

## Области притяжения в обобщенной задаче Капицы\*

Д. Б. Кулижников<sup>1</sup>, П. Е. Товстик<sup>1</sup>, Т. П. Товстик<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

<sup>2</sup> Институт проблем машиноведения РАН,  
Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, Большой пр. В. О., 61

**Для цитирования:** Кулижников Д. Б., Товстик П. Е., Товстик Т. П. Области притяжения в обобщенной задаче Капицы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 3. С. 482–492.

<https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.312>

Рассматривается область притяжения устойчивого вертикального положения стержня в задаче Капицы и в ее обобщениях. Достаточно длинный гибкий стержень со свободным верхним концом и жестко закрепленным нижним концом теряет устойчивость вертикальной формы под действием собственного веса. Недавно были получены условия, при которых гармонические вертикальные вибрации основания делают вертикальное положение устойчивым. Обсуждается вопрос об области притяжения вертикального положения при вибрациях в случае, когда при отсутствии вибраций это положение неустойчиво. Сначала находится область притяжения в классической задаче Капицы, а затем рассматривается стержень с упруго закрепленным нижним концом, который моделирует задачу о гибком стержне. Используется асимптотический метод двухмасштабных разложений. Обнаружено, что переход стержня в вертикальное положение при вибрациях основания существенно зависит от начальной фазы возмущения. В результате оказалось, что область притяжения состоит из двух частей. В одной из них переход в вертикальное положение не зависит от начальной фазы, а в другой — имеет место лишь для начальной фазы из некоторой области.

*Ключевые слова:* обобщенная задача Капицы, область притяжения вертикального положения, двухмасштабные разложения.

**1. Введение.** Рассматривается задача Капицы об устойчивости вертикального положения перевернутого маятника и ее обобщения. Задача об устойчивости вертикального положения перевернутого математического маятника с вибрирующей точкой опоры впервые была решена в работе А. Стефенсона [1], однако более детальные теоретические и экспериментальные исследования были выполнены П. Л. Капицей [2]. Различные обобщения этой задачи и приближенные методы их решения содержатся в монографии И. И. Блехмана [3].

В работах [4, 5] рассматривается обобщенная задача Капицы об устойчивости вертикального положения гибкого стержня с нижней точкой опоры, находящегося под действием собственного веса и вибраций основания. Еще из трудов Л. Эйлера известен подход, позволяющий теоретически проверить очевидный факт, что достаточно длинный стержень неустойчив, даже если он жестко закреплен снизу.

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 19.01.00280-а, 16.51.52025 МНТ-а).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2019

В работах [4, 5] показано, что при наличии вертикальных гармонических вибраций основания неустойчивое положение может стать устойчивым и найден необходимый уровень вибраций основания, при котором достигается устойчивость. При этом рассмотрена как жесткая, так и шарнирная опоры нижнего конца стержня. Задача была решена как без учета, так и с учетом распространения продольных волн в стержне. Оказалось, что учет влияния продольных волн существенно снижает уровень вибраций основания, при котором имеет место устойчивость вертикального положения.

В работах [4, 5] задача решалась в линейном приближении (в предположении, что отклонения точек стержня от вертикали малы). Решение строилось в виде отрезка ряда Фурье по собственным функциям вспомогательной краевой задачи, описывающей бифуркацию равновесия гибкого вертикального стержня под действием веса. Полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений содержит малый параметр (амплитуду возмущения) и ее решение строилось методом двухмасштабных разложений [6].

Во всех упомянутых выше задачах исследовались лишь условия устойчивости перевернутого положения стержня, вызванного вибрациями основания. Область притяжения устойчивого вертикального положения не была найдена и обсуждается ниже.

Для классического маятника Капицы область параметров возбуждения, в которой перевернутое положение устойчиво, определяется из уравнения Матье [7] (см. п. 2), а для определения области притяжения этого устойчивого положения приходим к нелинейному ОДУ, которое решается методом двухмасштабных разложений [6] (см. п. 3).

Для гибкого стержня построение области притяжения устойчивого вертикального положения существенно сложнее. Ниже рассматривается гибкий нерастяжимый стержень с жестко закрепленным нижним концом. Если длина стержня превосходит некоторую критическую величину, стержень занимает устойчивое изогнутое положение (см. п. 4). Принимая это изогнутое положение за начальное, ставим задачу выяснить, при каких условиях вибрации основания приведут стержень в вертикальное положение. Задача сводится к решению системы нелинейных уравнений в частных производных. Для ее приближенного решения планируется использовать одномерный метод конечных элементов [8], при котором гибкий стержень заменяется системой сосредоточенных масс, соединенных твердыми упруго связанными между собой стержнями. В качестве первого шага в анализе этой системы рассматриваем модельную задачу, когда стержень только один, причем его нижний конец упруго закреплен. Для этой задачи построена область притяжения (см. п. 5). В работе [9] рассматривается вертикальная вибрация тройного перевернутого маятника, который также моделирует гибкий стержень.

