

## Сравнение двух модифицированных моделей траектории артиллерийского снаряда как материальной точки

*Б. И. Коносевиц, Ю. Б. Коносевиц*

Институт прикладной математики и механики,  
Украина, 83114, Донецк, ул. Р. Люксембург, 74

**Для цитирования:** Коносевиц Б. И., Коносевиц Ю. Б. Сравнение двух модифицированных моделей траектории артиллерийского снаряда как материальной точки // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 3. С. 463–481. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.311>

В качестве исходного пункта для описания движения быстровращающегося снаряда как твердого тела при отсутствии ветра в работе взята система дифференциальных уравнений, в которой приняты выражения аэродинамических сил и моментов, линеаризованные по пространственному углу атаки. Рассматриваются две модифицированные модели траектории снаряда как материальной точки. Первая из них предложена Р. Лиеске и М. Рейтер и основана на неявной формуле для положения динамического равновесия оси симметрии снаряда, полученной ими при ряде физически мотивированных допущений. Вторая модифицированная модель основана на формуле для положения динамического равновесия, которое определяется квазистационарным решением подсистемы дифференциальных уравнений углового движения оси симметрии. В работе показано, что первая формула следует из второй, если пренебречь в ней экваториальным демпфированием. С помощью методов малого параметра получена оценка погрешности траектории снаряда, определяемой моделью Р. Лиеске и М. Рейтер, по сравнению с траекторией, определяемой линеаризованной системой.

*Ключевые слова:* артиллерийский снаряд, динамика полета, положение динамического равновесия, модифицированная модель материальной точки.

**Введение.** Модифицированная модель траектории снаряда как материальной точки, предложенная Р. Лиеске и М. Рейтер [1], позволяет в десятки раз уменьшить вычислительные затраты при определении траектории полета снаряда по сравнению с моделью траектории снаряда как твердого тела, обеспечивая при этом достаточно высокую точность. Такая модель основана на полученной авторами [1] физически мотивированной неявной формуле, определяющей положение динамического равновесия оси симметрии снаряда. Найденные из данной формулы значения переменных, задающих направление оси симметрии снаряда, подставляются в уравнения движения центра масс. Сюда присоединяется уравнение, описывающее изменение продольной угловой скорости снаряда. В результате получается система дифференциальных уравнений седьмого порядка, которая определяет модифицированную модель траектории снаряда как материальной точки. Эта модель официально рекомендована в НАТО [2].

В книге [3] отмечена возможность другого подхода к построению такой модели. Он основан на рассмотрении приближенного решения дифференциальных уравне-

ний углового движения оси симметрии снаряда и выделении в нем квазистационарной составляющей, которая соответствует положению динамического равновесия. Полученная таким путем модифицированная модель анонсирована в [4], а в [5] найдена математическая оценка погрешности определяемой ею траектории полета снаряда по сравнению с траекторией, определяемой исходной нелинейной системой уравнений движения снаряда как твердого тела. Модифицированную модель траектории снаряда как материальной точки, предложенную в [1], назовем  $m_1$ -моделью, а модель, рассмотренную в [4, 5], назовем  $m_2$ -моделью.

Исследование  $m_2$ -модели в [5] опирается на результаты работ [6, 7]. Для описания движения снаряда в [5] принята выведенная в [6] система дифференциальных уравнений, где в качестве переменных, определяющих направление оси симметрии снаряда, взяты проекции единичного вектора оси симметрии на оси полускоростной системы координат. Чтобы в этом случае получить систему дифференциальных уравнений нормального вида, в [6] специальным образом введена полусвязанная система координат, в проекциях на оси которой записываются уравнения вращательного движения. Для того чтобы иметь возможность применить к исследованию этой системы асимптотические методы малого параметра, в [7] в эту нелинейную систему с помощью процедуры нормализации введен малый параметр и получены условия, при которых ось симметрии снаряда мало отклоняется от вектора скорости его центра масс (условия правильности полета). Это позволило вывести в [5] оценку погрешности траектории снаряда, определяемой  $m_2$ -моделью, по сравнению с траекторией, определяемой исходной нелинейной системой. Фактически здесь установлен порядок этой погрешности по отношению к малому параметру.

В баллистике часто используется система дифференциальных уравнений движения снаряда, полученная из исходной путем линеаризации по переменным углового движения при малых значениях пространственного угла атаки ( $l$ -система). Порядок погрешности решения  $l$ -системы по сравнению с решением исходной нелинейной системы при тех же начальных условиях в момент выстрела найден в [8].

В [4–8] основным инструментом для вывода оценок порядка различных величин по малому параметру являются оценки погрешности приближенного решения уравнений углового движения, полученного на основе идей асимптотического метода ВКБ. Приближенное ВКБ-решение давно используется в баллистике. Оценки его погрешности по сравнению с точным решением уравнений углового движения установлены В. С. Пугачевым [9] в виде неравенств, содержащих операции дифференцирования, интегрирования и взятия максимума. В книге Н. Н. Моисеева [10] такие оценки выражены через  $O$ -символы. В обоих случаях не учитывается, что оцениваемые величины входят в уравнения поступательного движения, не учитывается также существенное уменьшение скорости центра масс снаряда в средней части траектории, содержащей ее вершину. Эти факторы приняты во внимание в [4–8].

В нормализованных дифференциальных уравнениях движения снаряда, содержащих малый параметр, их правые части выражаются через нормализованные фазовые переменные и их функции, связанные с аэродинамическими силами и моментами. Эти аэродинамические функции не сохраняют во время полета снаряда свой порядок по малому параметру. Изменение их порядка связано, в основном, с изменением нормализованной скорости  $v$  центра масс. С учетом этого для обеспечения соответствия получаемых математических оценок с результатами вычислительных

экспериментов аэродинамические функции представлены в [11] в виде произведений множителей вида  $v^n$  на новые функции. Степени  $n$  выбраны здесь так, чтобы эти новые функции принимали значения, численно близкие к 1 на среднем участке траектории, который вносит определяющий вклад в формирование погрешности приближенных решений. Такой подход позволил объяснить наблюдавшееся в расчетах равенство порядков погрешности ВКБ-решения при незатухающих и при затухающих колебаниях оси симметрии.

На основе этого подхода в [12] уточнен результат работы [5] и заново оценен порядок погрешности траектории снаряда, определяемой  $m_2$ -моделью, по сравнению с траекторией, определяемой  $l$ -системой. В [13] изложены обобщающие результаты, полученные в этом направлении, включая вывод исходных нелинейных уравнений движения снаряда, формулировку условий правильности полета, оценку погрешности ВКБ-решения, вывод оценки погрешности  $m_2$ -модели и сравнение вычислительных затрат при определении траектории путем численного интегрирования уравнений  $m_2$ -модели и  $l$ -системы.

В данной статье в основу исследования положена  $l$ -система. Показано, что формула, определяющая направление оси динамического равновесия в  $m_1$ -модели, получается из такой же формулы для  $m_2$ -модели, если пренебречь в ней экваториальным демпфированием. С помощью математической техники, развитой в [4, 7, 12, 13], методами малого параметра получена оценка разности решений, определяемых дифференциальными уравнениями  $m_1$ -модели и  $m_2$ -модели при одинаковых начальных условиях. С ее помощью на основе выведенной в [5, 12] оценки погрешности траектории  $m_2$ -модели оценена погрешность траектории снаряда, определяемой  $m_1$ -моделью, по сравнению с траекторией, определяемой  $l$ -системой. Этим оценкам соответствуют определенные числовые оценки. Они показывают, что погрешность определения координат центра масс снаряда при помощи  $m_1$ -модели имеет тот же порядок, что и для  $m_2$ -модели, и эта погрешность достигает десятков метров при стрельбе на максимальную дальность. Такой вывод проиллюстрирован с помощью компьютерного моделирования.

**1. Исходные соотношения.** Рассматривается движение быстровращающегося артиллерийского снаряда в поле силы тяжести под действием принятой в баллистике системы аэродинамических сил и моментов. Ветер и вращение Земли не учитываются. Для описания движения снаряда используются следующие переменные (см. [6, 13]).

Положение центра масс снаряда (точки  $C$ ) определяют его координаты  $x, y, z$  в неподвижной *стартовой* правой системе декартовых координат  $Oxyz$ . Ее начало совпадает с положением центра масс в момент выстрела, ось  $Ox$  направлена горизонтально в сторону стрельбы, а ось  $Oy$  — вертикально вверх. Вектор  $v$  скорости центра масс определяется его модулем  $v$  и углами  $\theta, \psi$ , которые вводятся вместе с *полускоростной* системой координат  $Cx_0y_0z_0$  (рис. 1, *a*). Ось  $Cx_0$  имеет направление вектора  $v$ . Система координат  $Cxyz$  на рис. 1, *a* получается путем параллельного переноса системы координат  $Oxyz$  в начало  $C$ .

Направление оси симметрии снаряда определяют углы  $\nu, \delta$  (рис. 1, *b*). Угол  $\delta$  между вектором  $v$  и осью симметрии называется *пространственным углом атаки*. Показанные на рис. 1, *b* системы координат  $Cx'y'z'$  и  $Cx''y''z''$  удобны для определения компонент аэродинамических сил и моментов. Уравнения движения снаряда записываются в более простой форме, если задавать направление его оси симметрии не углами  $\nu, \delta$ , а проекциями  $\gamma, \alpha, \beta$  единичного вектора оси симметрии на оси

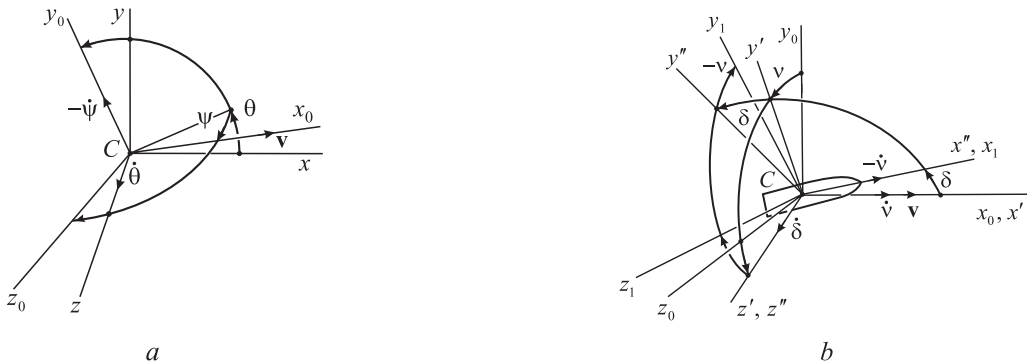


Рис. 1. Углы  $\theta, \psi$  и системы координат  $Cxyz, Cx_0y_0z_0$  (a); углы  $\nu, \delta$  и системы координат  $Cx'y'z', Cx''y''z'', Cx_1y_1z_1$  (b).

