УДК 517.925, 517.923
MSC 34A40, 34C05

Об интегрировании в явном виде дифференциальных неравенств специальных типов*

Ю. А. Ильин

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Ильин Ю. А.* Об интегрировании в явном виде дифференциальных неравенств специальных типов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 2. С. 196–207.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.202

В предыдущей работе автора был предложен общий метод отыскания решений дифференциального неравенства в явном виде, основанный на формуле общего решения соответствующего дифференциального уравнения, а точнее говоря, на выпрямляющей замене переменных. Были доказаны критерии продолжимости и признаки максимально продолженного (полного) решения неравенства. В настоящей статье эти результаты применяются к наиболее часто встречающимся в приложениях и литературе конкретным типам неравенств. При этом проводится сравнение с другими существующими в литературе приемами.

Ключевые слова: дифференциальное неравенство, линейное дифференциальное неравенство, интегрируемое дифференциальное неравенство, теоремы сравнения, общее решение, метод вариации, продолжимость решений.

В предыдущей статье автора [1] был предложен общий метод отыскания решений дифференциальных неравенств в явном виде, основанный на использовании формулы общего решения соответствующего дифференциального уравнения или, точнее говоря, на *выпрямляющей* замене переменных (который также можно назвать обобщенным *методом вариации произвольной постоянной*). В настоящей работе мы собираемся применить этот метод к наиболее часто встречающимся в литературе дифференциальным неравенствам, полученным из таких известных типов интегрируемых дифференциальных уравнений, как линейное уравнение, уравнение Бернулли, уравнение Риккати, и сравнить его с уже существующими в литературе приемами (см. [2, гл. 2] и [3–7]). Как и в [1], мы будем пользоваться сокращениями *ДУ* и *ДН* для словосочетаний *дифференциальное уравнение* и *дифференциальное неравенство* соответственно. Хочется добавить, что автор получил несколько весьма полезных откликов на предыдущую статью, ответы на которые включены в предлагаемый ниже текст. (К сожалению, некоторым написавшим мне я не смог оперативно ответить, за что я приношу свои искренние извинения.)

Отметим, что самым распространенным в литературе приемом интегрирования *ДН* является домножение неравенства на интегрирующий множитель. Можно сказать, что в каком-то смысле он эквивалентен предлагаемой выпрямляющей замене переменных, поскольку также основывается на выводе формулы общего решения

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-01-00388).

соответствующего *ДУ*, но только выражает это другими словами. Для *линейного* неравенства $\dot{x} \leqslant p(t)x + q(t)$ оба подхода полностью равносильны, так как интегрирующий множитель, на который домножается *ДН*, представляет собой функцию, положительную на каждой компоненте связности из области определения коэффициентов $p(t)$ и $q(t)$ (см. ниже п. 1). Однако для *ДН*, полученного из *ДУ* Бернулли, интегрирующий множитель может быть уже функцией знакопеременной, что влечет необходимость разбирать при домножении на него разные случаи. В просмотренной мною литературе авторы интересовались лишь *положительными* решениями *ДН* Бернулли, что позволяло им рассматривать только один случай, при этом ими не ставилась задача описания всех решений неравенства и анализа их возможного поведения на всей области определения в целом. Такой анализ будет проведен в п. 2.

Другой встречающийся в литературе прием отыскания решений *ДН* заключается в следующем. Несложно понять, что функция $x(t)$ будет решением *ДН* $\dot{x} \leqslant f(t,x)$ тогда и только тогда, когда она будет решением *ДУ* $\dot{x} = f(t,x) + g(t)$, в котором $g(t)$ — это какая-то неотрицательная функция. Если это уравнение удается решить в квадратурах, рассматривая g как произвольный коэффициент, т. е. получить для его решений формулу вида $x = F(t, C, g(t))$, то подставляя в нее вместо g произвольные непрерывные неотрицательные функции, получим все решения исходного неравенства. Этот прием имеет, однако, ограниченный круг применения. Например, для линейных *ДН*, как и домножение на интегрирующий множитель, он действительно приводит к такому же результату, как и выпрямляющая замена переменных. В этом случае уравнение $\dot{x} = p(t)x + q(t) + g(t)$ будет линейным и легко интегрируется:

$$x = e^{\int_{t_0}^{t} p(u)\,du} \left(C + \int_{t_0}^{t} (q(s) + g(s)) e^{-\int_{t_0}^{s} p(u)\,du} ds \right).$$

Эта формула, описывающая все решения линейного *ДН*, полностью эквивалентна формуле (2), полученной в п. 1 ниже. Впрочем, в п. 1 мы также проводим и анализ продолжимости решений, т. е. их поведения в целом, и указываем признаки максимально продолженного решения.

