

## МЕХАНИКА

УДК 531.36:62-565

MSC 70E55

**Динамика статически неуравновешенного ротора с эллиптическим шаровым автобалансирующим устройством***В. Г. Быков, А. С. Ковачев*Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** *Быков В. Г., Ковачев А. С.* Динамика статически неуравновешенного ротора с эллиптическим шаровым автобалансирующим устройством // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 3. С. 452–462. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.310>

Исследуется вопрос о влиянии эллиптичности беговой дорожки шарового автобалансирующего устройства (АБУ) на динамику статически неуравновешенного симметрично закрепленного ротора. На основе анализа стационарных и нестационарных режимов движения системы показано, что отклонение формы беговой дорожки шарового АБУ от идеальной окружности может приводить к потере функциональности АБУ.

*Ключевые слова:* статически неуравновешенный ротор, эллиптическое шаровое автобалансирующее устройство.

Динамика и устойчивость роторов, оснащенных шаровыми автобалансирующими устройствами (АБУ), при воздействии различных внешних возмущающих факторов рассматривалась в работах [1–6]. В ряде работ учитывалось также влияние неидеальности самих шаровых АБУ. Так, в работах [7–13] изучалось влияние эксцентриситета беговой дорожки АБУ, а в работе [9] кратко рассматривался случай ее эллиптичности. В настоящей работе вопрос о влиянии эллиптичности беговой дорожки исследуется более детально.

**1. Механическая модель.** На рис. 1, *a* представлена модель статически неуравновешенного ротора Джеффкота в виде массивного диска, закрепленного на

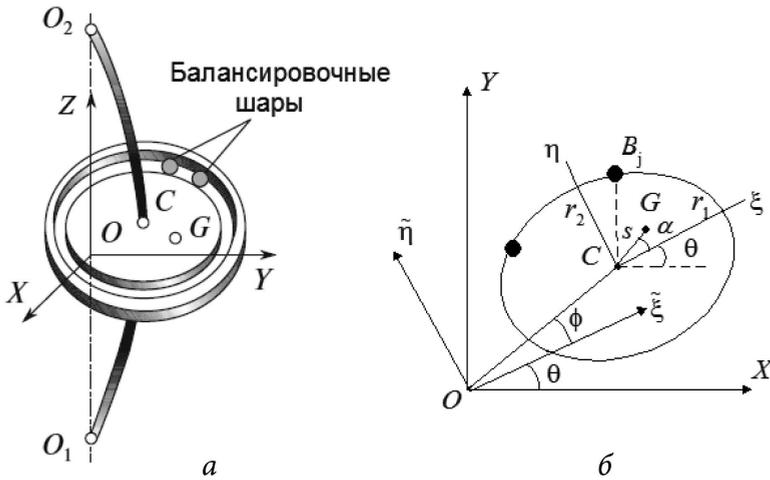


Рис. 1. Неуравновешенный ротор с шаровым АБУ.

невесомом упругом вале, вращающемся в вертикальных шарнирных опорах  $O_1$  и  $O_2$ . Предполагается, что ротор оснащен шаровым АБУ, внутренняя полость (беговая дорожка) которого имеет форму не идеальной окружности, а эллипса с полуосями  $r_1$  и  $r_2$ . Обозначим через  $C$  точку крепления диска к валу,  $G$  — центр масс диска,  $s = |CG|$  — величину и  $\alpha$  — фазовый угол статического эксцентриситета. Для определения положения ротора и балансировочных шаров введем три системы координат: неподвижную  $OXYZ$ , жестко связанную с ротором  $C\xi\eta$  и вращающуюся  $O\tilde{\xi}\tilde{\eta}$ . Оси связанной системы координат направим вдоль осей эллипса беговой дорожки АБУ, а оси вращающейся системы направим параллельно соответствующим осям связанной системы, как показано на рис. 1, б. Угол поворота между осями  $OX$  и  $C\xi$  обозначим через  $\theta$ .

Если предположить, что угловая скорость ротора  $\omega = \dot{\theta}(t)$  изменяется со временем по заданному закону, а движение диска происходит только в плоскости статического эксцентриситета, то описанная механическая модель будет иметь  $n + 2$  степени свободы, где  $n$  — число балансировочных шаров, которые рассматриваются как материальные точки. Выберем в качестве обобщенных координат абсолютные координаты  $x$  и  $y$  точки  $C$  в неподвижной системе и относительные координаты балансировочных шаров  $\xi_j$  и  $\eta_j$ , удовлетворяющие уравнениям голономных связей

$$f_j = \frac{\xi_j^2}{r_1^2} + \frac{\eta_j^2}{r_2^2} - 1 = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Выразим абсолютные координаты точек  $G$  и  $B_j$  через введенные обобщенные координаты:

$$\begin{aligned} x_G &= x + s \cos(\theta + \alpha), & x_{B_j} &= x + \xi_j \cos \theta - \eta_j \sin \theta, \\ y_G &= y + s \sin(\theta + \alpha), & y_{B_j} &= y + \xi_j \sin \theta + \eta_j \cos \theta, \end{aligned} \quad (2)$$

и запишем выражения для кинетической и потенциальной энергии системы:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_b \sum_{j=1}^n (\dot{x}_{B_j}^2 + \dot{y}_{B_j}^2), \quad V = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2), \quad (3)$$

где  $m$  и  $I_G$  — масса и момент инерции диска,  $m_b$  — масса балансировочного шара,  $k$  — коэффициент упругости вала.