полускоростной системы координат  $Cx_0y_0z_0$ . Эти проекции выражаются через углы  $\nu, \delta$  по формулам  $\gamma = \cos \delta, \alpha = \sin \delta \cos \nu, \beta = \sin \delta \sin \nu$ .

Для записи уравнений вращательного движения снаряда используется *полусвязанная* система координат  $Cx_1y_1z_1$  (рис. 1, b). Ее ось  $Cx_1$  идет вдоль оси симметрии снаряда, а две другие не принимают участия в его быстром осевом вращении. Проекции вектора  $\omega$  угловой скорости снаряда на оси полусвязанной системы координат обозначаются через  $p, q, r$ . Через  $I_1, I_2, m$  обозначаются осевой и экваториальный центральные моменты инерции снаряда и его масса,  $g$  — ускорение свободного падения.

В практически интересном случае, когда  $|\delta| < \pi/2$ , соотношение  $\gamma^2 + \alpha^2 + \beta^2 = 1$  однозначно определяет величину  $\gamma$  через  $\alpha, \beta$  по формуле  $\gamma = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}$ , и динамика снаряда описывается нормальной системой одиннадцати обыкновенных дифференциальных уравнений с фазовым вектором  $x, y, z, v, \theta, \psi, p, q, r, \alpha, \beta$ .

Обозначая через  $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0$  и т. д. единичные векторы осей координат  $Ox, Cx_0$  и т. д., имеем

$$\mathbf{y} = \sin \theta \cos \psi \mathbf{x}_0 + \cos \theta \mathbf{y}_0 - \sin \theta \sin \psi \mathbf{z}_0, \quad \mathbf{z} = \sin \psi \mathbf{x}_0 + \cos \psi \mathbf{z}_0. \quad (1)$$

Главный вектор  $\mathbf{R}$  действующих на снаряд аэродинамических сил определяется своими проекциями на оси поточной системы координат  $Cx'y'z'$ :  $\mathbf{R} = R_x \mathbf{x}' + R_y \mathbf{y}' + R_z \mathbf{z}'$ . Здесь  $R_x$  — сила лобового сопротивления ( $R_x \leq 0$ ),  $R_y$  — подъемная сила,  $R_z$  — сила Магнуса. Главный момент относительно центра масс действующих на снаряд аэродинамических сил представляется в виде суммы  $\mathbf{M}_C = \mathbf{M} + \mathbf{M}_D$ . Здесь аэродинамический момент  $\mathbf{M}$  равен сумме  $\mathbf{M} = M_y \mathbf{y}'' + M_z \mathbf{z}''$ , где  $M_y$  — момент Магнуса,  $M_z$  — опрокидывающий момент. Демпфирующий момент  $\mathbf{M}_D$  представляется в виде  $\mathbf{M}_D = M_p p \mathbf{x}_1 + M_\Omega \boldsymbol{\Omega}$ , где  $\boldsymbol{\Omega} = q \mathbf{y}_1 + r \mathbf{z}_1$ . Как известно, величины  $R_x, M_p, M_\Omega$  являются четными  $2\pi$ -периодическими функциями пространственного угла атаки  $\delta$ , а  $R_y, R_z, M_y, M_z$  являются нечетными  $2\pi$ -периодическими функциями угла  $\delta$ . Все они зависят от  $u, v$ , а  $R_z$  и  $M_y$  зависят еще и от  $p$ . В уравнения движения

снаряда эти величины входят через *аэродинамические функции*

$$\begin{aligned}
 K_x(y, v, \delta) &= \frac{R_x(y, v, \delta)}{m}, & K_y(y, v, \delta) &= \frac{R_y(y, v, \delta)}{mv \sin \delta}, \\
 K_z(y, v, p, \delta) &= \frac{R_z(y, v, p, \delta)}{mv \sin \delta}, & K_p(y, v, \delta) &= \frac{M_p(y, v, \delta)}{I_1}, \\
 A_\Omega(y, v, \delta) &= \frac{M_\Omega(y, v, \delta)}{I_2}, & B_y(y, v, p, \delta) &= \frac{M_y(y, v, p, \delta)}{I_2 \sin \delta}, \\
 B_z(y, v, \delta) &= \frac{M_z(y, v, \delta)}{I_2 \sin \delta}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Они непрерывно дифференцируемы по всем аргументам в предположении, что аэродинамические силы и моменты являются дважды непрерывно дифференцируемыми. При этом функции  $R_y/\sin \delta$ ,  $R_z/\sin \delta$ ,  $M_y/\sin \delta$ ,  $M_z/\sin \delta$  непрерывно дифференцируемы по всем аргументам во всей рабочей области, в том числе и при  $\delta = 0$ . Все функции (2) являются четными по  $\delta$ , и в случае малых  $\delta$  они могут быть аппроксимированы своими значениями при  $\delta = 0$ . Тогда при малых  $\delta$  имеем для этих функций выражения

$$\begin{aligned}
 K_x^{(0)}(y, v) &= \frac{R_x^{(0)}(y, v)}{m}, & K_y^{(0)}(y, v) &= \frac{R_y^\delta(y, v)}{mv}, & K_z^{(0)}(y, v, p) &= \frac{R_z^\delta(y, v, p)}{mv}, \\
 K_p^{(0)}(y, v) &= \frac{M_p^{(0)}(y, v)}{I_1}, & A_\Omega^{(0)}(y, v) &= \frac{M_\Omega^{(0)}(y, v)}{I_2}, & B_y^{(0)}(y, v, p) &= \frac{M_y^\delta(y, v, p)}{I_2}, \\
 B_z^{(0)}(y, v) &= \frac{M_z^\delta(y, v)}{I_2}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь индексом (0) отмечены значения четных по  $\delta$  функций при  $\delta = 0$ , индексом  $\delta$  отмечены коэффициенты при  $\delta$  в приближенных формулах  $R_y(y, v, \delta) = R_y^\delta(y, v)\delta$ ,  $R_z(y, v, p, \delta) = R_z^\delta(y, v, p)\delta$ ,  $M_y(y, v, p, \delta) = M_y^\delta(y, v, p)\delta$ ,  $M_z(y, v, \delta) = M_z^\delta(y, v)\delta$  для нечетных по  $\delta$  аэродинамических сил и моментов. Входящие в правые части формул (3) функции  $R_x^{(0)}(y, v)$ ,  $R_y^\delta(y, v)$ ,  $R_z^\delta(y, v, p)$ ,  $M_p^{(0)}(y, v)$ ,  $M_\Omega^{(0)}(y, v)$ ,  $M_y^\delta(y, v, p)$ ,  $M_z^\delta(y, v)$  в баллистике представляются при помощи безразмерных аэродинамических коэффициентов, зависящих от числа Маха  $M = a(y)/v$ , где  $a(y)$  — скорость звука.

Для хорошо сконструированного снаряда угол  $\delta$  принимает на траектории его полета малые значения вместе с переменными  $\alpha, \beta$ . Малые значения принимает и угол  $\psi$ . Поэтому можно ожидать, что динамика полета такого снаряда с высокой точностью описывается системой дифференциальных уравнений, которая получается из исходной «точной» системы путем отбрасывания членов, нелинейных по  $\alpha, \beta, \psi$ . В [6, 12, 13] эта *l-система* записана в виде подсистемы *уравнений поступа-*

тельного движения и продольного вращения снаряда

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cos \theta, \quad \dot{y} = v \sin \theta, \quad \dot{z} = v\psi, \quad \dot{v} = K_x^{(0)}(y, v) - g \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= -\frac{g \cos \theta}{v} + K_y^{(0)}(y, v)\alpha - K_z^{(0)}(y, v, p)\beta, \\ \dot{\psi} &= \frac{g}{v}\psi \sin \theta + K_z^{(0)}(y, v, p)\alpha + K_y^{(0)}(y, v)\beta, \\ \dot{p} &= K_p^{(0)}(y, v)p \end{aligned} \quad (4)$$

и подсистемы уравнений углового движения оси симметрии снаряда, которая после введения комплексных переменных  $\Omega = q + ir$ ,  $\Delta = \alpha + i\beta$  записывается в виде

$$\dot{\Omega} = a(y, v, p)\Omega + b(y, v, p)\Delta, \quad \dot{\Delta} = -i\Omega - k(y, v, p)\Delta + l(v, \theta, \psi). \quad (5)$$

Здесь коэффициенты  $a, b, k, l$  выражаются через функции (3) по формулам

$$\begin{aligned} a(y, v, p) &= A_\Omega^{(0)}(y, v) + ipI, \quad b(y, v, p) = B_y^{(0)}(y, v, p) + iB_z^{(0)}(y, v), \\ k(y, v, p) &= K_y^{(0)}(y, v) + iK_z^{(0)}(y, v, p), \quad l(v, \theta, \psi) = L_1(v, \theta) + iL_2(v, \theta, \psi), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $I = I_1/I_2$ ,  $L_1(v, \theta) = gv^{-1} \cos \theta$ ,  $L_2(v, \theta, \psi) = -gv^{-1}\psi \sin \theta$ .