**2. Область притяжения для маятника Капицы.** Будем считать маятник тонким однородным недеформируемым стержнем длины  $L$ . В подвижной системе координат движение описывается уравнением

$$J\ddot{\varphi} - (mL/2)(g - a\omega^2 \sin(\omega t + \beta)) \sin \varphi = 0, \quad (2.1)$$

где  $\varphi$  — угол поворота,  $J = mL^2/3$  — момент инерции относительно точки опоры,  $m$  — масса,  $g$  — ускорение свободного падения,  $a$ ,  $\omega$ ,  $\beta$  — амплитуда, частота и начальная фаза колебаний основания.

Устойчивость вертикального положения равновесия находим из линеаризованного уравнения (2.1), записанного в безразмерных переменных,

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} - (q_0 - \alpha \sin(\hat{t} + \beta))\varphi = 0, \quad (2.2)$$

где  $\hat{t} = \omega t$  — безразмерное время (далее значок  $\wedge$  опускаем),  $q_0 = 3g/(2L\omega^2)$  — параметр нагрузки,  $\alpha = 3a/(2L)$  — малый параметр. Уравнение (2.2) — это уравнение Матье. Граница области устойчивости нулевого решения при малых  $\alpha$  известна [7]:

$$q_0 < \alpha^2/2. \quad (2.3)$$

Вернемся к нелинейному уравнению (2.1) и запишем его в виде

$$\ddot{\varphi} + n\alpha\dot{\varphi} - (q\alpha^2 - \alpha \sin(t + \beta)) \sin \varphi = 0, \quad q_0 = \alpha^2 q, \quad q = \frac{2Lg}{3a^2\omega^2}. \quad (2.4)$$

Здесь введены малые силы сопротивления ( $n > 0$ ), в результате чего положение равновесия  $\varphi = 0$  при выполнении условия (2.3) становится асимптотически устойчивым.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (2.4) с начальными условиями  $\varphi(0) = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$  и найдем область притяжения  $q < q_*(\varphi_0)$  устойчивого решения  $\varphi(t) \equiv 0$ . Задача осложняется тем, что искомая область притяжения  $q < q_*(\varphi_0, \beta)$  зависит еще и от начальной фазы возмущающей силы  $\beta$ , контролировать которую нежелательно. Поэтому будем искать две области притяжения:

$$\begin{aligned} G_a(\varphi_0) : \quad q < q_*^-(\varphi_0), \quad q_*^-(\varphi_0) &= \min_{\beta \in [0, 2\pi]} q_*(\varphi_0, \beta), \\ G_p(\varphi_0) : \quad q_*^-(\varphi_0) < q < q_*^+(\varphi_0), \quad q_*^+(\varphi_0) &= \max_{\beta \in [0, 2\pi]} q_*(\varphi_0, \beta). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Для значений  $q$  из области  $G_a$  при всех  $\beta$  будет

$$\varphi(t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.6)$$

Для значений  $q$  из области  $G_p$  соотношение (2.6) выполняется лишь для части значений  $\beta$ , а в области  $G_0$  (при  $q > q_*^+(\varphi_0)$ ) соотношение (2.6) не выполняется независимо от  $\beta$  (будет  $\varphi(t) \rightarrow \pm\pi$  при  $t \rightarrow \infty$ ).

Перегрузка  $\zeta$  при вибрациях основания связана с параметром  $q$  формулой

$$\zeta = \frac{a\omega^2}{g} = \frac{4L}{3aq} = \frac{2}{\alpha q}. \quad (2.7)$$

**3. Двухмасштабное разложение.** Наличие малого параметра  $\alpha$  в уравнении (2.4) позволяет использовать двухмасштабное разложение [6]. Будем искать асимптотическое решение уравнения (2.4) в виде

$$\varphi(t, \theta, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} (U_m(\theta) + V_m(t, \theta))\alpha^m, \quad \int_0^{2\pi} V_m(t, \theta) dt = 0, \quad m = 0, 1, \dots, \quad (3.1)$$

где  $\theta = \alpha t$  — медленное время и

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad \ddot{\varphi} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2\alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial \theta} + \alpha^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}. \quad (3.2)$$