Полагая, что на ротор действуют только силы внешнего вязкого демпфирования, а балансировочные шары движутся в вязкой среде, запишем выражение для диссипативной функции Релея

$$D = \frac{1}{2}c_n(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}c_b \sum_{j=1}^n (\dot{\xi}_j^2 + \dot{\eta}_j^2), \quad (4)$$

где  $c_n$  — коэффициент сопротивления поперечному движению диска, а  $c_b$  — коэффициент сопротивления движению балансировочных шаров в обойме АБУ.

Для построения математической модели системы воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода с неопределенными множителями  $\lambda_j$ , отвечающими уравнениям дополнительных связей (1):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n+2, \quad (5)$$

где  $q_1 = x$ ,  $q_2 = y$ ,  $q_{2j+1} = \xi_j$ ,  $q_{2j+2} = \eta_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Уравнения (5) с учетом выражений (1)–(4) имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} (m + nm_b)\ddot{x} + c_n\dot{x} + kx = ms(\dot{\theta}^2 \cos(\theta + \alpha) + \ddot{\theta} \sin(\theta + \alpha)) - \\ - m_b \sum_{j=1}^n ((\ddot{\xi}_j - \dot{\theta}^2 \xi_j - 2\dot{\theta}\dot{\eta}_j - \ddot{\theta}\eta_j) \cos \theta - (\ddot{\eta}_j - \dot{\theta}^2 \eta_j + 2\dot{\theta}\dot{\xi}_j + \ddot{\theta}\xi_j) \sin \theta), \\ (m + nm_b)\ddot{y} + c_n\dot{y} + ky = ms(\dot{\theta}^2 \sin(\theta + \alpha) - \ddot{\theta} \cos(\theta + \alpha)) - \\ - m_b \sum_{j=1}^n ((\ddot{\xi}_j - \dot{\theta}^2 \xi_j - 2\dot{\theta}\dot{\eta}_j - \ddot{\theta}\eta_j) \sin \theta + (\ddot{\eta}_j - \dot{\theta}^2 \eta_j + 2\dot{\theta}\dot{\xi}_j + \ddot{\theta}\xi_j) \cos \theta), \\ m_b\ddot{\xi}_j + c_b\dot{\xi}_j - m_b(2\dot{\theta}\dot{\eta}_j + \dot{\theta}^2 \xi_j + \ddot{\theta}\eta_j) = -m_b(\ddot{x} \cos \theta + \ddot{y} \sin \theta) + \lambda_j \frac{2\xi_j}{r_1^2}, \\ m_b\ddot{\eta}_j + c_b\dot{\eta}_j + m_b(2\dot{\theta}\dot{\xi}_j + \dot{\theta}^2 \eta_j + \ddot{\theta}\xi_j) = m_b(\ddot{x} \sin \theta - \ddot{y} \cos \theta) + \lambda_j \frac{2\eta_j}{r_2^2}, \quad j = 1, \dots, n, \end{array} \right. \quad (6)$$

и совместно с уравнениями связей (1) образуют замкнутую систему  $3n+2$  уравнений относительно  $2n+2$  обобщенных координат и  $n$  множителей Лагранжа.

Исключая из  $2n$  уравнений системы (6), описывающих движение балансировочных шаров, неопределенные множители  $\lambda_j$ , получим систему  $n+2$  уравнений,

которую представим в безразмерной форме:

$$\left\{ \begin{aligned} (1+n\chi)(\ddot{x} + \delta_n \dot{x} + \bar{x}) &= \varepsilon(\dot{\theta}^2 \cos(\theta + \alpha) + \ddot{\theta} \sin(\theta + \alpha)) - \\ &- \chi \sum_{j=1}^n ((\ddot{\xi}_j - \dot{\theta}^2 \bar{\xi}_j - 2\dot{\theta} \dot{\eta}_j - \ddot{\theta} \bar{\eta}_j) \cos \theta - (\ddot{\eta}_j - \dot{\theta}^2 \bar{\eta}_j + 2\dot{\theta} \dot{\xi}_j + \ddot{\theta} \bar{\xi}_j) \sin \theta), \\ (1+n\chi)(\ddot{y} + \delta_n \dot{y} + \bar{y}) &= \varepsilon(\dot{\theta}^2 \sin(\theta + \alpha) - \ddot{\theta} \cos(\theta + \alpha)) - \\ &- \chi \sum_{j=1}^n ((\ddot{\xi}_j - \dot{\theta}^2 \bar{\xi}_j - 2\dot{\theta} \dot{\eta}_j - \ddot{\theta} \bar{\eta}_j) \sin \theta + (\ddot{\eta}_j + \dot{\theta}^2 \bar{\eta}_j + 2\dot{\theta} \dot{\xi}_j + \ddot{\theta} \bar{\xi}_j) \cos \theta), \\ \rho_1^2 \bar{\eta}_j (\ddot{\xi}_j + \delta_b \dot{\xi}_j - 2\dot{\theta} \dot{\eta}_j - \dot{\theta}^2 \bar{\xi}_j - \ddot{\theta} \bar{\eta}_j + \bar{x} \cos \theta + \bar{y} \sin \theta) &= \\ = \rho_2^2 \bar{\xi}_j (\ddot{\eta}_j + \delta_b \dot{\eta}_j + 2\dot{\theta} \dot{\xi}_j - \dot{\theta}^2 \bar{\eta}_j + \ddot{\theta} \bar{\xi}_j + \bar{y} \cos \theta - \bar{x} \sin \theta), & j=1, \dots, n, \end{aligned} \right. \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{r}, \quad \bar{y} = \frac{y}{r}, \quad \bar{\xi}_j = \frac{\xi_j}{r}, \quad \bar{\eta}_j = \frac{\eta_j}{r}, \quad \bar{t} = \Omega t, \quad \Omega = \sqrt{\frac{k}{m + nm_b}}, \\ \chi &= \frac{m_b}{m}, \quad \varepsilon = \frac{s}{r}, \quad \delta_n = \frac{c_n}{(m + nm_b)\Omega}, \quad \delta_b = \frac{c_b}{m_b\Omega}, \quad \rho_1 = \frac{r_1}{r}, \quad \rho_2 = \frac{r_2}{r}, \\ r &= \frac{r_1 + r_2}{2} \text{ — масштабный коэффициент.} \end{aligned}$$

Замкнутую и пригодную для численного интегрирования систему  $2n+2$  дифференциальных уравнений второго порядка получим, добавив к системе (7)  $n$  дважды продифференцированных уравнений связей

$$\rho_2^2 (\dot{\xi}_j^2 + \bar{\xi}_j \ddot{\xi}_j) + \rho_1^2 (\dot{\eta}_j^2 + \bar{\eta}_j \ddot{\eta}_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (8)$$

Далее для простоты черту над безразмерными переменными писать не будем.

**2. Стационарные режимы движения.** Рассмотрим вращение ротора с постоянной безразмерной угловой скоростью  $\dot{\theta} = \nu = \text{const}$ . Вводя комплексные переменные  $z = x + iy$  и  $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , запишем первые два уравнения системы (7) в виде одного уравнения в комплексной форме:

$$(1 + n\chi)(\ddot{z} + \delta_n \dot{z} + z) = \varepsilon \nu^2 e^{i(\nu t + \alpha)} - \chi \sum_{j=1}^n (\ddot{\zeta}_j - \nu^2 \zeta_j + 2i\nu \dot{\zeta}_j) e^{i\nu t}. \quad (9)$$

В уравнении (9) переменная  $z$  задает положение точки  $C$  в неподвижной системе координат. Используя экспоненциальную форму записи, представим ее виде

$$z = ae^{i(\nu t + \phi)} = \tilde{z} e^{i\nu t},$$

где  $\tilde{z} = ae^{i\phi} = \tilde{\xi} + i\tilde{\eta}$  — комплексная переменная, описывающая положение точки  $C$  во вращающейся системе координат  $O\tilde{\xi}\tilde{\eta}$ . Переходя в системе (7) к новым безразмерным переменным  $\tilde{\xi}$  и  $\tilde{\eta}$ , получим автономную систему уравнений, удобную для

исследования стационарных режимов движения ротора:

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{\xi} + \delta_n \dot{\xi} - 2\nu \dot{\eta} + (1 - \nu^2) \tilde{\xi} - \nu \delta_n \tilde{\eta} &= \frac{1}{1 + n\chi} \left( \varepsilon \nu^2 \cos \alpha - \chi \sum_{j=1}^n (\ddot{\xi}_j - \nu^2 \xi_j - 2\nu \dot{\eta}_j) \right), \\ \ddot{\eta} + \delta_n \dot{\eta} + 2\nu \dot{\xi} + (1 - \nu^2) \tilde{\eta} + \nu \delta_n \tilde{\xi} &= \frac{1}{1 + n\chi} \left( \varepsilon \nu^2 \sin \alpha - \chi \sum_{j=1}^n (\ddot{\eta}_j - \nu^2 \eta_j + 2\nu \dot{\xi}_j) \right), \\ \rho_1^2 \eta_j (\ddot{\xi}_j + \delta_b \dot{\xi}_j - \nu(2\dot{\eta}_j + \nu \xi_j) + \ddot{\xi} - 2\nu \dot{\eta} - \nu^2 \tilde{\xi}) &= \\ = \rho_2^2 \xi_j (\ddot{\eta}_j + \delta_b \dot{\eta}_j + \nu(2\dot{\xi}_j - \nu \eta_j) + \ddot{\eta} - 2\nu \dot{\xi} - \nu^2 \tilde{\eta}), & \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \right. \quad (10)$$