**2. Определения  $m_1$ -модели и  $m_2$ -модели траектории снаряда.** Приближенное общее решение уравнений (5) иногда получают, рассматривая коэффициенты (6) этих уравнений как постоянные величины. На основе идей асимптотического метода ВКБ [9, 10] в [5–8] построено более точное приближенное общее решение уравнений (5). В обоих случаях это решение описывает быстрые двухчастотные колебания комплексных переменных  $\Omega$ ,  $\Delta$  относительно их медленно изменяющихся средних значений  $e, d$ . Эти квазистационарные значения определяются из условия равенства нулю правых частей уравнений (5) и, следовательно, они выражаются по формулам

$$e = e(y, v, \theta, \psi, p) = \frac{bl}{ib - ak}, \quad d = d(y, v, \theta, \psi, p) = -\frac{al}{ib - ak}. \quad (7)$$

С помощью формул (6) находим выражения для действительной и мнимой частей  $d_1, d_2(y, v, \theta, \psi, p)$  функции  $d(y, v, \theta, \psi, p)$ . Подставив их в уравнения (4) вместо переменных  $\alpha, \beta$ , получаем замкнутую систему дифференциальных уравнений ( $m_2$ -систему)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cos \theta, \quad \dot{y} = v \sin \theta, \quad \dot{z} = v\psi, \quad \dot{v} = K_x^{(0)}(y, v) - g \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= -\frac{g \cos \theta}{v} + K_y^{(0)}(y, v)d_1(y, v, \theta, \psi, p) - K_z^{(0)}(y, v, p)d_2(y, v, \theta, \psi, p), \\ \dot{\psi} &= \frac{g}{v}\psi \sin \theta + K_z^{(0)}(y, v, p)d_1(y, v, \theta, \psi, p) + K_y^{(0)}(y, v)d_2(y, v, \theta, \psi, p), \\ \dot{p} &= K_p^{(0)}(y, v)p. \end{aligned} \quad (8)$$

Она определяет  $m_2$ -модель — модифицированную модель траектории снаряда как материальной точки.

В работе [1] отклонение оси симметрии снаряда от направления вектора скорости его центра масс относительно воздуха определено вектором, который в обозначениях [3] выражается формулой

$$\boldsymbol{\alpha}_R = \mathbf{i} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{i}). \quad (9)$$

Здесь  $\mathbf{x}$  — единичный вектор оси симметрии снаряда,  $\mathbf{i}$  — единичный вектор в направлении вектора  $\mathbf{v}$  скорости центра масс снаряда относительно воздуха. Следовательно,  $\boldsymbol{\alpha}_R$  — это составляющая единичного вектора  $\mathbf{x}$  оси симметрии снаряда, ортогональная его воздушной скорости  $\mathbf{v}$ . Поэтому проекциями вектора  $\boldsymbol{\alpha}_R$  на оси  $Cy_0, Cz_0$  являются введенные в п. 1 проекции  $\alpha, \beta$  единичного вектора оси симметрии на эти оси.

В [1, 3] при ряде физически мотивированных предположений для вектора (9) получена приближенная формула. В [3] она записана в следующем виде:

$$\boldsymbol{\alpha}_R = \frac{-2I_x p C_{L\alpha} (\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{V}}) - 2mpd^2 C_{MP\alpha} [\mathbf{v} \times (\dot{\mathbf{V}} - \mathbf{g})]}{\rho S d v^2 (v^2 C_{L\alpha} C_{M\alpha} + p^2 d^2 C_{NP\alpha} C_{MP\alpha})}. \quad (10)$$

Здесь  $\mathbf{g}$  — ускорение силы тяжести,  $\mathbf{V}$  — скорость центра масс снаряда относительно земной поверхности,  $\mathbf{v} = \mathbf{V} - \mathbf{W}$  — скорость центра масс относительно воздуха,  $\mathbf{W}$  — скорость ветра. Используются также обозначения (в круглых скобках даны соответствующие обозначения для  $l$ -системы из [12, 13]):  $I_x$  — осевой момент инерции снаряда ( $I_1$ ),  $m$  — масса снаряда ( $m$ ),  $d$  — опорный диаметр снаряда ( $D$ ),  $\rho$  — плотность воздуха ( $\rho(y)$ ),  $S = \pi d^2/4$  — площадь опорного поперечного сечения снаряда ( $S$ ). В формулу (10) входят следующие аэродинамические коэффициенты:  $C_{L\alpha}$  — коэффициент подъемной силы,  $C_{MP\alpha}$  — коэффициент силы Магнуса,  $C_{M\alpha}$  — коэффициент опрокидывающего момента,  $C_{NP\alpha}$  — коэффициент момента Магнуса. Формула (10) определяет вектор  $\boldsymbol{\alpha}_R$  неявно, так как в ее правую часть через  $\dot{\mathbf{V}}$  входит сам этот вектор, а аэродинамические коэффициенты в общем случае зависят от квадрата его модуля.

Определяемое формулой (10) положение оси симметрии снаряда рассматривается в [1, 3] как положение ее динамического равновесия. Вектор  $\boldsymbol{\alpha}_R$ , найденный с помощью формулы (10), подставляется в векторное уравнение движения центра масс. К полученной таким путем системе шести скалярных дифференциальных уравнений первого порядка присоединяется уравнение, определяющее производную  $\dot{p}$  от продольной угловой скорости. В результате получается система семи дифференциальных уравнений первого порядка, которая определяет модифицированную модель траектории снаряда как материальной точки. В данной работе она названа  $m_1$ -моделью.

**3. Сравнение условий динамического равновесия в  $m_1$ -модели и в  $m_2$ -модели.** Перейдем в формуле (10) для  $\boldsymbol{\alpha}_R$  к обозначениям, с помощью которых в п. 2 записана формула (7) для  $d$ . Сначала запишем приведенные в [3] выражения (2.6-b), (2.19-b), (2.21-b), (2.23-b) аэродинамических сил и моментов через аэродинамические коэффициенты. Воспользовавшись обозначениями этих сил и моментов, принятыми в п. 1, приходим к формулам

$$\begin{aligned} R_y &= C_{L\alpha} \frac{\rho v^2}{2} S \sin \alpha_t, & M_z &= C_{M\alpha} \frac{\rho v^2}{2} S d \sin \alpha_t, \\ R_z &= C_{NP\alpha} \frac{\rho v^2}{2} S \left(\frac{pd}{v}\right) \sin \alpha_t, & M_y &= -C_{MP\alpha} \frac{\rho v^2}{2} S d \left(\frac{pd}{v}\right) \sin \alpha_t, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\alpha_t$  — пространственный угол атаки (в п. 1 он обозначен через  $\delta$ ). В правой части последней из формул (11) взят знак минус, так как направление, принятое для момента Магнуса в качестве положительного в п. 1, противоположно направлению, которое считается для него положительным в [3].

Разрешив формулы (11) относительно аэродинамических коэффициентов, заменяем аэродинамические силы и моменты  $R_y, M_z, R_z, M_y$  соответствующими аэродинамическими функциями  $K_y, B_z, K_z, B_y$ , определенными в (2). Вместо обозначений  $I_x, I_y, d, \alpha_t$  при этом принимаем обозначения  $I_1, I_2, D, \delta$ , введенные в п. 1. Получаем

$$C_{L\alpha} = \frac{2mvK_y}{\rho v^2 S}, \quad C_{M\alpha} = \frac{2I_2 B_z}{\rho v^2 S D}, \quad C_{N_{P\alpha}} = \frac{2mvK_z}{\rho v p S D}, \quad C_{M_{P\alpha}} = -\frac{2I_2 B_y}{\rho v p S D^2}. \quad (12)$$

Умножим теперь обе части формулы (10) для  $\alpha_R$  на знаменатель ее правой части и перейдем в ней от обозначений  $I_x, d$  к обозначениям  $I_1, D$ . После подстановки сюда выражений (12) приходим к равенству, которое определяет вектор  $\alpha_R$  при помощи аэродинамических функций  $K_y, B_z, K_z, B_y$ . В данной работе рассматривается случай отсутствия ветра, когда  $\mathbf{v} = \mathbf{V}$ . В этом случае получаем векторное равенство

$$\alpha_R v^2 (K_y B_z - B_y K_z) + (p I K_y - B_y)(\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}) + B_y(\mathbf{v} \times \mathbf{g}) = \mathbf{0}. \quad (13)$$

Запишем его в проекциях на оси полускоростной системы координат  $Cx_0y_0z_0$ . Проекция вектора  $\alpha_R$  на эти оси обозначим через  $\alpha_{R0}, \alpha_{R1}, \alpha_{R2}$ , так что

$$\alpha_R = \alpha_{R0}\mathbf{x}_0 + \alpha_{R1}\mathbf{y}_0 + \alpha_{R2}\mathbf{z}_0. \quad (14)$$

При помощи (1) находим для вектора  $\mathbf{g} = -g\mathbf{y}$  разложение

$$\mathbf{g} = -g \sin \theta \cos \psi \mathbf{x}_0 - g \cos \theta \mathbf{y}_0 + g \sin \theta \sin \psi \mathbf{z}_0. \quad (15)$$

Вектор  $\mathbf{v}$  скорости центра масс представляется в виде  $\mathbf{v} = v\mathbf{x}_0$ . Отсюда следует формула  $\dot{\mathbf{v}} = \dot{v}\mathbf{x}_0 + v(\dot{\theta}\mathbf{z} - \dot{\psi}\mathbf{y}_0) \times \mathbf{x}_0$ , где  $\dot{\theta}\mathbf{z} - \dot{\psi}\mathbf{y}_0$  — угловая скорость системы координат  $Cx_0y_0z_0$  (см. рис. 1, а). При учете разложения (1) для вектора  $\mathbf{z}$  получаем

$$\mathbf{v} = v\mathbf{x}_0, \quad \dot{\mathbf{v}} = \dot{v}\mathbf{x}_0 + v\dot{\theta} \cos \psi \mathbf{y}_0 + v\dot{\psi} \mathbf{z}_0. \quad (16)$$