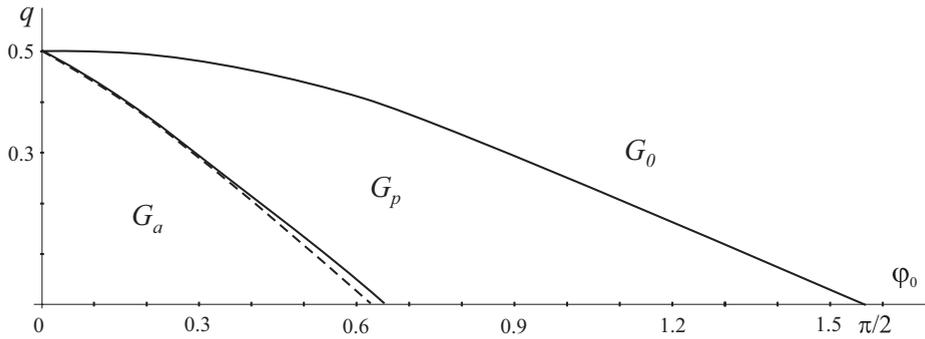


Рис. 1. Границы области притяжения.

Таблица 1. Границы областей притяжения

$\varphi_0$	$q_*^-(\varphi_0)$	$q_*^+(\varphi_0)$
0.1	0.444 (0.443)	0.498
0.2	0.372 (0.371)	0.493
0.3	0.295 (0.292)	0.477
0.4	0.215 (0.209)	0.461
0.5	0.132 (0.119)	0.439
0.6	0.048 (0.026)	0.413

Разлагая левую часть уравнения (2.4) по степеням  $\alpha$  и приравнявая нулю коэффициенты, последовательно получаем

$$V_0(t, \theta) = 0, \quad V_1(t, \theta) = \sin U_0 \sin(t + \beta), \quad \frac{\partial^2 V_2}{\partial t^2} + H(\theta, t) = 0, \quad (3.3)$$

где

$$H = \frac{\partial^2 V_1}{\partial t \partial \theta} + \frac{d^2 U_0}{d\theta^2} + n \frac{dU_0}{d\theta} - q \sin U_0 + (U_1 + V_1) \cos U_0 \sin(t + \beta). \quad (3.4)$$

Приравнявая нулю среднее по  $t$  значение функции  $H(\theta, t)$ , получаем уравнение для функции  $U_0(\theta)$ :

$$U_0'' + nU_0' + F(U_0) = 0, \quad F(U_0) = ((1/2) \cos U_0 - q) \sin U_0, \quad (3.5)$$

где штрихом обозначена производная по  $\theta$ .

Учитывая, что  $d\varphi/dt = \alpha(U_0' + \partial V_1/\partial t) = 0$ , уравнение (3.5) решаем с начальными условиями

$$U_0(0) = \varphi_0, \quad U_0'(0) = -\sin \varphi_0 \cos \beta, \quad (3.6)$$

что дает нулевое асимптотическое приближение исходной задачи (2.4).

Возьмем  $\alpha = 0.01$ ,  $n = 0.1$ . Границы областей притяжения для ряда значений начального угла отклонения  $\varphi_0$  представлены в табл. 1, а области притяжения — на рис. 1.

В столбце  $q_*^-$  приведены значения, найденные из точного уравнения (2.4) и в скобках — из приближенной задачи (3.5), (3.6) (на рис. 1 приближенная граница области  $G^-$  показана штриховой линией). Величины  $q_*^+$ , найденные из точного и приближенного уравнений, различаются незначительно. При  $\varphi_0 = 0.656$  имеем

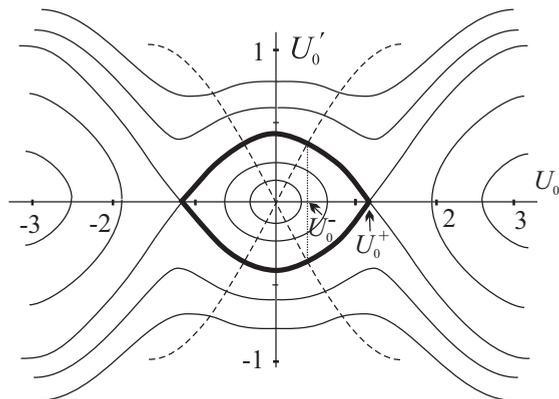


Рис. 2. Фазовая плоскость  $(U_0, U'_0)$  при  $q = 0.3$ .

$q_*^-(\varphi_0) = 0$ , поэтому при начальном угле отклонения  $\varphi_0 > 0.656 = 36.5^\circ$  нельзя добиться возвращения маятника независимо от начальной фазы  $\beta$  за счет увеличения перегрузки  $\zeta$ .