Подставив в систему (10) и уравнения связей (1) стационарные решения вида  $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_c = \text{const}$ ,  $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}_c = \text{const}$ ,  $\xi_j = \xi_{j0} = \text{const}$  и  $\eta_j = \eta_{j0} = \text{const}$ , получим замкнутую систему  $2n + 2$  алгебраических уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} (1 + 2\chi)((1 - \nu^2)\tilde{\xi}_c - \nu \delta_n \tilde{\eta}_c) &= \nu^2 \left( \varepsilon \cos \alpha + \chi \sum_{j=1}^n \xi_{j0} \right), \\ (1 + 2\chi)(\nu \delta_n \tilde{\xi}_c + (1 - \nu^2)\tilde{\eta}_c) &= \nu^2 \left( \varepsilon \sin \alpha + \chi \sum_{j=1}^n \eta_{j0} \right), \\ \rho_1^2 \eta_{j0} \tilde{\xi}_c - \rho_2^2 \xi_{j0} \tilde{\eta}_c &= (\rho_2^2 - \rho_1^2) \xi_{j0} \eta_{j0}, \quad j = 1, \dots, n, \\ \rho_2^2 \xi_{j0}^2 + \rho_1^2 \eta_{j0}^2 &= \rho_1^2 \rho_2^2, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \right. \quad (11)$$

При  $n = 2$  система (11) представляет собой шесть уравнений, описывающих стационарные режимы движения ротора в случае АБУ с двумя балансировочными шарами. Исследуем ее подробно и, прежде всего, выясним вопрос о существовании полностью сбалансированного режима. Подставляя в первые четыре уравнения  $\tilde{\xi}_c = \tilde{\eta}_c = 0$ , получаем

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon \cos \alpha + \chi(\xi_{10} + \xi_{20}) &= 0, \\ \varepsilon \sin \alpha + \chi(\eta_{10} + \eta_{20}) &= 0, \\ (\rho_2^2 - \rho_1^2)\xi_{10}\eta_{10} &= 0, \\ (\rho_2^2 - \rho_1^2)\xi_{20}\eta_{20} &= 0. \end{aligned} \right. \quad (12)$$

В случае «идеального» АБУ, когда  $\rho_1 = \rho_2 = 1$ , третье и четвертое уравнения (12) удовлетворяются тождественно, а первое и второе совместно с уравнениями связей образуют замкнутую систему уравнений. При этом, поскольку оси  $\xi$  и  $\eta$  связанной системы координат в этом случае могут быть направлены произвольно, то, не умаляя общности, можно положить  $\alpha = 0$ . В результате получаем систему

$$\left\{ \begin{aligned} \xi_{10} + \xi_{20} &= -\varepsilon/\chi, \\ \eta_{10} + \eta_{20} &= 0, \\ \xi_{10}^2 + \eta_{10}^2 &= 1, \\ \xi_{20}^2 + \eta_{20}^2 &= 1, \end{aligned} \right. \quad (13)$$

которая имеет единственное решение

$$\xi_{10} = \xi_{20} = -\frac{\varepsilon}{2\chi}, \quad \eta_{10} = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4\chi^2}} = -\eta_{20}, \quad (14)$$

отвечающее полностью сбалансированному собственному вращению ротора.

В случае эллиптического АБУ имеем  $\rho_1 \neq \rho_2$ , поэтому, объединяя уравнения (13) с уравнениями связей, получаем систему из шести уравнений относительно четырех неизвестных:

$$\begin{cases} \xi_{10} + \xi_{20} = -\frac{\varepsilon}{\chi} \cos \alpha, \\ \eta_{10} + \eta_{20} = -\frac{\varepsilon}{\chi} \sin \alpha, \\ \xi_{10}\eta_{10} = 0, \\ \xi_{20}\eta_{20} = 0, \\ \rho_2^2 \xi_{10}^2 + \rho_1^2 \eta_{10}^2 = \rho_1^2 \rho_2^2, \\ \rho_2^2 \xi_{20}^2 + \rho_1^2 \eta_{20}^2 = \rho_1^2 \rho_2^2. \end{cases} \quad (15)$$

Система (15) переопределена и имеет решения вида

$$\begin{cases} \{\xi_{10} = 0, \eta_{10} = \pm\rho_2, \xi_{20} = \pm\rho_1, \eta_{20} = 0\}, \\ \{\xi_{10} = \pm\rho_1, \eta_{10} = 0, \xi_{20} = 0, \eta_{20} = \pm\rho_2\} \end{cases} \quad (16)$$

только при выполнении дополнительных условий

$$\begin{cases} |\alpha| = \arctg \frac{\rho_2}{\rho_1}, \\ \chi = \frac{\varepsilon}{\rho_1^2 + \rho_2^2}. \end{cases} \quad (17)$$

Решения (16) имеют простое физическое объяснение. В случае, когда диск ротора полностью уравновешен, точка  $C$  — центр эллиптической обоймы АБУ — лежит на оси вращения. Но тогда положение равновесия балансировочных шаров может быть только в вершинах эллипса, так как в противном случае шары будут двигаться под действием касательных составляющих центробежных сил. Однако особого смысла решения (16) не имеют, поскольку условия (17) не выполнимы для произвольного дисбаланса. Следовательно, мы можем констатировать, что полностью сбалансированный режим в случае эллиптического АБУ практически нереализуем.