В данной работе движение снаряда описывается  $l$ -системой (4), (5), и поэтому в используемых формулах следует положить  $\cos \psi = 1, \sin \psi = \psi$ . В формуле (13) вместо аэродинамических функций  $K_y, K_z, B_y, B_z$  надо взять их значения  $K_y^{(0)}, K_z^{(0)}, B_y^{(0)}, B_z^{(0)}$  при  $\delta = 0$ . После этого векторное равенство (13) принимает вид

$$\alpha_R v^2 (K_y^{(0)} B_z^{(0)} - B_y^{(0)} K_z^{(0)}) + (p I K_y^{(0)} - B_y^{(0)})(\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}) + B_y^{(0)}(\mathbf{v} \times \mathbf{g}) = \mathbf{0},$$

и из него при учете (14)–(16) следуют три скалярных равенства

$$\begin{aligned} v^2 (K_y^{(0)} B_z^{(0)} - B_y^{(0)} K_z^{(0)}) \alpha_{R0} &= 0, \\ v^2 (K_y^{(0)} B_z^{(0)} - B_y^{(0)} K_z^{(0)}) \alpha_{R1} - (p I K_y^{(0)} - B_y^{(0)}) v^2 \dot{\psi} - B_y^{(0)} g v \psi \sin \theta &= 0, \\ v^2 (K_y^{(0)} B_z^{(0)} - B_y^{(0)} K_z^{(0)}) \alpha_{R2} + (p I K_y^{(0)} - B_y^{(0)}) v^2 \dot{\theta} - B_y^{(0)} g v \cos \theta &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

В общем случае, когда  $K_y^{(0)} B_z^{(0)} - B_y^{(0)} K_z^{(0)} \neq 0$ , из первого равенства (17) находим  $\alpha_{R0} = 0$ . Два других равенства (17) запишем, подставив в них вместо  $\dot{\theta}, \dot{\psi}$



Таблица 1. Новые масштабы фазовых переменных и времени

Масштаб	$x_*, y_*$	$z_*$	$v_*$	$\theta_*$	$\psi_*$	$p_*$	$q_*, r_*$	$\alpha_*, \beta_*$	$t_*$
Значение	$10^4$	$10^2$	$10^3$	1	$0.1^2$	$10^3$	1	$0.1^2$	$0.1^2$
Ед. измер.	м	м	$\text{мс}^{-1}$	–	–	$\text{с}^{-1}$	$\text{с}^{-1}$	–	с

правые части соответствующих уравнений (4), где в качестве  $\alpha, \beta$  взяты  $\alpha_{R1}, \alpha_{R2}$ . Получаем

$$\begin{aligned} (pIK_z^{(0)} - B_z^{(0)})\alpha_{R1} + (pIK_y^{(0)} - B_y^{(0)})\alpha_{R2} &= pIL_2, \\ (pIK_y^{(0)} - B_y^{(0)})\alpha_{R1} - (pIK_z^{(0)} - B_z^{(0)})\alpha_{R2} &= pIL_1. \end{aligned}$$

Полагая  $\alpha_R = \alpha_{R1} + i\alpha_{R2}$ , приходим к комплексному уравнению, которое определяет положение динамического равновесия для  $m_1$ -модели по формуле

$$\alpha_R = \alpha_R(y, v, \theta, \psi, p) = -\frac{a_* l}{ib - a_* k} = -\frac{ipI l}{ib - ipIk}, \quad (18)$$

где  $a_* = ipI$  – мнимая часть величины  $a = A_\Omega^{(0)} + ipI$ , определенной в (6). Здесь  $I = I_1/I_2$ ,  $A_\Omega^{(0)} = M_\Omega^{(0)}/I_2$  согласно (3). Следовательно, формула (18) для комплексной величины  $\alpha_R$ , определяющей положение динамического равновесия в  $m_1$ -модели, получается из формулы (7), определяющей положение динамического равновесия  $d$  в  $m_2$ -модели, путем пренебрежения коэффициентом  $M_\Omega^{(0)}$  поперечного демпфирующего момента по сравнению с проекцией  $pI_1$  вектора кинетического момента снаряда на его ось симметрии.

**4. Оценка погрешности траектории для  $m_1$ -модели.** Чтобы применить асимптотические методы к  $l$ -системе (4), (5), в нее вводится малый параметр  $\varepsilon$ , в результате чего  $l$ -система преобразуется в  $l_\varepsilon$ -систему, содержащую малый параметр. Введение малого параметра в уравнения движения снаряда осуществляется в [11–13] при помощи процедуры числовой нормализации с использованием десятичной числовой шкалы. Эта процедура основана на том, что вместо исходных фазовых переменных и функций, входящих в уравнения движения, вводятся новые, нормализованные, фазовые переменные и функции. Для них в качестве масштабов принимаются десятичные порядки характерных числовых значений модулей соответствующих исходных фазовых переменных и функций. Для фазовых переменных выбираются масштабы, указанные в табл. 1.

В качестве новой единицы времени принимается величина  $t_* = 0.01$  с, которая имеет порядок периода высокочастотных колебаний оси симметрии. При стрельбе на максимальную дальность время полета снаряда составляет десятки секунд, и поэтому после перехода к новому масштабу времени время полета снаряда достигает значений порядка  $10^3$ . Ускорение силы тяжести  $g$  отнесено к  $10 \text{ мс}^{-2}$ . Для нормализованных величин используются такие же обозначения, как и для исходных.

После перехода к новым масштабам аэродинамические функции (3) в уравнениях движения снаряда ограничены по модулю значениями порядка 1. Но, благодаря значительному уменьшению нормализованной скорости  $v$  в средней части траектории, содержащей ее вершину, аэродинамические функции принимают существенно меньшие значения на этой части траектории. Чтобы учесть такие изменения, указанные функции представлены в [11–13] как произведения множителей вида  $v^n$  на функции, которые по модулю численно близки к 1 на среднем участке траектории.

Тогда, вводя малый параметр  $\varepsilon$  вместо числа 0.1, получаем  $l$ -систему с малым параметром ( $l_\varepsilon$ -систему) [11–13]. Она состоит из подсистемы уравнений поступательного движения и продольного вращения снаряда

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon^3 v \cos \theta, \quad \dot{y} = \varepsilon^3 v \sin \theta, \quad \dot{z} = \varepsilon^3 v \psi, \quad \dot{v} = \varepsilon^3 v^3 K_0(y, v) - \varepsilon^4 g \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= -\varepsilon^4 \frac{g \cos \theta}{v} + \varepsilon^4 v^2 K_1(y, v) \alpha - \varepsilon^4 v^2 K_2(y, v, p) \beta, \\ \dot{\psi} &= \varepsilon^4 \frac{g}{v} \psi \sin \theta + \varepsilon^2 v^2 K_2(y, v, p) \alpha + \varepsilon^2 v^2 K_1(y, v) \beta, \\ \dot{p} &= \varepsilon^4 p v K_3(y, v) \end{aligned} \quad (19)$$

и подсистемы уравнений углового движения его оси симметрии

$$\dot{\Omega} = a(y, v, p, \varepsilon) \Omega + b(y, v, p, \varepsilon) \Delta, \quad \dot{\Delta} = -i \Omega - k(y, v, p, \varepsilon) \Delta + l(v, \theta, \psi, \varepsilon). \quad (20)$$

Здесь  $\Omega = q + ir$ ,  $\Delta = \alpha + i\beta$  — комплексные переменные, функции  $a, b, k, l$  равны

$$\begin{aligned} a(y, v, p, \varepsilon) &= \varepsilon^2 v A_1(y, v) + ipI, \quad b(y, v, p, \varepsilon) = v^3 [\varepsilon^2 B_1(y, v, p) + iB_2(y, v)], \\ k(y, v, p, \varepsilon) &= \varepsilon^2 v^2 [K_1(y, v) + iK_2(y, v, p)], \quad l(v, \theta, \psi, \varepsilon) = \varepsilon^2 \frac{g}{v} (\cos \theta - i\varepsilon^2 \psi \sin \theta). \end{aligned} \quad (21)$$

В дальнейшем для действительной или комплексной функции  $\phi$  нормализованных фазовых переменных, времени и параметра  $\varepsilon$  равенство  $\phi = O(\varepsilon^n)$  означает, что функция  $\phi$  имеет порядок  $\varepsilon^n$  или более высокий порядок при  $\varepsilon \rightarrow 0$  во всей области изменения фазовых переменных и времени. Равенство  $\phi = O^*(\varepsilon^n)$  означает, что функция  $\phi$  имеет порядок, равный  $\varepsilon^n$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Для положительных величин порядков  $O(\varepsilon^n)$  и  $O^*(\varepsilon^n)$  используются обозначения  $O_+(\varepsilon^n)$  и  $O_+(\varepsilon^n)$ .

Тогда для времени полета снаряда имеем оценку  $t_1 - t_0 = O(\varepsilon^{-3})$ , где  $t_0$  — момент выстрела,  $t_1$  — момент падения снаряда на землю. Функции  $K_0, K_1, K_3, A_1, B_2$  в (19), (21) равны  $O^*(1)$ , а функции  $K_2$  и  $B_1$ , связанные с силой и моментом Магнуса, предполагаются равными  $O(1)$ .

