15. *Krivulin N.* A multidimensional tropical optimization problem with nonlinear objective function and linear constraints // Optimization. 2015. Vol. 64, N 5. P. 1107–1129. https://doi.org/10.1080/02331934.2013.840624

16. *Krivulin N.* Tropical optimization problems with application to project scheduling with minimum makespan // Ann. Oper. Res. 2017. Vol. 256, N 1. P. 75–92. https://doi.org/10.1007/s10479-015-1939-9

17. *Krivulin N.* Tropical optimization problems in time-constrained project scheduling // Optimization. 2017. Vol. 66, N 2. P. 205–224. https://doi.org/10.1080/02331934.2016.1264946

18. *Elsner L., van den Driessche P.* Max-algebra and pairwise comparison matrices // Linear Algebra Appl. 2004. Vol. 385, N 1. P. 47–62. https://doi.org/10.1016/S0024-3795(03)00476-2

19. *Elsner L., van den Driessche P.* Max-algebra and pairwise comparison matrices, II // Linear Algebra Appl. 2010. Vol. 432, N 4. P. 927–935. https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.10.005

20. *Krivulin N. K.* Eigenvalues and eigenvectors of matrices in idempotent algebra // Vestnik St. Petersburg Univ.: Math. 2006. Vol. 39, N 2. P. 72–83.

21. *Krivulin N.* Complete algebraic solution of multidimensional optimization problems in tropical semifield // J. Log. Algebr. Methods Program. 2018. Vol. 99. P. 26–40. https://doi.org/10.1016/j.jlamp.2018.05.002

22. *Demeulemeester E. L., Herroelen W. S.* Project Scheduling. New York: Springer, 2002. https://doi.org/10.1007/b101924

23. *Neumann K., Schwindt C., Zimmermann J.* Project Scheduling with Time Windows and Scarce Resources. 2nd ed. Berlin: Springer, 2003. https://doi.org/10.1007/978-3-540-24800-2

Статья поступила в редакцию 19 ноября 2018 г.;
после доработки 6 февраля 2019 г.;
рекомендована в печать 21 марта 2019 г.

Контактная информация:

Кривулин Николай Кимович — д-р физ.-мат. наук, проф.; nkk@math.spbu.ru
Баско Ульяна Львовна — студент; ulyana.basko@yandex.ru

Solving a tropical optimization problem with application to optimal scheduling*

N. K. Krivulin, U. L. Basko

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Krivulin N. K., Basko U. L. Solving a tropical optimization problem with application to optimal scheduling. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2019, vol. 6 (64), issue 3, pp. 440–451. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.309 (In Russian)

A multidimensional optimization problem is considered, which is formulated and solved in terms of tropical mathematics focused on the theory and applications of semirings with idempotent addition. To solve the problem, which has an objective function given by a matrix, methods and results of idempotent algebra and tropical optimization are used. A strict lower bound for the objective function of the problem is first derived to allow the evaluation of the minimum value of the objective function. Then, an equation is formed and solved for the objective function and its minimum value, from which a complete solution is obtained in the form of all eigenvectors of the matrix in the problem. As an application of the result obtained, an explicit solution is given to the problem of optimal scheduling of a project that consists of a set of activities to be done under given constraints on the start and finish times of the activities. The optimality criterion for scheduling is defined as the minimum of maximal deviation, over all activities, of the working cycle time, which is given by the time interval between start and finish of the activity. The analytical result obtained extends and supplements the existing algorithmic numerical solutions to optimal scheduling problems. An example is presented to illustrate application of the result with a scheduling problem for a project consisting of three activities.

Keywords: idempotent semifield, (max, +)-algebra, eigenvalue and eigenvector of matrix, tropical optimization, scheduling problem.

References

1. Pandit S. N. N., “A new matrix calculus”, *J. SIAM* **9** (4), 632–639 (1961). https://doi.org/10.1137/0109052

2. Cuninghame-Green R. A., “Describing industrial processes with interference and approximating their steady-state behaviour”, *Oper. Res. Quart.* **13**(1), 95–100 (1962). https://doi.org/10.2307/3007584

3. Vorob’ev N. N., “The extremal matrix algebra”, *Soviet Math. Dokl.* **4**(5), 1220–1223 (1963).

4. Romanovskiĭ I. V., “Asymptotic behavior of dynamic programming processes with a continuous set of states”, *Soviet Math. Dokl.* **5**(6), 1684–1687 (1964).