Исследуем теперь вопрос о существовании несбалансированных стационарных режимов движения ротора. Полагая, что амплитуда  $a = \sqrt{\tilde{\xi}_c^2 + \tilde{\eta}_c^2}$  установившегося прецессионного движения точки  $C$  не равна нулю, преобразуем последние четыре уравнения системы (12) следующим образом: умножим третье уравнение на  $\xi_{20}\eta_{20}$  и вычтем из него четвертое уравнение, умноженное на  $\xi_{10}\eta_{10}$ , а также вычтем из пятого уравнения шестое. В результате получим два уравнения

$$\begin{cases} \rho_1^2 \tilde{\xi}_c (\xi_{20} - \xi_{10}) \eta_{10} \eta_{20} = \rho_2^2 \tilde{\eta}_c (\eta_{20} - \eta_{10}) \xi_{10} \xi_{20}, \\ \rho_2^2 (\xi_{10}^2 - \xi_{20}^2) + \rho_1^2 (\eta_{10}^2 - \eta_{20}^2) = 0, \end{cases} \quad (18)$$

которые удовлетворяются тождественно при условии

$$\xi_{10} = \xi_{20} = \xi_0, \quad \eta_{10} = \eta_{20} = \eta_0. \quad (19)$$

Поскольку в рассматриваемой модели АБУ мы пренебрегаем размерами балансиروчных шаров, то условие (19) означает, что два шара соприкасаются друг с другом.

Подставляя соотношения (19) в систему (12), запишем ее в виде

$$\begin{cases} p_1 \tilde{\xi}_c - p_2 \tilde{\eta}_c = \varepsilon \cos \alpha + 2\chi \xi_0, \\ p_2 \tilde{\xi}_c + p_1 \tilde{\eta}_c = \varepsilon \sin \alpha + 2\chi \eta_0, \\ \rho_1^2 \eta_0 \tilde{\xi}_c - \rho_2^2 \xi_0 \tilde{\eta}_c = (\rho_2^2 - \rho_1^2) \xi_0 \eta_0, \\ \rho_2^2 \xi_0^2 + \rho_1^2 \eta_0^2 = \rho_1^2 \rho_2^2, \end{cases} \quad (20)$$

где

$$p_1 = (1 + 2\chi) \frac{1 - \nu^2}{\nu^2}, \quad p_2 = (1 + 2\chi) \frac{\delta_n}{\nu}.$$

Выражая из первых двух уравнений (19) переменные  $\tilde{\xi}_c$  и  $\tilde{\eta}_c$  через  $\xi_0$  и  $\eta_0$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_c &= \frac{\varepsilon(p_1 \cos \alpha + p_2 \sin \alpha) + 2\chi(p_1 \xi_0 + p_2 \eta_0)}{p_1^2 + p_2^2}, \\ \tilde{\eta}_c &= \frac{\varepsilon(p_1 \sin \alpha - p_2 \cos \alpha) + 2\chi(p_1 \eta_0 - p_2 \xi_0)}{p_1^2 + p_2^2}, \end{aligned} \quad (21)$$

и подставляя формулы (21) в третье уравнение (20), получим систему двух уравнений второго порядка относительно переменных  $\xi_0$  и  $\eta_0$

$$\begin{cases} A_1 \xi_0 \eta_0 + A_2 \xi_0 + A_3 \eta_0 + A_4 = 0, \\ \frac{\xi_0^2}{\rho_1^2} + \frac{\eta_0^2}{\rho_2^2} = 1, \end{cases} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= (p_1^2 + p_2^2 + 2\chi p_1)(\rho_1^2 - \rho_2^2), & A_2 &= \varepsilon \rho_2^2 (p_2 \cos \alpha - p_1 \sin \alpha), \\ A_3 &= \varepsilon \rho_1^2 (p_1 \cos \alpha + p_2 \sin \alpha), & A_4 &= 2\chi p_2 \rho_1^2 \rho_2^2. \end{aligned}$$

Система (22) может быть сведена к одному уравнению четвертой степени, но более удобным будет графический метод ее исследования. Для этого выразим первое уравнение в виде дробно-линейных функций вида

$$\eta_0 = -\frac{A_2 \xi_0 + A_4}{A_1 \xi_0 + A_3} \quad \text{или} \quad \xi_0 = -\frac{A_3 \eta_0 + A_1}{A_1 \eta_0 + A_2},$$

графики которых представляют собой симметричные гиперболы с асимптотами

$$\xi = -\frac{A_3}{A_1}, \quad \eta = -\frac{A_2}{A_1}.$$

Таким образом, графическое решение системы (22) будет представлять собой точки пересечения симметричной гиперболы и эллипса.