Как приближенное уравнение (3.5), так и точное уравнение (2.4) в равной мере удобны для численного интегрирования, ибо расчет занимает доли секунды. Приближенное уравнение (3.5) используем для качественного анализа. Корни уравнения  $F(U_0) = 0$  определяют точки покоя. На фазовой плоскости  $(U_0, U'_0)$  при  $U'_0 = 0$  имеются две устойчивые точки покоя  $U_0 = \pm\pi$ , устойчивая (при  $q < 1/2$ ) точка покоя  $U_0 = 0$  и две неустойчивые точки покоя  $U_0 = \pm U_0^+$ ,  $U_0^+ = \arccos(2q)$ . Через последние проходит сепаратриса

$$U'_0 = \pm(2q - \cos U_0)/\sqrt{2}, \quad (3.7)$$

выделяющая область начальных условий (3.6), при которых (при  $n > 0$ ) будет  $U_0(\theta) \rightarrow 0$  при  $\theta \rightarrow \infty$ . На рис. 2 показана фазовая плоскость  $(U_0, U'_0)$  при  $q = 0.3$ , на которой область притяжения точки  $(0, 0)$  выделена жирной линией. Согласно (3.6) при фиксированном  $U_0$  величины  $U'_0$  могут принимать значения из промежутка

$$|U'_0| \leq |\sin U_0|, \quad (3.8)$$

лежащего на рис. 2 между пунктирными линиями. Обозначим через  $U_0^-$  положительный корень уравнения  $(2q - \cos U_0)/\sqrt{2} = \sin U_0$  (при  $q = 0.3$  будет  $U_0^- = 0.262$ ). Если  $|U_0| \leq U_0^-$ , то весь промежуток (3.8) содержится в области притяжения и независимо от начальной фазы  $\beta$  (при  $n > 0$ ) будет выполнено соотношение (2.6). Если же  $U_0^- < |U_0| < U_0^+$ , то соотношение (2.6) выполняется лишь для части значений  $\beta$ , а при  $|U_0| > U_0^+$  соотношение (2.6) не выполняется независимо от  $\beta$ .

С уменьшением  $q$ , т.е. с увеличением перегрузки  $\zeta$  (см. (2.7)), область притяжения расширяется и обе границы  $U_0^-$  и  $U_0^+$  растут.

**4. Задача Капицы для гибкого стержня.** Рассмотрим гибкий вертикально расположенный нерастяжимый стержень с жестко закрепленным нижним концом и со свободным верхним концом. Достаточно длинный стержень теряет устойчивость вертикальной формы под действием собственного веса  $P$  при  $P = P_* = \lambda_* D/L^2$ ,  $\lambda_* = 7.8373$ , где  $D$  — жесткость стержня на изгиб,  $L$  — его длина [4, 5].

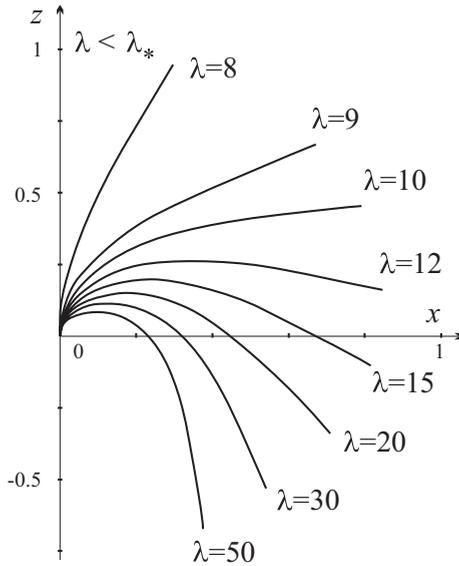


Рис. 3. Равновесные формы стержня после потери устойчивости.

В зависимости от величины  $P > P_*$  стержень принимает изогнутую форму, показанную на рис. 3 для ряда значений параметра нагрузки  $\lambda = PL^2/D$ , которая может быть найдена из системы уравнений

$$D \frac{d\varphi}{ds} = M = \rho \int_s^L (x(s_1) - x(s)) ds_1, \quad \frac{dx}{ds} = \sin \varphi, \quad \frac{dz}{ds} = \cos \varphi, \quad (4.1)$$

где  $\varphi(s)$  — угол касательной к стержню с вертикалью,  $s$  — длина дуги,  $M$  — изгибающий момент,  $\rho$  — вес единицы длины стержня.