5. Cuninghame-Green R. A., *Minimax Algebra*, in *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* **166** (Springer, Berlin, 1979). https://doi.org/10.1007/978-3-642-48708-8.

6. Zimmermann U., *Linear and Combinatorial Optimization in Ordered Algebraic Structures*, in *Annals of Discrete Mathematics* **10** (Elsevier, Amsterdam, 1981).

7. Maslov V. P., Kolokoltsov V. N., *Idempotent Analysis and Its Applications to Optimal Control Theory* (Nauka Publ., Moscow, 1994). (In Russian)

8. Heidergott B., Olsder G. J., van der Woude J., *Max Plus at Work*, in *Princeton Series in Applied Mathematics* (Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2006).

9. Krivulin N. K., *Methods of idempotent algebra for problems in modeling and analysis of complex systems* (Saint Petersburg Univ. Publ., Saint Petersburg, 2009). (In Russian)

10. Butkovič P., *Max-linear Systems*, in *Springer Monographs in Mathematics* (Springer, London, 2010). https://doi.org/10.1007/978-1-84996-299-5

11. Clark W., Polakov W. N., Trabold F. W., *The Gantt Chart*, in *Ronald Manufacturing Management and Administration Series* (Ronald Press Company, New York, 1922).

*The work is supported by Russian Foundation for Basic Research (project N 18-010-00723).

12. Kelley J. E., “Critical-path planning and scheduling: mathematical basis”, *Oper. Res.* **9**(3), 296–320 (1961). https://doi.org/10.1287/opre.9.3.296

13. Malcolm D. G., Roseboom J. H., Clark C. E., Fazar W., “Application of a technique for research and development program evaluation”, *Oper. Res.* **7**(5), 646–669 (1959). https://doi.org/10.1287/opre.7.5.646

14. Krivulin N., “Extremal properties of tropical eigenvalues and solutions to tropical optimization problems”, *Linear Algebra Appl.* **468**, 211–232 (2015). https://doi.org/10.1016/j.laa.2014.06.044

15. Krivulin N., “A multidimensional tropical optimization problem with nonlinear objective function and linear constraints”, *Optimization* **64**(5), 1107–1129 (2015). https://doi.org/10.1080/02331934.2013.840624

16. Krivulin N., “Tropical optimization problems with application to project scheduling with minimum makespan”, *Ann. Oper. Res.* **256**(1), 75–92 (2017). https://doi.org/10.1007/s10479-015-1939-9

17. Krivulin N., “Tropical optimization problems in time-constrained project scheduling”, *Optimization* **66**(2), 205–224 (2017). https://doi.org/10.1080/02331934.2016.1264946

18. Elsner L., van den Driessche P., “Max-algebra and pairwise comparison matrices”, *Linear Algebra Appl.* **385**(1), 47–62 (2004). https://doi.org/10.1016/S0024-3795(03)00476-2

19. Elsner L., van den Driessche P., “Max-algebra and pairwise comparison matrices, II”, *Linear Algebra Appl.* **432**(4), 927–935 (2010). https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.10.005

20. Krivulin N. K., “Eigenvalues and eigenvectors of matrices in idempotent algebra”, *Vestnik St. Petersburg Univ.: Math.* **39**(2), 72–83 (2006).

21. Krivulin N., “Complete algebraic solution of multidimensional optimization problems in tropical semifield”, *J. Log. Algebr. Methods Program.* **99**, 26–40 (2018). https://doi.org/10.1016/j.jlamp.2018.05.002

22. Demeulemeester E. L., Herroelen W. S., *Project Scheduling* (Springer, New York, 2002). https://doi.org/10.1007/b101924

23. Neumann K., Schwindt C., Zimmermann J., *Project Scheduling with Time Windows and Scarce Resources* (2nd ed., Springer, Berlin, 2003). https://doi.org/10.1007/978-3-540-24800-2

Received: November 19, 2018
Revised: February 6, 2019
Accepted: March 21, 2019

Author’s information:

Nikolai K. Krivulin — nkk@math.spbu.ru
Ulyana L. Basko — ulyana.basko@yandex.ru