На рис. 2 показаны графические решения системы (22), рассчитанные при следующих значениях безразмерных параметров:  $\chi = 0.02$ ,  $\varepsilon = 0.04$ ,  $\rho_1 = 1.28$ ,  $\rho_2 = 1.2$ ,  $\delta_n = 0.1$ ,  $\alpha = 0.6$ . Левый рисунок соответствует случаю  $\nu = 0.85$ , когда безразмерная угловая скорость ротора ниже критической, а правый отвечает за критической

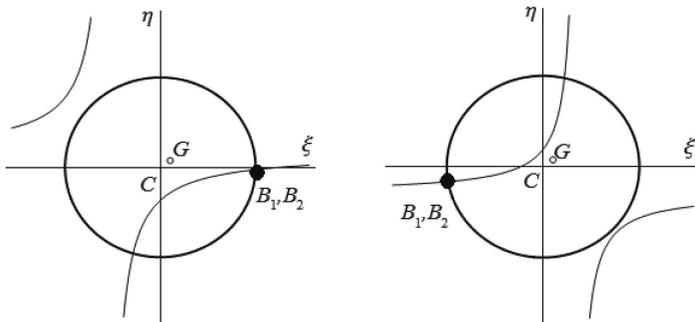


Рис. 2. Решение системы (22).

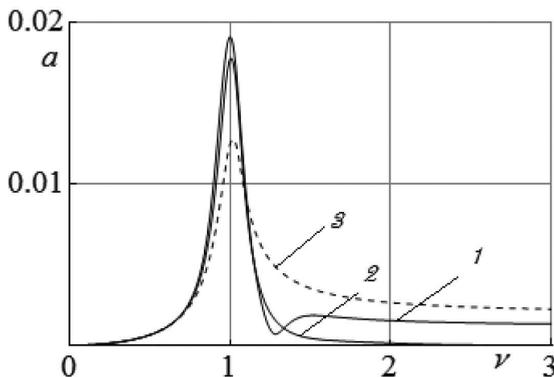


Рис. 3. Нестационарное прохождение критической области.

частоте  $\nu = 1.5$ . В обоих случаях графики гиперболы и эллипса имеют по две точки пересечения, однако реальное положение показанных на рисунке балансировочных шаров будет соответствовать тем точкам, которые расположены дальше от оси вращения ротора, соединяющей центры подшипников. Устойчивость этих положений обусловлена действующими на шары центробежными силами. При этом в докритическом режиме шары расположены на стороне дисбаланса диска, что увеличивает общий дисбаланс ротора, а в закритической области — на стороне противоположной дисбалансу, в силу чего суммарный дисбаланс диска и шаров становится меньше, чем в докритическом случае.

**3. Нестационарные режимы движения.** Исследование нестационарных режимов движения ротора, оснащенного АБУ с двумя балансировочными шарами, проведем путем численного интегрирования системы уравнений (7), (8). Полагая, что ротор вращается с постоянным угловым ускорением  $\ddot{\theta} = \dot{\nu} = \text{const}$ , рассмотрим процесс прохождения системы через критическую область. На рис. 3 кривая 1 представляет зависимость амплитуды прецессионного движения точки  $C$  от безразмерной угловой скорости  $\nu$  в случае, когда  $\nu = 0.16t$  при следующих значениях безразмерных параметров:  $\chi = 0.02$ ,  $\varepsilon = 0.04$ ,  $\alpha = 0.6$ ,  $\delta_n = 0.18$ ,  $\delta_b = 40$ ,  $\rho_1 = 1.28$ ,  $\rho_2 = 1.2$ . Для сравнения на этом же рисунке приведены амплитудно-частотные кривые для ротора с идеальным круговым АБУ (кривая 2) и для ротора без АБУ (штриховая кривая 3). Из рисунка видно, что эллиптическое АБУ, в отличие от кругового, не обеспечивает балансировку ротора в закритической области.

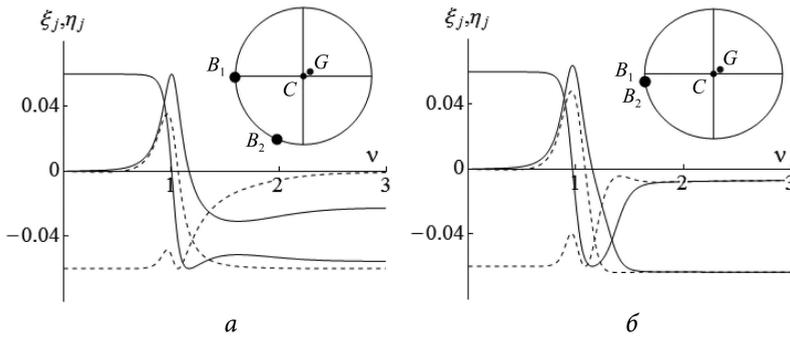


Рис. 4. Движение балансировочных шаров в случае кругового (а) и эллиптического (б) АБУ.