После преобразований система (4.1) приводится к нелинейной краевой задаче

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \lambda(1-s)\sin\varphi = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(1) = 0, \quad \lambda = \frac{PL^2}{D} > \lambda_*. \quad (4.2)$$

Показано [4, 5], что вертикальные вибрации основания при определенной интенсивности колебаний приводят к устойчивости вертикального положения. Нас интересует область притяжения устойчивого вертикального положения равновесия, обусловленная вибрациями основания. Иными словами, сколь велико может быть начальное отклонение стержня от вертикали, чтобы вибрации основания привели стержень в вертикальное положение?

Колебания стержня под действием вертикальных вибраций основания описываются интегродифференциальным уравнением

$$D \frac{\partial \varphi}{\partial s} = M(s, t) = \int_s^L (F_x(s_1)(z(s_1) - z(s)) - F_z(s_1)(x(s_1) - x(s))) ds_1 \quad (4.3)$$

с неизвестным углом  $\varphi(s, t)$  отклонения от вертикали, причем

$$x(s) = \int_0^s \sin \varphi ds, \quad z(s) = \int_0^s \cos \varphi ds, \quad F_x = -\rho \ddot{x}, \quad F_z = -\rho(g + a\omega^2 \sin \omega t + \ddot{z}). \quad (4.4)$$

В статическом случае при отсутствии колебаний основания ( $a = 0$ ) уравнение (4.3) переходит в уравнение (4.1). Для решения уравнения (4.3) планируется использовать одномерный метод конечных элементов [7], при котором стержень заменяется сосредоточенными массами с упругими связями. Для получения ориентировочного ответа на вопрос об области притяжения вертикального положения при вибрациях основания рассмотрим модельную задачу.

**5. Маятник на гибкой опоре.** Рассматривается недеформируемый стержень с упруго закрепленным нижним концом. Движение стержня при наличии колебаний основания описывается уравнением

$$J\ddot{\varphi} + n\dot{\varphi} + b_0\varphi - (mL/2)(g - a\omega^2 \sin(\omega t + \beta)) \sin \varphi = 0, \quad (5.1)$$

где  $b_0$  — угловая жесткость закрепления нижнего конца, а остальные обозначения те же, что и в уравнении (2.1).

В безразмерных обозначениях уравнение (5.1) имеет вид

$$\ddot{\varphi} + n\alpha\dot{\varphi} + \alpha^2(b\varphi - q \sin \varphi) + \alpha \sin \varphi \sin(t + \beta) = 0, \quad b = \frac{4b_0L}{3ma^2\omega^2}. \quad (5.2)$$

При  $b < q$  (при отсутствии вибраций основания) вертикальное положение стержня неустойчиво. Устойчивым является положение, при котором стержень отклонен от вертикали на угол  $\varphi_0$ , определяемый из уравнения

$$b\varphi_0 = q \sin \varphi_0 \quad \text{или} \quad b = kq, \quad k = \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} < 1. \quad (5.3)$$

Нас интересует выяснение условий, при которых вибрации основания переведут стержень в вертикальное положение.

Ищем решение уравнения (5.2), удовлетворяющее начальным условиям  $\varphi(0) = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$ . Угол  $\varphi_0 < \pi$  считаем ведущим параметром задачи, а параметр жесткости считаем равным  $b = kq$ . Как и в п. 3, двухмасштабное разложение вида (3.1) в нулевом приближении для медленно меняющейся функции  $U_0(\theta)$  приводит к задаче Коши

$$U_0'' + nU_0' + F(U_0) = 0, \quad U_0(0) = \varphi_0, \quad U_0'(0) = -\sin \varphi_0 \sin \beta, \quad (5.4)$$

где  $F(U_0) = kqU_0 + ((1/2) \cos U_0 - q) \sin U_0$ . При  $n > 0$ ,  $q < q_*^+ = 1/(2(1-k))$  решение  $U_0(\theta) \equiv 0$  асимптотически устойчиво. Как и в п. 3, нашей задачей является определение области притяжения этого решения. Поэтому анализ проводим при  $q < q_*^+$ .