Однако применение этого же приема к *ДН* Бернулли $\dot{x} \leqslant p(t)x + q(t)x^2$ приводит к необходимости решать уравнение Риккати $\dot{x} = p(t)x + q(t)x^2 + g(t)$, что сделать в квадратурах, как хорошо известно, вообще говоря, невозможно. Для выпрямляющей замены переменных таких трудностей не возникает (см. п. 3).

Перед анализом конкретных *ДН* докажем одно простое утверждение, которое будет часто использоваться в дальнейшем.

Предложение 1. *Пусть уравнение* $\dot{x} = f(t,x)$ *имеет решение* $x = x^*$, *которое не содержит точек ветвления. Тогда для любого решения неравенства* $\dot{x} \leqslant f(t,x)$ *с начальным условием* $x(t_0) = x^*$ *выполняется:* $x(t) \leqslant x^*$ *при* $t \geqslant t_0$ *и* $x(t) \geqslant x^*$ *при* $t \leqslant t_0$ *для тех* t, *для которых* $x(t)$ *определено.*

Доказательство. Воспользуемся нестрогой теоремой сравнения (см. [8–10]), которая утверждает, что любое решение $x(t)$ неравенства $\dot{x} \leqslant f(t,x)$ при $t \geqslant t_0$ не превосходит так называемого *максимального* (или *верхнего*) решения задачи Коши $\dot{x} = f(t,x)$, $x(t_0) = x^*$. По условию решение $x = x^*$ состоит из точек единственности, поэтому оно само и является этим максимальным (верхним) решением. Откуда и следует требуемое. Случай $t \leqslant t_0$ доказывается аналогично. $\square$

Замечание. Из предложения 1 следует, что решения неравенства $\dot{x} \leqslant f(t,x)$ могут пересекать решение $x = x^*$ только сверху вниз. Заметим, что если решение

$x = x^*$ содержит точки ветвления, то пересечение может быть уже каким угодно (см. пример 4 из [1] и ниже п. 2, случай 5), и это усложняет описание поведения решений.

Перейдем к изучению конкретных типов *ДН*.

1. Линейное неравенство. Рассмотрим неравенство

$$\dot{x} \leqslant p(t)x + q(t), \tag{1}$$

где $p, q \in C(a, b)$. Это самое популярное неравенство из всех встречающихся в литературе [3, 4, 9, 11]. Заметим, однако, что большинство авторов его на самом деле не решает, а всего лишь оценивает его решения с помощью теорем сравнения. Для соответствующего линейного дифференциального уравнения $\dot{x} = p(t)x + q(t)$, как известно, множество $G = (a, b) \times \mathbb{R}$ будет областью существования и единственности. Более того, во всей этой области определено общее решение [12]

$$x = F(t, C) = e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds} \left(C + \int_{t_0}^{t} q(u) e^{-\int_{t_0}^{u} p(s)\,ds} du \right), \quad t_0 \in (a, b),$$

при этом $F'_c = e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds} > 0$, что дает возможность применить теорему 1 из [1]. Согласно ей все решения неравенства (1) задаются формулой

$$x = e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds} \left(C(t) + \int_{t_0}^{t} q(u) e^{-\int_{t_0}^{u} p(s)\,ds} du \right), \tag{2}$$

где $C(t)$ — произвольная гладкая функция, определенная на $(a_1, b_1) \subseteq (a, b)$, для которой $\dot{C}(t) \leqslant 0$. Согласно теореме 3 из [1], чтобы решение неравенства было максимально продолженным, должно выполняться или $a_1 = a$ ($b_1 = b$), или $\lim\limits_{t \to a_1 + 0} C(t) = +\infty$ ($\lim\limits_{t \to b_1 - 0} C(t) = -\infty$), или же $\limsup\limits_{t \to a_1 + 0} \dot{C}(t) = -\infty$ ($\liminf\limits_{t \to b_1 + 0} \dot{C}(t) = -\infty$). Этим исчерпываются все возможные варианты поведения решений.