Для вывода оценок погрешности различных приближений в теории полета снаряда необходимо располагать априорными оценками всех фазовых переменных  $l_\varepsilon$ -системы (19), (20) при  $t \in [t_0, t_1]$ . Выполнение таких оценок  $x, y, z, v, \theta, \psi, p(t, \varepsilon) = O(1)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , для переменных  $x, y, z, v, \theta, \psi, p$  обеспечивается правильным выбором их масштабов при нормализации. Для переменных  $q, r, \alpha, \beta$  оценки  $\Omega, \Delta(t, \varepsilon) = O(1)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , выполняются только при дополнительных условиях, называемых условиями правильности полета (см. [7, 11–13]). Далее эти условия предполагаются выполненными. Они включают в себя: 1) условие Маиевского, которое обеспечивает колебательный характер углового движения оси симметрии снаряда, 2) условия ограниченности амплитуд этих колебаний, 3) условие  $p = O^*(1)$  сохранения порядка продольной угловой скорости, 4) двойное неравенство для нормализованной скорости

$$O_+(\varepsilon^{1/2}) \leq v \leq O_+(1). \quad (22)$$

Выполнение правого неравенства в (22) обеспечивается выбором масштаба скорости  $v$  при нормализации. Левое неравенство в (22) гарантирует выполнение условия  $d = O(1)$  ограниченности величины  $d$ , определяющей положение динамического

равновесия оси симметрии. Это следует из приведенной ниже формулы (25) для величины  $d$  после подстановки в нее выражений (21).

Для сокращения записи удобно пользоваться векторными обозначениями

$$\begin{aligned}\xi &= (x, y, \varepsilon^2 z, v, \theta, \varepsilon^2 \psi, p), & \xi^{(5)} &= (y, v, \theta, \varepsilon^2 \psi, p), \\ \xi^{(4)} &= (y, v, \theta, p), & \xi^{(3)} &= (y, v, p).\end{aligned}\tag{23}$$

Норму вектора  $\xi$  полагаем равной максимальному из модулей его компонент.

Пользуясь введенным в (23) обозначением  $\xi$ , запишем уравнения поступательного движения и продольного вращения (19) для  $l_\varepsilon$ -системы в векторной форме

$$\dot{\xi} = f(\xi, \varepsilon) + f_1(\xi, \varepsilon)\alpha + f_2(\xi, \varepsilon)\beta.\tag{24}$$

Из сравнения (19) с (24) следует, что вектор-функция  $f$  зависит фактически не от всех компонент вектора  $\xi$ , а только от  $\xi^{(5)}$ , а у вектор-функций  $f_1, f_2$  отличны от нуля только их пятые и шестые компоненты, которые зависят от  $\xi^{(3)}, \varepsilon$ .

Пусть  $\xi, \Omega, \Delta(t, \varepsilon)$  — решение нелинейной системы уравнений движения снаряда при заданных в момент  $t_0$  начальных условиях, а  $\xi_{l\varepsilon}, \Omega_{l\varepsilon}, \Delta_{l\varepsilon}(t, \varepsilon)$  — решение  $l_\varepsilon$ -системы (19), (20) при тех же начальных условиях. В [8] получены оценки погрешности решения  $l_\varepsilon$ -системы и, в частности, установлено, что

$$\|\xi(t, \varepsilon) - \xi_{l\varepsilon}(t, \varepsilon)\| = O_+(\varepsilon^3), \quad t \in [t_0, t_1].$$

В  $l_\varepsilon$ -системе (19), (20) переменные, объединенные в вектор  $\xi$ , являются медленно изменяющимися, так как скорость  $\dot{\xi}$  изменения этого вектора равна  $O(\varepsilon^3)$ . Переменные  $\Omega, \Delta$  изменяются быстро, так как скорости их изменения  $\dot{\Omega}, \dot{\Delta}$  равны  $O(1)$ . Поэтому можно ожидать, что на коротком промежутке времени решение подсистемы уравнений углового движения (20) с удовлетворительной точностью описывается формулами, которые получаются, если рассматривать коэффициенты этих уравнений как постоянные величины. Более точное приближенное решение уравнений углового движения строится в [11–13] на основе идей асимптотического метода ВКБ [9, 10]. Оба эти приближенные решения описывают быстрые двухчастотные колебания комплексных переменных  $\Omega, \Delta$  относительно квазистационарных средних значений  $e, d$ , которые определяются из условия равенства нулю правых частей уравнений (20). Пользуясь введенным в (23) обозначением  $\xi^{(5)} = (y, v, \theta, \varepsilon^2 \psi, p)$ , получаем

$$e = e(\xi^{(5)}, \varepsilon) = \frac{bl}{ib - ak}, \quad d = d(\xi^{(5)}, \varepsilon) = -\frac{al}{ib - ak}.\tag{25}$$

Здесь функции  $a, b, k, l$  заданы формулами (21), содержащими малый параметр  $\varepsilon$ .

Выделим во второй из формул (25) действительную и мнимую части, полагая  $d(\xi^{(5)}, \varepsilon) = d_1(\xi^{(5)}, \varepsilon) + id_2(\xi^{(5)}, \varepsilon)$ . Подставляем функции  $d_1, d_2$  в уравнения поступательного движения и продольного вращения (19) вместо переменных  $\alpha, \beta$  и в результате получаем замкнутую систему 7-го порядка, являющуюся аналогом  $m_2$ -системы (8) для уравнений с малым параметром. Назовем ее  $m_{2\varepsilon}$ -системой, а определяемую ею модель траектории снаряда назовем  $m_{2\varepsilon}$ -моделью. С помощью обозначения  $\xi$ , введенного в (23),  $m_{2\varepsilon}$ -система записывается в векторной форме

$$\dot{\xi} = f(\xi, \varepsilon) + f_1(\xi, \varepsilon)d_1(\xi, \varepsilon) + f_2(\xi, \varepsilon)d_2(\xi, \varepsilon).\tag{26}$$

Формула (18), которая представляет положение динамического равновесия  $l$ -системы, соответствующее его определению в [1, 3], в случае  $l_\varepsilon$ -системы переходит в формулу

$$\alpha_R = \alpha_R(\xi^{(5)}, \varepsilon) = -\frac{a_* l}{ib - a_* k} = -\frac{ipI l}{ib - ipIk}, \quad (27)$$

где  $a_* = ipI$ , а функции  $b, k, l$  выражаются по формулам (21), содержащим  $\varepsilon$ . Формулы (21) позволяют найти действительную и мнимую части функции  $\alpha_R(\xi^{(5)}, \varepsilon) = \alpha_{R1}(\xi^{(5)}, \varepsilon) + i\alpha_{R2}(\xi^{(5)}, \varepsilon)$ . Подставив их вместо  $\alpha, \beta$  в уравнения поступательного движения и продольного вращения (19), получаем замкнутую систему дифференциальных уравнений седьмого порядка ( $m_{1\varepsilon}$ -систему), которая в векторной записи имеет вид

$$\dot{\xi} = f(\xi, \varepsilon) + f_1(\xi, \varepsilon)\alpha_{R1}(\xi, \varepsilon) + f_2(\xi, \varepsilon)\alpha_{R2}(\xi, \varepsilon). \quad (28)$$

Определяемую ею модель траектории снаряда назовем  $m_{1\varepsilon}$ -моделью.

Чтобы при выводе оценок учесть изменение порядков рассматриваемых функций вместе с изменением скорости  $v$ , удобно представлять эти функции в виде суммы произведений множителей вида  $\varepsilon^m v^n$  на функции, имеющие порядок 1 во всей области изменения фазовых переменных. Такие представления уже использовались в (19), (21). Назовем их  $\varepsilon v$ -представлениями.

Рассмотрим формулы (25), (27), определяющие положения динамического равновесия  $d = d_1 + id_2, \alpha_R = \alpha_{R1} + i\alpha_{R2}$  в  $m_{2\varepsilon}$ -системе и  $m_{1\varepsilon}$ -системе. Запишем эти формулы, умножив обе их части на знаменатели правых частей. Учитывая, что  $a = \varepsilon^2 v A_1 + ipI$  согласно (21), имеем

$$d[ib - (\varepsilon^2 v A_1 + ipI)k] = -(\varepsilon^2 v A_1 + ipI)l, \quad \alpha_R(b - pIk) = -pIl. \quad (29)$$

Найдем разность  $u = d - \alpha_R$ . Подставив в первую формулу (29) выражение  $d = \alpha_R + u$ , с учетом второй формулы получаем

$$u = \frac{\varepsilon^2 v A_1 b l}{[ib - (\varepsilon^2 v A_1 + ipI)k](b - pIk)}. \quad (30)$$

В определении (21) функции  $b(y, v, p, \varepsilon)$  функция  $B_2(y, v)$  имеет порядок 1 в рассматриваемой области изменения фазовых переменных, т.е.  $B_2(y, v) = O^*(1)$ . Поэтому функция  $b(y, v, p, \varepsilon)$  представляется в виде

$$b(y, v, p, \varepsilon) = v^3 B(y, v, p, \varepsilon), \quad (31)$$

где функция  $B(y, v, p, \varepsilon) = O^*(1)$  не обращается в нуль в рассматриваемой области изменения фазовых переменных. Далее, из формул (21) для функций  $k(y, v, p, \varepsilon)$  и  $l(v, \theta, \psi, \varepsilon)$  следует, что эти функции представляются в виде

$$k(y, v, p, \varepsilon) = \varepsilon^2 v^2 K(y, v, p, \varepsilon), \quad l(v, \theta, \psi, \varepsilon) = \varepsilon^2 v^{-1} L(v, \theta, \psi, \varepsilon), \quad (32)$$

где  $K(y, v, p, \varepsilon), L(v, \theta, \psi, \varepsilon) = O^*(1)$ . С помощью формул (31), (32) получаем из (30)

$$u = -\frac{\varepsilon^4 A_1 L}{iv^3 B \left[ 1 - (\varepsilon^2 v A_1 + ipI) \frac{\varepsilon^2 K}{ivB} \right] \left( 1 - pI \frac{\varepsilon^2 K}{vB} \right)}.$$

Согласно (22), здесь дроби в скобках имеют порядок  $\varepsilon^2/v = O(\varepsilon^{3/2})$ , и поэтому для функции  $u = u(\xi^{(5)}, \varepsilon) = d - \alpha_R$  справедливо представление

$$u = u(\xi^{(5)}, \varepsilon) = \varepsilon^4 v^{-3} U(\xi^{(5)}, \varepsilon), \quad U(\xi^{(5)}, \varepsilon) = O^*(1). \quad (33)$$