Траектории

$$U_0'^2 + 2 \int_0^{U_0} F(U) dU = C, \quad (5.5)$$

где  $C$  — произвольная постоянная, на фазовой плоскости  $(U_0, U_0')$  симметричны по отношению к осям  $OU_0$  и  $OU_0'$ , поэтому рассмотрим четверть плоскости  $U_0, U_0' \geq 0$ . При отсутствии трения ( $n = 0$ ) движение осуществляется по траекториям, а при  $n > 0$  происходит переход с траектории с большим значением  $C$  на траекторию с меньшим значением. Точки покоя определяем из уравнения  $F(U) = 0$ . При  $q < q_*$  имеется устойчивая точка покоя  $U_0 = 0$ . Пусть  $\varphi_0 < \pi/2$ . При  $q^- < q < q_*^+$  других точек покоя нет, а при  $q < q^-$  появляются неустойчивая точка покоя  $U_1$  и устойчивая точка покоя  $U_2$  (например, при  $\varphi_0 = 1$ ,  $q = 0.15$  будет  $U_1 = 1.706$ ,  $U_2 = 2.535$ ). При

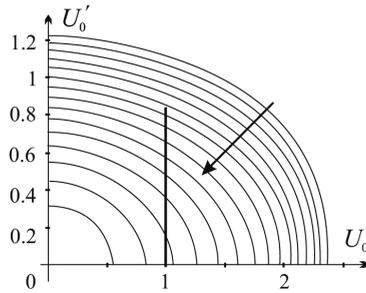


Рис. 4. Фазовая плоскость при  $\varphi_0 = 1, q = 1$ .

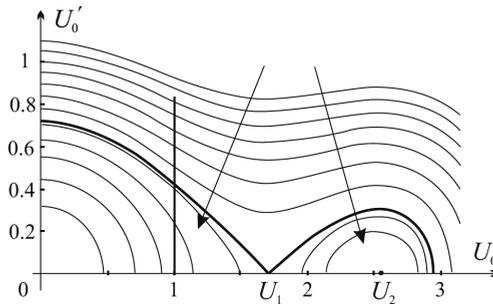


Рис. 5. Фазовая плоскость при  $\varphi_0 = 1, q = 0.1$ .

$q = q^-$  корни уравнения  $F(U) = 0$  совпадают ( $U_1 = U_2$ ), а значение  $q^-$  находим из системы уравнений  $F(U) = F'(U) = 0$  (например, при  $\varphi_0 = 1$  будет  $q^- = 0.245, U_1 = U_2 = 2.02$ ).

На рис. 4 показана фазовая плоскость при  $\varphi_0 = 1, q = 1$ . В этом случае  $U_0 = 0$  — единственная точка покоя. Направление убывания константы  $C$  показано стрелкой. Множество возможных значений производной  $|\dot{U}^0| \leq \sin \varphi_0$  изображено жирной вертикальной линией. Эта линия целиком лежит в области притяжения точки покоя  $U_0 = U'_0 = 0$ , поэтому при всех значениях начальной фазы возмущения  $\beta$  решение стремится к ней.

На рис. 5 рассмотрен случай  $\varphi_0 = 1, q = 0.1$ , в котором, кроме начала координат, есть еще две точки покоя. Через точку  $(0, U_1)$  проходит сепаратриса, выделяющая области притяжения точек  $(0, 0)$  и  $(U_2, 0)$ . Видим, что множество возможных значений величины  $|\dot{U}^0|$  лишь частично лежит в области притяжения начала координат, поэтому выполнение условия (2.6) зависит от величины  $\beta$ .

Области притяжения нулевого решения определялись в результате численного интегрирования точного уравнения (5.2) и приближенного уравнения (5.4) при  $\alpha = 0.01$  и  $n = 0.1$ . При  $q < 3$  результаты, полученные из точного уравнения (5.2), представлены на рис. 6. Приближенное уравнение (5.4) дает близкие результаты. На плоскости параметров  $(\varphi_0, q)$  представлена область абсолютного притяжения  $G_a$ , в которой сходимость (2.6) имеет место независимо от начальной фазы  $\beta$ , область относительного притяжения  $G_p$ , в которой сходимость реализуется лишь при части значений  $\beta$ , и область  $G_0$ , в которой сходимость не имеет места. Область  $G_a$  лежит в части плоскости  $\varphi_0 < \pi/2$ , а область  $G_p$  — при  $\varphi_0 < 2.48$ .

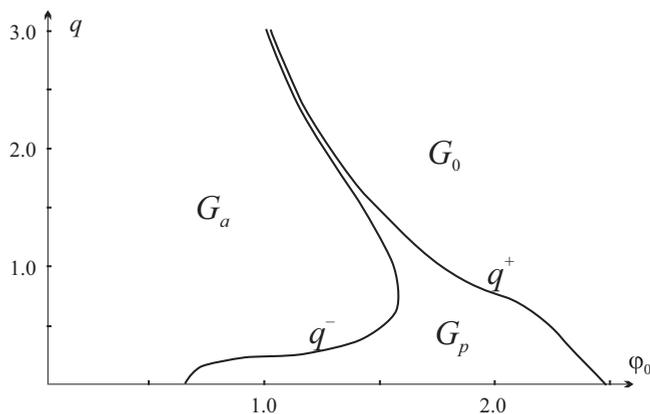


Рис. 6. Области притяжения на плоскости  $(\varphi_0, q)$ .