Оценка на решение неравенства, получаемая с помощью теоремы сравнения, выглядит так:

$$x(t) \leqslant e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds} \left(x(t_0) + \int_{t_0}^{t} q(u) e^{-\int_{t_0}^{u} p(s)\,ds} du \right), \quad t \geqslant t_0.$$

Применение интегрирующего множителя для линейного *ДН* (1) проходит следующим образом. Исходное неравенство записывается в виде $\dot{x} - p(t)x \leqslant q(t)$ и домножается на *неотрицательную* на (a, b) функцию $\exp(-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds)$. В результате получим $\dfrac{d}{dt}\Big(x \exp\big(-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds\big)\Big) \leqslant q(t) \exp\big(-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds\big)$, откуда следует, что $x(t) \exp\big(-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds\big) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} q(u) \exp\big(-\int_{t_0}^{u} p(s)\,ds\big)\,du + C(t)$, где $C(t)$ есть произвольная гладкая убывающая функция. В итоге мы снова пришли к формуле (2).

Приведем примеры некоторых максимально продолженных решений и их интервалов существования для неравенства $\dot{x} \leqslant x$ (см. пример 2 из [1]):

1) $e^{t/2}$, $-e^{2t}$, e^{-t}, $-t$; $(a_1, b_1) = \mathbb{R}$;

2) e^{t}/t; $(a_1, b_1) = (0, +\infty)$ или $(-\infty, 0)$;

3) $e^t \operatorname{ctg} t$; $(a_1, b_1) = (0, \pi)$;

4) $-e^t \sqrt{t}$; $(a_1, b_1) = (0, +\infty)$;

5) $e^t \arccos t$; $(a_1, b_1) = (-\pi/2, \pi/2)$.

Если нас интересует решение неравенства, удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$, то надо брать $C(t_0) = x_0$.

2. Неравенство, получаемое из уравнения Бернулли. Рассмотрим неравенство

$$\dot{x} \leqslant p(t)x + q(t)x^n \quad (n \neq 0, 1), \tag{3}$$

где $p, q \in C(a, b)$. Здесь все существенно зависит от числа n. Прежде всего, неравенство может оказаться не определенным при $x < 0$. Далее, если $n > 1$, то для уравнения Бернулли $\dot{x} = p(t)x + q(t)x^n$ выполнены условия теоремы единственности, а при $0 < n < 1$ решение $x = 0$ целиком состоит из точек ветвления. При $n < 0$ оно вообще не будет решением. Важность решения $x = 0$ объясняется тем, что в области $G_1 = \{x > 0,\ a < t < b\}$ (и, аналогично, в $G_2 = \{x < 0,\ a < t < b\}$, если это позволяет n) можно написать формулу общего решения, и тогда интегрирование неравенства проводится по общей схеме параграфа 2 из [1]. И единственное, что надо изучать — это возможность перехода решений из G_1 в G_2 и наоборот. Нам кажется целесообразным вместо перебора всех возможных вариантов разобрать только несколько ключевых случаев, из которых будет ясен общий алгоритм действий.

Случай 1. Число $n = 2k$ *четно.* Правая часть неравенства определена при любых x. Как известно (см. [12]), уравнение Бернулли сводится к линейному заменой $(t, x) \mapsto (t, y)$, где $y = x^{1-n}$. В рассматриваемом случае эта замена будет взаимно однозначной и взаимно гладкой на множестве $G = G_1 \cup G_2$. Сделаем эту замену в исходном неравенстве (3) при $x \neq 0$:

$$\dot{y} = (1-2k)x^{-2k}\dot{x} \geqslant (1-2k)x^{-2k}\big(p(t)x + q(t)x^{-2k}\big) = (1-2k)p(t)y + (1-2k)q(t)$$

(знак неравенства переворачивается, так как $1 - 2k < 0$). Согласно теореме 1 из [1], решения этого неравенства, расположенные в областях G_1 и G_2, задаются формулой

$$y(t) = e^{(1-2k)\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds}\left(C(t) + (1-2k)\int_{t_0}^{t} q(u)e^{(2k-1)\int_{t_0}^{u} p(s)\,ds}du\right),$$

где $\dot{C}(t) \geqslant 0$, т. е. $C(t)$ — неубывающая функция. Решениями исходного неравенства будут функции

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt[2k-1]{y(t)}}. \tag{4}$$

Изучим вопрос о продолжении решений (4). Будем сперва считать, что решение $x(t)$ проходит через какую-то точку области G_1, т. е. $x(t_0) = x_0 > 0$. Пусть (a_1, b_1) есть максимальный промежуток существования этого решения в G_1. Прежде всего, вполне может быть, что $(a_1, b_1) = (a, b)$, т. е. решение целиком располагается в G_1. В этом случае, $C(t)$ должна быть произвольной неубывающей функцией, определенной на всем промежутке (a, b), для которой $y(t) \neq 0$. Таким решением для неравенства $\dot{x} \leqslant x^2$ (см. пример 3 из [1]), которое можно рассматривать как неравенство Бернулли (где $p(t) = 0$, $q(t) = 1$, $n = 2$), будет, например, убывающая функция e^{-t}.