Пятое и шестое уравнения  $m_{2\varepsilon}$ -системы (26) эквивалентны уравнению

$$\dot{\theta} + i\varepsilon^2 \dot{\psi} = \widehat{f}(\xi, \varepsilon) + \widehat{f}_d(\xi, \varepsilon) d(\xi, \varepsilon), \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi, \varepsilon) &= \varepsilon^4 g v^{-1} (-\cos \theta + i\varepsilon^2 \psi \sin \theta), \quad \widehat{f}_d(\xi, \varepsilon) = \varepsilon^4 v^2 K(\xi^{(3)}), \\ K(\xi^{(3)}) &= K_1(y, v) + iK_2(y, v, p), \quad d(\xi, \varepsilon) = d_1(\xi^{(5)}, \varepsilon) + id_2(\xi^{(3)}, \varepsilon). \end{aligned} \quad (35)$$

После замены в уравнении (34) величины  $d$  по формуле  $d = \alpha_R + u$  это уравнение принимает вид

$$\dot{\theta} + i\varepsilon^2 \dot{\psi} = \widehat{g}(\xi, \varepsilon) + \widehat{g}_u(\xi, \varepsilon), \quad (36)$$

где

$$\widehat{g}(\xi, \varepsilon) = \widehat{f}(\xi, \varepsilon) + \widehat{f}_d(\xi, \varepsilon) \alpha_R(\xi, \varepsilon), \quad \widehat{g}_u(\xi, \varepsilon) = \widehat{f}_d(\xi, \varepsilon) u(\xi, \varepsilon).$$

Здесь функция  $\widehat{g}(\xi, \varepsilon)$  является комплексной записью правых частей уравнений для  $\dot{\theta}, \varepsilon^2 \dot{\psi}$  в  $m_{1\varepsilon}$ -системе (28). Поэтому функция  $\widehat{g}_u(\xi, \varepsilon)$  является комплексной записью тех членов в правых частях таких уравнений в  $m_{2\varepsilon}$ -системе, которые характеризуют ее отличие от  $m_{1\varepsilon}$ -системы. С учетом представлений (33), (35) имеем

$$\widehat{g}_u(\xi, \varepsilon) = \varepsilon^8 v^{-1} K(\xi) U(\xi) = \varepsilon^8 v^{-1} G_u(\xi), \quad G_u(\xi) = O^*(1). \quad (37)$$

Равенство (36) является комплексной записью уравнений для  $\dot{\theta}, \varepsilon^2 \dot{\psi}$  в  $m_{2\varepsilon}$ -системе. Поэтому после подстановки в него решения  $\xi_{2\varepsilon}(t, \varepsilon)$  данной системы оно становится тождеством по  $t, \varepsilon$ . Заменяв в этом тождестве время  $t$  на переменную интегрирования  $\tau$  и проинтегрировав обе его части в пределах от  $t_0$  до  $t$ , получаем комплексное интегральное тождество

$$\begin{aligned} \theta_{2\varepsilon}(t, \varepsilon) + i\varepsilon^2 \psi_{2\varepsilon}(t, \varepsilon) &= \theta_{2\varepsilon}(t_0, \varepsilon) + i\varepsilon^2 \psi_{2\varepsilon}(t_0, \varepsilon) + \\ &+ \int_{t_0}^t \widehat{g}(\xi_{2\varepsilon}(\tau, \varepsilon), \varepsilon) d\tau + \widehat{h}_u(t, \varepsilon), \quad t \in [t_0, t_1], \end{aligned} \quad (38)$$

где, при учете (37),

$$\widehat{h}_u(t, \varepsilon) = \int_{t_0}^t \widehat{g}_u(\xi_{2\varepsilon}(\tau, \varepsilon), \varepsilon) d\tau = \int_{t_0}^t \varepsilon^8 v_{2\varepsilon}^{-1}(\tau, \varepsilon) G_u(\xi_{2\varepsilon}(\tau, \varepsilon), \varepsilon) d\tau. \quad (39)$$

Согласно (22), (37) имеем  $v_{2\varepsilon}^{-1} = O(\varepsilon^{-1/2})$ ,  $G_u = O^*(1)$ . Поэтому подынтегральная функция в (39) равна  $O(\varepsilon^{15/2})$ . После ее интегрирования на промежутке длины  $t - t_0 = O_+(\varepsilon^{-3})$  получаем  $\widehat{h}_u(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{9/2})$ , и комплексное интегральное тождество (38), соответствующее пятому и шестому уравнениям  $m_{2\varepsilon}$ -системы, принимает вид

$$\begin{aligned} \theta_{2\varepsilon}(t, \varepsilon) + i\varepsilon^2 \psi_{2\varepsilon}(t, \varepsilon) &= \theta_{2\varepsilon}(t_0, \varepsilon) + i\varepsilon^2 \psi_{2\varepsilon}(t_0, \varepsilon) + \\ &+ \int_{t_0}^t \widehat{g}(\xi_{2\varepsilon}(\tau, \varepsilon), \varepsilon) d\tau + \varepsilon^{9/2} \widehat{H}_u(t, \varepsilon), \quad \widehat{H}_u(t, \varepsilon) = O(1), \quad t \in [t_0, t_1]. \end{aligned} \quad (40)$$

Получим векторный аналог этого тождества. Полагая  $u = u_1 + iu_2$ , имеем  $d = d_1 + id_2 = \alpha_{R1} + i\alpha_{R2} + u_1 + iu_2$ . Отсюда находим  $d_1 = \alpha_{R1} + u_1$ ,  $d_2 = \alpha_{R2} + u_2$ . Подставив эти выражения в  $m_{2\varepsilon}$ -систему (26), записываем ее в векторном виде

$$\dot{\xi} = g(\xi, \varepsilon) + g_u(\xi, \varepsilon), \quad (41)$$

где

$$\begin{aligned} g(\xi, \varepsilon) &= f(\xi, \varepsilon) + f_1(\xi, \varepsilon)\alpha_{R1}(\xi, \varepsilon) + f_2(\xi, \varepsilon)\alpha_{R2}(\xi, \varepsilon), \\ g_u(\xi, \varepsilon) &= f_1(\xi, \varepsilon)u_1(\xi, \varepsilon) + f_2(\xi, \varepsilon)u_2(\xi, \varepsilon). \end{aligned} \quad (42)$$

У вектор-функций  $f_1, f_2(\xi, \varepsilon)$  отличны от нуля только их пятые и шестые компоненты. Поэтому векторное интегральное тождество, которое получается в результате подстановки в  $m_{2\varepsilon}$ -систему (41) ее решения  $\xi_{2\varepsilon}(t, \varepsilon)$  и интегрирования от  $t_0$  до  $t$ , записывается аналогично комплексному интегральному тождеству (40) для этой системы:

$$\begin{aligned} \xi_{2\varepsilon}(t, \varepsilon) &= \xi_{2\varepsilon}(t_0, \varepsilon) + \int_{t_0}^t g(\xi_{2\varepsilon}(\tau, \varepsilon), \varepsilon) d\tau + \\ &+ \varepsilon^{9/2}H_u(t, \varepsilon), \quad H_u(t, \varepsilon) = O(1), \quad t \in [t_0, t_1]. \end{aligned} \quad (43)$$

В (43) вектор-функция  $g(\xi, \varepsilon)$ , согласно ее определению (42), является правой частью  $m_{1\varepsilon}$ -системы (28). Следовательно, векторное интегральное тождество, которое получается в результате подстановки в  $m_{1\varepsilon}$ -систему (28) ее решения  $\xi_{1\varepsilon}(t, \varepsilon)$  и интегрирования от  $t_0$  до  $t$ , имеет вид

$$\xi_{1\varepsilon}(t, \varepsilon) = \xi_{1\varepsilon}(t_0, \varepsilon) + \int_{t_0}^t g(\xi_{1\varepsilon}(\tau, \varepsilon), \varepsilon) d\tau, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (44)$$

По определению решений  $\xi_{1\varepsilon}, \xi_{2\varepsilon}, \xi_{l\varepsilon}(t, \varepsilon)$  имеем  $\xi_{1\varepsilon}(t_0, \varepsilon) = \xi_{2\varepsilon}(t_0, \varepsilon) = \xi_{l\varepsilon}(t_0, \varepsilon)$ .

Для получения из (43), (44) оценки нормы разности  $\|\xi_{1\varepsilon}(t\varepsilon) - \xi_{2\varepsilon}(t\varepsilon)\|$  решений  $m_{1\varepsilon}$ -системы и  $m_{2\varepsilon}$ -системы необходимо определить постоянную Липшица  $l_g$  функции  $g(\xi, \varepsilon)$  по  $\xi$  в рассматриваемой области изменения вектора  $\xi$ . Порядок этой постоянной по  $\varepsilon$  равен порядку максимальной по модулю частной производной компонент вектор-функции  $g(\xi, \varepsilon)$  по тем компонентам вектора  $\xi$ , от которых функция  $g(\xi, \varepsilon)$  фактически зависит, то есть по компонентам вектора  $\xi^{(5)} = (y, v, \theta, \varepsilon^2\psi, p)$ . Чтобы определить порядок  $l_g$ , сначала рассмотрим формулу (27) для  $\alpha_R$ . Подставив в нее выражения (31), (32) для  $b, k, l$ , получаем формулу  $\alpha_R = -\varepsilon^2 p I L / [v^4 B(1 - p I \varepsilon^2 K / v B)]$ , в которой  $B, K, L = O^*(1)$ . Из (22) следует, что дробь в круглых скобках равна  $O(\varepsilon^{3/2})$ . Поэтому справедливо представление

$$\alpha_R = \alpha_R(\xi^{(5)}, \varepsilon) = \varepsilon^2 v^{-4} A_R(\xi^{(5)}, \varepsilon), \quad A_R = O^*(1).$$