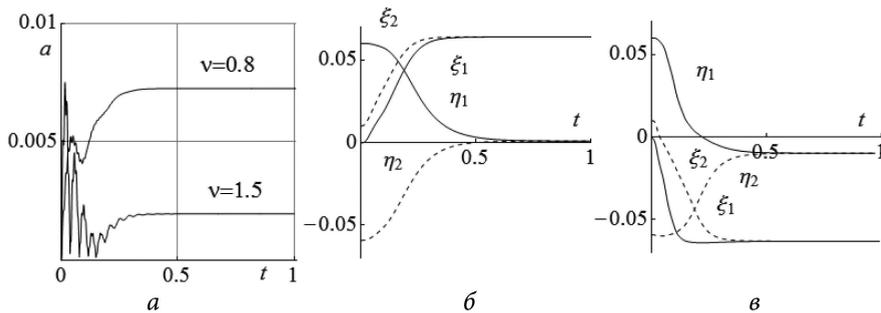


Рис. 5. Вращение ротора с постоянной угловой скоростью.

На рис. 4 показаны графики изменения положения балансировочных шаров для ротора с круговой (а) и эллиптической (б) беговыми дорожками АБУ в зависимости от угловой скорости  $\nu$ . Сплошные кривые соответствуют связанным координатам  $\xi_1$  и  $\eta_1$  центра первого шара, а штриховые — связанным координатам центра второго шара  $\xi_2$  и  $\eta_2$ . На рис. 4 показаны также установившиеся положения балансировочных шаров в обоях кругового и эллиптического АБУ.

Анализ рис. 3 и 4 позволяет сделать вывод о том, что изменение круговой формы беговой дорожки АБУ на эллиптическую приводит к потере функциональности АБУ в закритической области, поскольку балансировочные шары в этом случае не могут занять положение, уравнивающее дисбаланс.

Представляет также интерес рассмотреть переходные процессы при вращении ротора с постоянной угловой скоростью. На рис. 5 представлены результаты численного интегрирования системы (7), (8) в случае вращения ротора с докритической ( $\nu = 0.8$ ) и закритической ( $\nu = 1.5$ ) угловыми скоростями. Рис. 5, а показывает изменение амплитуд прецессионного движения точки С, а рис. 5, б и в — изменение положения балансировочных шаров. Графики демонстрируют, что в обоих случаях в системе устанавливаются несбалансированные стационарные режимы, когда балансировочные шары находятся в одной точке.

**Основной вывод.** Беговая дорожка балансировочных шаров АБУ должна иметь форму максимально приближенную к идеальной окружности. Эллиптичность формы может привести к потере функциональности АБУ.

## Литература

1. Ryzhik B., Sperling L., Duckstein H. Non-synchronous motions near critical speeds in a single-plane auto-balancing device // *Technische Mechanik*. 2004. Vol. 24, N 1. P. 25–36.
2. Chung J. Effect of gravity and angular velocity on an automatic ball balancer // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2005. P. 43–51.
3. Быков В. Г. Стационарные режимы движения неуравновешенного ротора с автобалансирующим механизмом // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия*. 2006. Вып. 2. С. 90–101.
4. Быков В. Г. Нестационарные режимы движения статически неуравновешенного ротора с автобалансирующим механизмом // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия*. 2010. Вып. 3. С. 89–96.
5. Быков В. Г. Автобалансировка жесткого ротора в вязко-упругих ортотропных опорах // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия*. 2013. Вып. 2. С. 82–91.
6. Быков В. Г. Автобалансировка ротора с ортотропно упругим валом // *Прикладная математика и механика*. 2013. Т. 77, № 4. С. 514–527.
7. Агафонов Ю. В., Базыкин Ю. В. Исследование влияния эксцентриситета беговой дорожки шарового автобалансира на качество балансировки // *Вестник машиностроения*. 1986. № 8. С. 23–25.
8. Нестеренко В. П., Соколов А. П. Остаточный дисбаланс, вызванный эксцентриситетом беговой дорожки, при автоматической балансировке роторов шарами // *Динамика управляемых механических систем*. Иркутск: ИЛИ, 1983. С. 46–50.
9. Olsson K. O. Limits for the use of auto-balancing // *International Journal of Rotating Machinery*. 2004. Vol. 10, N 3. P. 221–226.
10. Быков В. Г., Ковачев А. С. Динамика ротора с эксцентрическим шаровым автобалансирующим устройством // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия*. 2014. Т. 1(59). Вып. 4. С. 579–588.
11. Bykov V. G., Kovachev A. S. On stability of unbalanced steady-state motions of a rotor with eccentric ball autobalancing device // *International Conference on Mechanics — Seventh Polyakhov's Reading; St. Petersburg, 2–6 February 2015*. IEEE Xplore Digital Library. 2015. Article number 7106720. <https://doi.org/10.1109/POLYAKHOV.2015.7106720>
12. Быков В. Г., Ковачев А. С. Прохождение через резонанс статически неуравновешенного ротора с неидеальным автобалансирующим устройством // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия*. 2017. Т. 4(62). Вып. 4. С. 671–680. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.415>
13. Bykov V. G., Kovachev A. S. Autobalancing of a rigid rotor in viscoelastic orthotropic supports considering eccentricity of the automatic ball balancer // *International Scientific Conference on Mechanics: Eighth Polyakhov's Reading; St. Petersburg, 29 January — 2 February 2018, AIP Conference Proceedings*. 2018. Vol. 1959. Article number 080011. <https://doi.org/10.1063/1.5034728>

Статья поступила в редакцию 26 декабря 2018 г.;  
после доработки 26 января 2019 г.;  
рекомендована в печать 21 марта 2019 г.