Таблица 2. Границы областей притяжения

$\varphi_0$	$q^-$	$q^+$	$q_*^+$
0.1	303.142 (303.119)	303.665 (303.172)	300.015
0.2	75.335 (75.332)	75.610 (75.533)	75.150
0.5	12.142 (12.142)	12.243 (12.182)	12.151
1.0	3.146 (3.146)	3.162 (3.161)	3.154

При  $q > 1.5$  границы области  $G_p$  сближаются, и с уменьшением  $\varphi_0$  величины  $q^-$  и  $q^+$  растут. В табл. 2 приведены эти величины при  $q > 3$ , полученные как из точного уравнения (5.2), так и из приближенного уравнения (5.4) (в скобках). Большие значения  $q^-$  и  $q^+$  при малых углах  $\varphi_0$  связаны с тем, что в силу (2.7) перегрузка  $\zeta = a\omega^2/g$  мала.

Из результатов табл. 2 следует, что в силу узости соответствующей части области  $G_p$  ей можно пренебречь. Табл. 2 позволяет оценить погрешность приближенного уравнения (5.4). Кроме того, здесь приведены значения границы  $q_*^+ = 1/(2(1 - \sin \varphi_0/\varphi_0))$ , полученные выше. Заметное различие величин  $q_*^+$  и  $q^+$  связано с тем, что последние были получены при наличии сопротивления  $n = 0.1$ .

**6. Обсуждение.** Найдены области притяжения устойчивого вертикального положения жесткого весомого стержня в двух задачах. В начальный момент времени стержень отклонен на некоторый угол от вертикали и неподвижен. Определяется величина угла, при котором в результате вертикальных гармонических колебаний опоры стержень возвращается в вертикальное положение. В первой из задач (в классической задаче Капицы, в которой нижний конец стержня шарнирно оперт) угол отклонения задается произвольно, и до начала действия вибраций стержень удерживается в отклоненном положении. Во второй задаче нижний конец стержня упруго закреплен от поворота. При определенном значении жесткости закрепления вертикальное положение стержня становится неустойчивым и при отсутствии колебаний опоры устойчивым становится отклоненное положение. При этом угол отклонения определяется жесткостью опоры. Последняя задача моделирует поведение гибкого стержня с жестко закрепленным нижним концом.

Оказалось, что область притяжения существенно зависит от начальной фазы колебаний основания. Используемое в работе асимптотическое двухмасштабное

разложение показало, что в начальный момент времени в зависимости от начальной фазы стержень получает дополнительный импульс, эквивалентный заданию начальной скорости. В результате область притяжения устроена следующим образом. При малых углах отклонения стержень возвращается в вертикальное положение независимо от начальной фазы. В области промежуточных значений угла отклонения возвращение реализуется лишь для части значений начальной фазы. Наконец, для достаточно больших углов отклонения возвращение в вертикальное положение невозможно. Границы этих областей зависят от интенсивности колебаний основания.

Исследование проводилось в предположении, что амплитуда возмущения и силы сопротивления достаточно малы. При этом предположении указанные факторы оказывают малое влияние на результат.

## Литература

1. Stephenson A. On an induced stability // *Phil. Mag.* 1908. Vol. 15. P. 233–236.
2. Капица П. Л. Маятник с вибрирующим подвесом // *Успехи физических наук.* 1951. Т. 44, № 1. С. 7–20.
3. Блехман И. И. Вибрационная механика. М.: Наука, 1994.
4. Морозов Н. Ф., Беляев А. К., Товстик П. Е., Товстик Т. П. Устойчивость вертикального стержня на вибрирующей опоре // *ДАН.* 2018. Т. 482, № 2. С. 155–159. <https://doi.org/10.31857/S086956520003166-5>
5. Беляев А. К., Морозов Н. Ф., Товстик П. Е., Товстик Т. П. Устойчивость гибкого вертикального стержня на вибрирующем основании // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия.* 2018. Т. 5(63). Вып. 3. С. 477–488. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.311>
6. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1969.
7. Абрамовиц М., Стиган И. (ред.) Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
8. Морозов Н. Ф., Товстик П. Е., Товстик Т. П. Еще раз о задаче Ишлинского — Лаврентьева // *ДАН.* 2014. Т. 455, № 4. С. 412–415. <https://doi.org/10.7868/S0869565214100090>
9. Архипова И. М. О стабилизации тройного перевернутого маятника с помощью вибрации точки опоры произвольной частоты // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия.* 2019. Т. 6(64). Вып. 2. С. 282–288.