Если же $a_1 > a$, то решение $x(t)$ должно или «покидать» область G_1, или «терять» гладкость в точке a_1: $\liminf\limits_{t\to a_1+0} \dot C(t) = +\infty$. В первом случае имеются 2 варианта:

$$
\begin{aligned}
&(i)\ \lim_{t\to a_1+0} x(t) = +0 \Leftrightarrow \lim_{t\to a_1+0} y(t) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{t\to a_1+0} C(t) = +\infty;\\
&(ii)\ \lim_{t\to a_1+0} x(t) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{t\to a_1+0} y(t) = +0 \Leftrightarrow\\
&\qquad \Leftrightarrow \lim_{t\to a_1+0} C(t) = (2k-1)\int_{t_0}^{a_1} q(u)e^{(2k-1)\int_{t_0}^{u} p(s)\,ds}du.
\end{aligned}
$$

Вариант (i) невозможен в силу того, что $C(t)$ неубывающая. Значит должен выполняться вариант (ii). Он означает, что $x(t)$ имеет вертикальную асимптоту в a_1.

В случае $b_1 < b$ также имеем либо $\limsup\limits_{t\to b_1-0} \dot C(t) = +\infty$, либо две возможности:

$$
\begin{aligned}
&(i)\ \lim_{t\to b_1-0} x(t) = +0 \Leftrightarrow \lim_{t\to b_1-0} y(t) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{t\to b_1-0} C(t) = +\infty;\\
&(ii)\ \lim_{t\to b_1-0} x(t) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{t\to b_1-0} y(t) = +0 \Leftrightarrow\\
&\qquad \Leftrightarrow \lim_{t\to b_1-0} C(t) = (2k-1)\int_{t_0}^{b_1} q(u)e^{(2k-1)\int_{t_0}^{u} p(s)\,ds}du.
\end{aligned}
$$

Теперь оба этих варианта могут иметь место. Например, вариант (ii) реализуется для решения $x(t) = 1/\sin t$ вышеупомянутого неравенства $\dot x \leqslant x^2$. Заметим, что формула $x(t) = 1/\sin t$ задает бесконечный набор решений, которые определены на интервалах $(\pi k, \pi(k+1))$. Прямые $x = \pi k$ являются вертикальными асимптотами. При четных k решения лежат в G_1, а при нечетных — в G_2. Любопытно отметить, что соответствующие им решения $y(t) = \sin t$ и $C(t) = t + \sin t$ определены и непрерывно дифференцируемы при всех $t \in \mathbb{R}$.

Вариант (i) означает, что решение $x(t)$ «выходит» на прямую $x = 0$ в точке b_1. Далее, согласно предложению 1, оно может оставаться на прямой вдоль некоторого отрезка $[b_1, a_2]$, а затем перейдет в область G_2 (не запрещаются случаи $b_1 = a_2$ и $a_2 = +\infty$.)

В области G_2 для максимально продолженного решения неравенства, определенного на (a_2, b_2), ситуация будет обратно симметричной. Также возможен случай, когда $(a_2, b_2) = (a, b)$ (например, $x = -e^t$ для неравенства $\dot x \leqslant x^2$). Если же $b_2 \neq b$, то обязательно получаем

$$
\lim_{t\to b_2-0} x(t) = -\infty \Longleftrightarrow \lim_{t\to b_2-0} y(t) = -0 \Longleftrightarrow
$$

$$
\Longleftrightarrow \lim_{t\to b_2-0} C(t) = (2k-1)\int_{t_0}^{b_2} q(u)e^{(2k-1)\int_{t_0}^{u} p(s)\,ds}du,
$$

а для $a_2 \neq a$ есть 2 варианта: $x(a_2+0) = -0$ или $x(a_2+0) = -\infty$. То, что второй вариант реализуется, мы видели на примере решения $x = 1/\sin t$. А в случае первого варианта наше решение состыковывается в точке a_2 с любым подходящим решением из области G_1.