### Контактная информация:

Быков Владимир Григорьевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; [v.bykov@spbu.ru](mailto:v.bykov@spbu.ru)  
Ковачев Александр Светославович — канд. физ.-мат. наук; [a.kovachev@spbu.ru](mailto:a.kovachev@spbu.ru)

## Dynamics of a statically unbalanced rotor with an elliptic automatic ball balancer

V. G. Bykov, A. S. Kovachev

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

**For citation:** Bykov V. G., Kovachev A. S. Dynamics of a statically unbalanced rotor with an elliptic automatic ball balancer. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics*.

The effect of the ellipticity of a race of an automatic ball balancer (ABB) on the dynamics of a statically unbalanced symmetrically fixed rotor is investigated. Based on the analysis of stationary and non-stationary modes of movement, it is shown that the deviation of the ABB's race from an ideal circle can lead to loss of the functionality of the ABB.

*Keywords:* statically unbalanced rotor, elliptic automatic ball balancer.

## References

1. Ryzhik B., Sperling L., Duckstein H., “Non-synchronous motions near critical speeds in a single-plane auto-balancing device”, *Technische Mechanik* **24**(1), 25–36 (2004).
2. Chung J., “Effect of gravity and angular velocity on an automatic ball balancer”, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 43–51 (2005).
3. Bykov V. G., “Stationary modes of motion of an unbalanced rotor with the automatic balancer”, *Vestnik St. Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, issue 2, 90–101 (2006). (In Russian)
4. Bykov V. G., “Nonstationary behavior of statically unbalanced rotor with the automatic balancer”, *Vestnik St. Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, issue 3, 89–96 (2010). (In Russian)
5. Bykov V. G., “Auto-balancing of orthotropic supported rigid rotor”, *Vestnik St. Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, issue 2, 82–91 (2013).
6. Bykov V. G., “Auto-balancing of a rotor with an orthotropic elastic shaft”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **77**(4), 369–379 (2013).
7. Agafonov Y. V., Bazykin Y. V., “Investigation of the effect of the eccentricity of the automatic ball balancer's treadmill to balance quality”, *Russian Engineering Research* (8), 23–25 (1986). (In Russian)
8. Nesterenko V. P., Sokolov A. P., “The residual imbalance caused by the eccentricity of the treadmill during automatic rotor balancing by balls”, *Dynamics of controlled mechanical systems*, 46–50 (ILI Publ., Irkutsk, 1983). (In Russian)
9. Olsson K. O., “Limits for the use of auto-balancing”, *International Journal of Rotating Machinery* **10**(3), 221–226 (2004).
10. Bykov V. G., Kovachev A. S., “Dynamics of a Rotor with an Eccentric Ball AutoBalancing Device”, *Vestnik St. Petersburg Univ.: Math.* **47**, issue 4, 173–180 (2014). <https://doi.org/10.3103/S1063454114040037>
11. Bykov V. G., Kovachev A. S., “On stability of unbalanced steady-state motions of a rotor with eccentric ball autobalancing device”, *International Conference on Mechanics – Seventh Polyakhov's Reading; St. Petersburg, 2–6 February 2015. IEEE Xplore Digital Library*, 7106720 (2015). <https://doi.org/10.1109/POLYAKHOV.2015.7106720>
12. Bykov V. G., Kovachev A. S., “Passage through resonance of a statically unbalanced rotor with an imperfect autobalancing device”, *Vestnik St. Petersburg Univ.: Math.* **50**, issue 4, 398–405 (2017). <https://doi.org/10.3103/S1063454117040057>
13. Bykov V. G., Kovachev A. S., “Autobalancing of a rigid rotor in viscoelastic orthotropic supports considering eccentricity of the automatic ball balancer”, *International Scientific Conference on Mechanics: Eighth Polyakhov's Reading; St. Petersburg, 29 January – 2 February 2018, AIP Conference Proceedings* **1959**, 080011 (2018). <https://doi.org/10.1063/1.5034728>

Received: December 26, 2018

Revised: January 26, 2019

Accepted: March 21, 2019

## Author's information:

Vladimir G. Bykov — [v.bykov@spbu.ru](mailto:v.bykov@spbu.ru)

Alexander S. Kovachev — [a.kovachev@spbu.ru](mailto:a.kovachev@spbu.ru)