Статья поступила в редакцию 21 ноября 2018 г.;  
после доработки 20 марта 2019 г.;  
рекомендована в печать 21 марта 2019 г.

Контактная информация:

Кулижников Дмитрий Борисович — студент; [dima.kulizhnikov@mail.ru](mailto:dima.kulizhnikov@mail.ru)  
Товстик Петр Евгеньевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; [peter.tovstik@mail.ru](mailto:peter.tovstik@mail.ru)  
Товстик Татьяна Петровна — канд. физ.-мат. наук; [tovstik\\_t@mail.ru](mailto:tovstik_t@mail.ru)

## The attraction basin in the generalized Kapitza's problem\*

*D. B. Kulizhnikov<sup>1</sup>, P. E. Tovstik<sup>1</sup>, T. P. Tovstik<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

<sup>2</sup> Institute for Problems in Mechanical Engineering of the RAS, V. O., Bol'shoy pr., 61, St. Petersburg, 199178, Russian Federation

\*The work is supported by Russian Foundation for Basic Research (grants NN 19.01.00280-a, 16.51.52025 МНТ-а).

**For citation:** Kulizhnikov D. B., Tovstik P. E., Tovstik T. P. The attraction basin in the generalized Kapitza's problem. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2019, vol. 6 (64), issue 3, pp. 482–492. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.312> (In Russian)

The attraction basin of a stable vertical position of rod under vertical vibration of the support in the Kapitza's problem and its generalizations is studied. A long enough flexible rod with a free upper end and a clumped lower end under its weight is shown to be unstable. The support is assumed to be subjected to harmonic vibrations. In the recent works it is established that under some level of vibrations the vertical position becomes stable. Here the attraction basin of this position is discussed. As a first step the attraction basin in the classic Kapitza's problem is found. Then a rigid rod with the elastic support of a lower end is studied. The last problem is a model of a flexible rod with the clumped end. The asymptotic method of two-scaled expansions is used. It is established that a transition in the vertical position essentially depends on the initial phase of vibrations. As a result it occurs that the attraction basin consists of two parts. In one of them this transition does not depend on the initial phase, and in the other part a dependence on the initial phase has place.

*Keywords:* generalized Kapitza's problem, attraction basin of a vertical position, two-scaled expansions.

## References

1. Stephenson A., "On an induced stability", *Phil. Mag.* **15**, 233–236 (1908).
2. Kapitza P. L., "Pendulum with a vibrating support", *Physics–Uspekhi* **44**(1), 7–20 (1951).
3. Blekhman I. I., *Vibrational Mechanics* (World Scientific, Singapore, 2000).
4. Morozov N. F., Belyaev A. K., Tovstik P. E., Tovstik T. P., "Stability of a vertical rod on a vibrating support", *Doklady Physics* **63**(9), 380–384 (2018).
5. Belyaev A. K., Morozov N. F., Tovstik P. E., Tovstik T. P., "Stability of a flexible vertical rod on a vibrating support", *Vestnik St. Petersburg Univ.: Math.* **51**(3), 296–304 (2018). <https://doi.org/10.3103/S1063454118030020>
6. Bogoliubov N. N., Mitropolski Y. A., *Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations* (Gordon and Breach Publ., New York, 1961).
7. Abramovits M., Stigan I. (eds.), *Handbook of mathematical functions*, in *Applied mathematics series* **55** (National Bureau of Standards, 1964).
8. Morozov N. F., Tovstik P. E., Tovstik T. P., "Again on the Ishlinskii — Lavrentyev Problem", *Doklady Physics* **59**(4), 189–192 (2014). <https://doi.org/10.1134/S102833581404003X>
9. Arkhipova I. M., "On stabilization of a triple inverted pendulum via vibration of a support point with an arbitrary frequency", *Vestnik St. Petersburg Univ.: Math.* **52**(2), 194–198 (2019).

Received: November 21, 2018

Revised: March 20, 2019

Accepted: March 21, 2019

## Author's information:

*Dmitriy B. Kulizhnikov* — [dima.kulizhnikov@mail.ru](mailto:dima.kulizhnikov@mail.ru)

*Petr E. Tovstik* — [peter.tovstik@mail.ru](mailto:peter.tovstik@mail.ru)

*Tatiana P. Tovstik* — [tovstik\\_t@mail.ru](mailto:tovstik_t@mail.ru)