Из сказанного ясно, какова структура всех решений *ДН* в случае 1.

Замечание. Не следует думать, что все рассмотренные выше возможности для максимального промежутка (a_1, b_1) реализуются в полном обьеме для каждого неравенства указанного вида. Какие-то случаи могут и не иметь места, и зависит это от конкретных особенностей правых частей неравенств. Например, для неравенства $\dot{x} \leqslant x^2$ существуют решения, располагающиеся при всех $t \in \mathbb{R}$ в области G_1 (например, $x = e^{-t}$ или $x = 1$) и G_2 (например, $x = -e^t$ или $x = -1$). Но для неравенства $\dot{x} \leqslant -x^2$ таких решений уже нет! В самом деле, пусть $x(t_0) = x_0$. Тогда по строгой теореме сравнения (см. [8–10]) при $t > t_0$ выполняется $x(t) < \varphi(t)$, а при $t < t_0$ выполняется $x(t) > \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ есть решение задачи Коши $\dot{x} = -x^2$, $x(t_0) = x_0$, и t берутся такие, в которых $x(t)$ определено. Несложно найти, что

$$\varphi(t) = \frac{x_0}{x_0(t - t_0) + 1}.$$

Эта функция имеет вертикальную асимптоту в точке $t^* = t_0 - 1/x_0$. Если $x_0 > 0$, то решение $t^* < t_0$, и так как $x(t) > \varphi(t)$ при $t < t_0$, то $x(t)$ не может быть продолжено на отрезок $[t^*, t_0]$. Для a_1 справедлива оценка $a_1 \geqslant t_0 - 1/x(t_0)$. Поэтому в G_1 нет решений, для которых $a_1 = -\infty$. Аналогично, если $x_0 < 0$, то $t^* > t_0$, и всякое решение неравенства в G_2 будет иметь вертикальную асимптоту при продолжении вправо. Решений, для которых $b_2 = +\infty$, тоже нет. Можно заметить, что единственное решение нашего неравенства, которое определено при всех t, это $x = 0$.

Случай 2. Число $n = 2k + 1$ *нечетно.* Для области G_1, где $x > 0$, выкладки из случая 1 остаются в силе, и там будем иметь

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt[2k]{y(t)}}, \text{ где } y(t) = e^{-2k\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds}\left(C(t) - 2k\int_{t_0}^{t} q(u)e^{2k\int_{t_0}^{u} p(s)\,ds}du\right)$$

и $C(t)$ по-прежнему есть любая неубывающая функция. Поведение максимально продолженных решений в области G_1 будет аналогичным случаю 1.

Для $x < 0$ надо делать замену $y = (-x)^{-2k}$. Получим

$$\dot{y} = (-2k)(-x)^{-2k-1}(-\dot{x}) \leqslant (-2k)p(t)y - 2kq(t)$$

(знак неравенства не меняется, так как само x тоже отрицательно). Поэтому для решений, расположенных в области G_2, имеем

$$x(t) = -\frac{1}{\sqrt[2k]{y(t)}}, \text{ где } y(t) = e^{-2k\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds}\left(C(t) - 2k\int_{t_0}^{t} q(u)e^{2k\int_{t_0}^{u} p(s)\,ds}du\right)$$

и $\dot{C}(t) \leqslant 0$, т. е. $C(t)$ — невозрастающая функция. Пусть (a_2, b_2) есть максимальный промежуток существования решения $x(t)$ в области G_2.

По-прежнему возможно, что $(a_2, b_2) = (a, b)$. Например, функция $x = -1/\sqrt{4 - 2\sin t}$ удовлетворяет неравенству $\dot{x} \leqslant x^3 \cos t$ и определена при всех t. С другой стороны, у неравенства $\dot{x} \leqslant x^3$ таких решений уже нет: любое решение, начинающееся в G_2, при продолжении влево будет уходить на $-\infty$ с вертикальной асимптотой. Это проверяется аналогично случаю 1 с помощью теоремы сравнения. То есть в общем случае все будет зависеть от свойств коэффициента $q(t)$.