Из него следуют аналогичные представления для действительной и мнимой частей функции  $\alpha_R$ :

$$\begin{aligned} \alpha_{R1}(\xi^{(5)}, \varepsilon) &= \varepsilon^2 v^{-4} A_{R1}(\xi^{(5)}, \varepsilon), \quad A_{R1} = O^*(1), \\ \alpha_{R2}(\xi^{(5)}, \varepsilon) &= \varepsilon^2 v^{-4} A_{R2}(\xi^{(5)}, \varepsilon), \quad A_{R2} = O^*(1). \end{aligned}$$

Тогда уравнения  $m_{1\varepsilon}$ -системы (28), определяющие  $\dot{\theta}$ ,  $\varepsilon^2\dot{\psi}$ , записываются в виде

$$\dot{\theta} = -\varepsilon^4 g v^{-1} \cos \theta + \varepsilon^6 v^{-2} F_{\theta}(\xi^{(5)}, \varepsilon), \quad \varepsilon^2 \dot{\psi} = -\varepsilon^6 g v^{-1} \psi \sin \theta + \varepsilon^6 v^{-2} F_{\psi}(\xi^{(5)}, \varepsilon), \quad (45)$$

где функции  $F_{\theta}, F_{\psi}(\xi^{(5)}, \varepsilon)$  равны  $O(1)$  вместе со своими частными производными по компонентам вектора  $\xi^{(5)}$ . В соответствии с (22) получаем  $v^{-1} = O_+(\varepsilon^{-1/2})$ , и поэтому максимальные по модулю частные производные правых частей уравнений (45) по компонентам вектора  $\xi^{(5)}$  равны  $O_+(\varepsilon^3)$ . Такой же порядок имеют максимальные по модулю частные производные остальных компонент определенной в (42) вектор-функции  $g(\xi, \varepsilon)$ , которая является правой частью  $m_{1\varepsilon}$ -системы (28). Следовательно,  $l_g = O_+(\varepsilon^3)$ , и условие Липшица для функции  $g(\xi, \varepsilon)$  записывается в виде  $\|g(\xi_1, \varepsilon) - g(\xi_2, \varepsilon)\| \leq \varepsilon^3 L_g \|\xi_1 - \xi_2\|$ , где  $L_g > 0$  — постоянная порядка 1.

Поэтому из интегральных тождеств (43), (44) следует неравенство

$$\|\xi_{1\varepsilon}(t, \varepsilon) - \xi_{2\varepsilon}(t, \varepsilon)\| \leq \varepsilon^3 L_g \int_{t_0}^t \|\xi_{1\varepsilon}(\tau, \varepsilon) - \xi_{2\varepsilon}(\tau, \varepsilon)\| d\tau + \varepsilon^{9/2} C, \quad t \in [t_0, t_1],$$

где  $C > 0$  — постоянная. Воспользовавшись неравенством Гронуолла (см. [14]), получаем при  $t - t_0 = O_+(\varepsilon^{-3})$  оценку

$$\|\xi_{1\varepsilon}(t, \varepsilon) - \xi_{2\varepsilon}(t, \varepsilon)\| \leq \varepsilon^{9/2} \exp \varepsilon^3 L_g (t - t_0) = O_+(\varepsilon^{9/2}), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Огрубляя ее до целой степени  $\varepsilon$ , приходим к искомой оценке нормы разности решений  $m_{1\varepsilon}$ -системы и  $m_{2\varepsilon}$ -системы при одинаковых начальных условиях:

$$\|\xi_{1\varepsilon}(t, \varepsilon) - \xi_{2\varepsilon}(t, \varepsilon)\| = O_+(\varepsilon^4), \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (46)$$

В [12, 13] установлена кубическая по  $\varepsilon$  оценка погрешности определения траектории полета снаряда  $m_{2\varepsilon}$ -системой по сравнению с ее определением  $l_{\varepsilon}$ -системой при тех же начальных условиях для  $\xi$ :

$$\|\xi_{l_{\varepsilon}}(t, \varepsilon) - \xi_{2\varepsilon}(t, \varepsilon)\| = O_+(\varepsilon^3), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Из нее при учете (46) следует такая же по порядку оценка погрешности определения траектории  $m_{1\varepsilon}$ -системой по сравнению с ее определением  $l_{\varepsilon}$ -системой при тех же начальных условиях для  $\xi$ :

$$\|\xi_{l_{\varepsilon}}(t, \varepsilon) - \xi_{1\varepsilon}(t, \varepsilon)\| = O_+(\varepsilon^3), \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (47)$$

## 5. Числовые оценки и результаты компьютерного моделирования.

В данной работе малый параметр  $\varepsilon$  введен вместо числа 0.1, а в качестве масштабов нормализованных фазовых переменных при выводе оценок используются характерные числовые значения модулей соответствующих исходных переменных, приведенные в табл. 1. Поэтому каждая из полученных аналитических оценок вида  $\phi = O(\varepsilon^n)$  влечет за собой числовую оценку  $\phi = O(0.1^n)$ , т. е. неравенство  $|\phi| \leq 0.1^n C$ . Однако постоянная  $C > 0$  здесь может не быть близкой к 1, и поэтому, строго говоря, нельзя гарантировать соответствие между аналитическими и числовыми оценками.

Но, как следует из проведенных расчетов, в данной работе такое соответствие имеет место. Это достигается благодаря гибкой процедуре введения малого параметра, в которой учитывается десятичный порядок каждого члена в уравнениях

движения, а также благодаря использованию специальной математической техники вывода оценок.

Полученные выше аналитические оценки (46), (47) для решений  $l_\varepsilon$ -,  $m_{1\varepsilon}$ - и  $m_{2\varepsilon}$ -систем записаны с использованием вектора  $\xi$ , который определен в (23) через нормализованные фазовые переменные и параметр  $\varepsilon$ . Поскольку параметр  $\varepsilon$  введен вместо числа 0.1, а в качестве масштабов нормализованных переменных взяты указанные в табл. 1 характерные значения модулей соответствующих исходных переменных, имеем для вектора  $\xi$  следующее определение через исходные размерные переменные:

$$\xi = \left( \frac{x}{10^4 \text{ м}}, \frac{y}{10^4 \text{ м}}, \frac{z}{10^4 \text{ м}}, \frac{v}{10^3 \text{ мс}^{-1}}, \theta, \psi, \frac{p}{10^3 \text{ с}^{-1}} \right). \quad (48)$$

Норма вектора  $\xi$  принята равной максимальному из модулей его компонент. Тогда соответствие аналитических и числовых оценок означает, что аналитические оценки (46), (47) влекут за собой числовые оценки для норм разностей векторов вида (48):

$$\|\xi_1(t) - \xi_2(t)\| \leq 0.1^4 C_1, \quad \|\xi_l(t) - \xi_1(t)\| \leq 0.1^3 C_2, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (49)$$

а следовательно, для модулей разностей всех их компонент. Здесь функции  $\xi_1, \xi_2, \xi_l(t)$  определены на решениях  $m_{1-}$ ,  $m_{2-}$  и  $l$ -систем при одних и тех же начальных условиях для  $\xi$ , а постоянные  $C_1, C_2$  близки к 1.

С учетом (48) из первой оценки (49) следует, что погрешность определения координат  $x, y, z$  центра масс  $m_{1-}$  системой по сравнению с  $m_{2-}$  системой может достигать нескольких метров. Вторая оценка (49) показывает, что погрешность определения координат  $x, y, z$  центра масс  $m_{1-}$  системой по сравнению с  $l$ -системой может достигать десятков метров.

Приведем результаты компьютерного моделирования для снаряда калибра 152 мм с массой 43.56 кг, для которого технические характеристики и таблицы зависимостей аэродинамических коэффициентов от числа Маха даны в [13]. Расчеты проводились для  $m_{1-}$ ,  $m_{2-}$  и  $l$ -систем, записанных с использованием ненормализованных фазовых переменных, определенных в системе единиц метр-килограмм-секунда. Для решения  $l$ -системы (4), (5) взяты начальные условия:  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$  м,  $v_0 = 655 \text{ мс}^{-1}$ ,  $\theta_0 = \pi/4$ ,  $\psi_0 = 0$ ,  $p_0 = 1100 \text{ с}^{-1}$ ,  $q_0 = r_0 = 1 \text{ с}^{-1}$ ,  $\alpha_0 = \beta_0 = 0.1^2$ . Рассматриваются решения  $m_{1-}$  системы и  $m_{2-}$  системы при таких же начальных условиях для переменных  $x, y, z, v, \theta, \psi, p$ .

В табл. 2 представлены результаты численного интегрирования  $l$ -,  $m_{1-}$  и  $m_{2-}$  систем. В последнем столбце табл. 2 даны числовые значения норм разностей  $\|\xi_l - \xi_1\|$ ,  $\|\xi_1 - \xi_2\|$  векторов  $\xi_l, \xi_1, \xi_2(t)$ , которые по формулам вида (48) определены в данный момент времени через значения фазовых переменных в предыдущих столбцах. В каждый из указанных моментов времени первая из этих норм характеризует погрешность решения  $m_{1-}$  системы по сравнению с решением  $l$ -системы при тех же начальных условиях для переменных  $x, y, z, v, \theta, \psi, p$ , а вторая норма характеризует разность решений  $m_{1-}$  системы и  $m_{2-}$  системы при одинаковых начальных условиях. Здесь норма вектора  $\xi_l - \xi_1$  или  $\xi_1 - \xi_2$  равна максимальному из модулей его компонент. В последнем столбце в скобках дан номер компоненты, на которой достигается приведенное числовое значение максимума. Нормы  $\|\xi_l - \xi_1\|$ ,  $\|\xi_1 - \xi_2\|$  в последнем столбце табл. 2 имеют числовые порядки, предсказанные аналитическими оценками (46), (47).

Полученные в данной работе оценки (46), (47) достигаются для траекторий с углом возвышения  $\theta_0$ , близким к углу максимальной дальности. В случае небольших



Таблица 2. Результаты численного интегрирования  $l$ -,  $m_1$ - и  $m_2$ -систем

	$t$	$x$	$y$	$z$	$v$	$\theta$	$\psi$	$p$	$\ \xi_l - \xi_1\ $ $\ \xi_1 - \xi_2\ $
$l$	0	0	0	0	655	0.78540	0	1100	0
$m_1$	0	0	0	0	655	0.78540	0	1100	0
$m_2$	0	0	0	0	655	0.78540	0	1100	0
$l$	20	6598.0	4990.0	37.071	284.78	0.38054	$1.1257 \cdot 10^{-2}$	953.26	$7.9 \cdot 10^{-4}$ (6)
$m_1$	20	6597.4	4990.7	30.591	284.78	0.38051	$1.0469 \cdot 10^{-2}$	953.27	$7.4 \cdot 10^{-5}$ (5)
$m_2$	20	6597.5	4990.5	30.763	284.78	0.38044	$1.0537 \cdot 10^{-2}$	953.27	
$l$	40	11632	5144.8	146.54	256.25	-0.34675	$3.0876 \cdot 10^{-2}$	882.77	$1.0 \cdot 10^{-3}$ (3)
$m_1$	40	11631	5144.6	136.42	256.28	-0.34680	$3.0076 \cdot 10^{-2}$	882.77	$1.6 \cdot 10^{-4}$ (6)
$m_2$	40	11632	5143.8	137.21	256.30	-0.34694	$3.0234 \cdot 10^{-2}$	882.77	
$l$	60	16171	1668.0	332.20	322.50	-0.88192	$3.0062 \cdot 10^{-2}$	798.83	$1.5 \cdot 10^{-3}$ (3)
$m_1$	60	16171	1668.8	317.13	322.50	-0.88159	$2.9265 \cdot 10^{-2}$	798.84	$1.8 \cdot 10^{-4}$ (3)
$m_2$	60	16171	1667.0	318.91	322.50	-0.88174	$2.9434 \cdot 10^{-2}$	798.82	
$l$	66.3334	17391	0	391.57	329.45	-0.99312	$2.7343 \cdot 10^{-2}$	762.63	$1.7 \cdot 10^{-3}$ (3)
$m_1$	66.3377	17392	0	374.98	329.45	-0.99287	$2.6626 \cdot 10^{-2}$	762.61	$2.1 \cdot 10^{-4}$ (3)
$m_2$	66.3306	17391	0	377.04	329.45	-0.99291	$2.6794 \cdot 10^{-2}$	762.63	

углов возвышения соответствующие оценки имеют более высокие порядки по  $\varepsilon$ , так как в этом случае уменьшается время полета снаряда, а скорость его центра масс сохраняет свой порядок на всей траектории полета.

## Литература

1. Lieske R. F., Reiter M. L. Equations of motion for a modified point mass trajectory. Ballistic Research Laboratory reports. No. 1314. 1966.
2. The Modified Point Mass and Five Degrees of Freedom Trajectory Models. 3rd ed. STANAG 4355. 2009. 95 p.
3. McCoy R. L. Modern exterior ballistics. Atglen: Schiffer publishing Ltd., 2012.
4. Коносевиц Б. И. Усредненные уравнения поступательного движения осесимметричного снаряда // Доповіді НАН України. 1999. № 6. С. 69–73.
5. Коносевиц Б. И. О применении асимптотических методов в теории полета осесимметричного снаряда // Механика твердого тела. 2001. Вып. 31. С. 63–75.
6. Коносевиц Б. И. К теории полета осесимметричного снаряда // Механика твердого тела. 1999. Вып. 28. С. 51–62.
7. Коносевиц Б. И. Исследование динамики полета осесимметричного снаряда // Механика твердого тела. 2000. Вып. 30. С. 109–119.
8. Коносевиц Б. И. Оценка погрешности линеаризованных уравнений движения осесимметричного снаряда // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. Вып. 6. С. 930–941.
9. Пугачев В. С. Общая задача о движении вращающегося артиллерийского снаряда в воздухе // Тр. ВВИА им. Жуковского. 1940. Вып. 70.
10. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. 2-е изд. М.: Наука, 1981.
11. Коносевиц Б. И. Оценка погрешности асимптотического представления угловых колебаний оси симметрии вращающегося твердого тела // Прикладная механика. 2014. Т. 50, № 4. С. 102–116.
12. Коносевиц Б. И., Коносевиц Ю. Б. Корректность модифицированной модели материальной точки в теории полета снаряда // Механика твердого тела. 2015. Вып. 45. С. 11–25.
13. Konosevich B., Konosevich Yu. Error estimate of the modified point-mass trajectory model of an artillery shell // Nonlinear Dynamics. 2017. Vol. 90, no. 1. P. 203–221. <https://doi.org/10.1007/s11071-017-3655-2>
14. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

Статья поступила в редакцию 20 ноября 2018 г.;  
 после доработки 19 декабря 2018 г.;  
 рекомендована в печать 21 марта 2019 г.

Контактная информация:

Коносевич Борис Иванович — д-р физ.-мат. наук; konos.donetsk@yandex.ru

Коносевич Юлия Борисовна — канд. физ.-мат. наук; konos.donetsk@yandex.ru

## Comparison of two modified point-mass trajectory models of an artillery shell

*B. I. Konosevich, Yu. B. Konosevich*

Institute of applied mathematics and Mechanics, ul. R. Luxemburg, 74, Donetsk, 83114, Ukraine

**For citation:** Konosevich B. I., Konosevich Yu. B. Comparison of two modified point-mass trajectory models of an artillery shell. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2019, vol. 6 (64), issue 3, pp. 463–481.

<https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.311> (In Russian)

The modified point-mass trajectory model of an artillery shell, proposed by R. Lieske and M. Reiter, determines the trajectory with the high accuracy and requires tens of times less computational resources than the rigid body trajectory model. This modified model is based on an approximate implicit formula for the dynamic equilibrium position of the symmetry axis of the shell, obtained by the authors under some physically motivated assumptions. In the present article, the motion of a fast spinning artillery shell as a rigid body is described by an ODE system, where expressions of aerodynamic forces and moments are taken, which are linearized in the total angle of attack. It is established that the definition of the dynamic equilibrium position of the symmetry axis of the shell, proposed by R. Lieske and M. Reiter, differs from its definition as a quasi-stationary solution of the equations of angular motion of the symmetry axis only by the lack of the pitch damping moment coefficient. By small parameter methods, an error estimate is obtained for the trajectory, describing by the modified point-mass trajectory model, in comparison with the trajectory, describing by the linearized ODE system with the same initial data for the variables of translational motion and axial rotation.

*Keywords:* artillery shell, flight dynamics, dynamic equilibrium position, modified point-mass trajectory model.

## References

1. Lieske R. F., Reiter M. L., “Equations of motion for a modified point mass trajectory”, *Ballistic Research Laboratory reports*, No. 1314 (1966).
2. *The Modified Point Mass and Five Degrees of Freedom Trajectory Models* (3rd ed., STANAG 4355, 2009).
3. McCoy R. L., *Modern exterior ballistics* (Schiffer publishing Ltd., Atglen, 2012).
4. Konosevich B. I., “Averaged equations of translation motion of an axially symmetric shell”, *Dopovidi NAN Ukrainy* (6), 69–73 (1999). (In Russian)
5. Konosevich B. I., “On application of asymptotic methods in the flight theory of an axially symmetric shell”, *Mechanics of rigid body*, issue 31, 63–75 (2001). (In Russian)
6. Konosevich B. I., “On the flight theory of an artillery shell”, *Mechanics of rigid body*, issue 28, 51–62 (1999). (In Russian)
7. Konosevich B. I., “Investigation of the flight dynamics of an artillery shell”, *Mechanics of rigid body*, issue 30, 109–119 (2000). (In Russian)
8. Konosevich B. I., “An estimate of the error of the linearized equations of motion of an axisymmetric projectile”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **72** (6), 930–941 (2008).
9. Pugachev V. S., “The general problem of motion of a spinning artillery shell in the air”, *Trudy VVIA im. Zhukovskogo*, issue 70 (1940). (In Russian)
10. Moiseyev N. N., *Asymptotic methods of nonlinear mechanics* (2nd ed., Nauka Publ., Moscow, 1981). (In Russian)

11. Konosevich B. I., “Estimating the error an asymptotic solution describing the angular oscillations of the axis of symmetry of a rotating rigid body”, *International Applied Mechanics* **50** (4), 446–458 (2014).
12. Konosevich B. I., Konosevich Yu. B. “Correctness of the modified point-mass model in the flight theory of the shell”, *Mechanics of rigid body* 45, 11–25 (2015). [in Russian].
13. Konosevich B., Konosevich Yu., “Error estimate of the modified point-mass trajectory model of an artillery shell”, *Nonlinear Dynamics* **90** (1), 203–221 (2017). <https://doi.org/10.1007/s11071-017-3655-2>
14. Hartman Ph., *Ordinary differential equations* (Wiley, New York, 1964).

Received: November 20, 2018

Revised: December 19, 2018

Accepted: March 21, 2019

#### Author's information:

*Boris I. Konosevich* — [konos.donetsk@yandex.ru](mailto:konos.donetsk@yandex.ru)

*Yuliya B. Konosevich* — [konos.donetsk@yandex.ru](mailto:konos.donetsk@yandex.ru)

## ХРОНИКА

20 февраля 2019 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Санкт-Петербургском Доме ученых РАН выступили кандидат технических наук, доцент А. М. Денисов и кандидаты технических наук П. С. Гончаров, Л. П. Зозуля, А. В. Кухтин (ВКА имени А. Ф. Можайского) с докладом на тему «Анализ текущего уровня загрязнения околоземного космического пространства и меры по снижению темпа нарастания количества космического мусора».

Краткое содержание доклада:

Проведен анализ текущего уровня загрязнения околоземного космического пространства твердыми частицами техногенного и естественного происхождения, представляющими опасность для космических средств. Предложены меры по снижению темпов загрязнения околоземного космического пространства.