Если $b_2 \neq b$, то вариант $\lim\limits_{t \to b_2 - 0} x(t) = 0$, как и раньше, невозможен в силу предложения 1. Поэтому имеем

$$\lim_{t \to b_2 - 0} x(t) = -\infty \Longleftrightarrow \lim_{t \to b_2 - 0} y(t) = +0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{t \to b_2 - 0} C(t) = 2k\int_{t_0}^{b_2} q(u)e^{2k\int_{t_0}^{u} p(s)\,ds}du.$$

Если $a_2 \neq a$, то при $t \to a_2+0$, так же как и в случае 1, имеем две возможности:

1) $\lim\limits_{t\to a_2+0} x(t) = -0 \iff \lim\limits_{t\to a_1+0} y(t) = +\infty \iff \lim\limits_{t\to a_1+0} C(t) = +\infty$,

2) $\lim\limits_{t\to a_2+0} x(t) = -\infty \iff \lim\limits_{t\to a_1+0} y(t) = +0 \iff \lim\limits_{t\to a_1+0} C(t) = 2k\int_{t_0}^{a_2} q(u)e^{2k\int_{t_0}^{u} p(s)\,ds}du$.

Таким образом, ситуация в целом ничем не отличается от случая 1, и поэтому структура множества решений будет такая же. Вариант 1 позволяет нам склеивать решения из G_1 и G_2 друг с другом и получать такие решения, как, например,

$$x(t) = \begin{cases} -t & \text{при } t \in (-\infty; 1], \\ \frac{-1}{\sqrt{3-2t}} & \text{при } t \in (1; \frac{3}{2}) \end{cases}$$

для неравенства $\dot{x} \leqslant x^3$.

Случай 3. Число $n = \frac{k}{l}$, $\frac{k}{l} > 1$, *l нечетно*. Этот случай содержится в объединении случаев 1 и 2. Правая часть неравенства определена при всех x. А четность k влияет только на вид формулы решений, но не влияет на их общую структуру.

Случай 4. Число $n = \frac{k}{l}$, $\frac{k}{l} > 1$, *l четно*. Этот случай проще предыдущего. Неравенство определено только в G_1, и все сказанное для этой области при разборе случаев 1, 2 остается в силе и здесь. Перехода из G_1 в G_2 теперь, естественно, нет, но решение может выйти на ось Ot и дальше целиком оставаться на ней.

Случай 5. Число $n = \frac{k}{l}$, $\frac{k}{l} < 1$, *l нечетно*. Особенностью этого случая является то, что теперь решение $x = 0$ соответствующего уравнения содержит точки ветвления. Предложение 1 не выполняется, и решения неравенства (3) могут многократно пересекать ось Ot в любом направлении. Иллюстрацией к этому служит решение $x = \sin^3 t$ для неравенства $\dot{x} \leqslant 3x^{2/3}$ (пример 4 из [1]), который как раз и является неравенством разбираемого типа. Мы взяли l нечетным, чтобы неравенство было определено при любых x. При четном l неравенство определено только в полуплоскости $x \geqslant 0$, и это будет как бы половина от случая нечетного l. Четность k, как и в случаях 1, 2, 3, не играет существенной роли, поэтому дальше мы будем считать, что k четно. Сделаем стандартную замену $(t,x) \mapsto (t,y)$, где $y = x^{1-n}$. Как и раньше, она будет взаимно однозначной и взаимно гладкой в областях G_1 и G_2. Поскольку теперь $1-n \in (0,1)$, то она определена и при $x = 0$. Получим

$$\dot{y} = (1-n)x^{-n}\dot{x} \leqslant (1-n)x^{-n}\bigl(p(t)x + q(t)x^n\bigr) = (1-n)p(t)y + (1-n)q(t)$$

(знак неравенства не переворачивается, так как $1-n > 0$). Решениями исходного неравенства в $G_1 \bigcup G_2$ будут функции

$$x(t) = (y(t))^{n-1}, \tag{5}$$

где

$$y(t) = e^{(1-n)\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds}\left(C(t) + (1-n)\int_{t_0}^{t} q(u)e^{(n-1)\int_{t_0}^{u} p(s)\,ds}du\right)$$

и $\dot{C}(t) \leqslant 0$, т. е. $C(t)$ — невозрастающая функция.

Отличия появляются при анализе продолжимости решений. Пусть сперва $x(t)$ берется из G_1, и (a_1, b_1) есть его максимальный интервал существования.

Возможно, что $(a_1, b_1) = (a, b)$, как, например, для решения $x = 1$ неравенства $\dot{x} \leqslant 3x^{2/3}$ (пример 4 из [1]). Здесь $(a_1, b_1) = (a, b) = \mathbb{R}$.

Если $a_1 > a$, то возможны варианты:

1) $\lim\limits_{t \to a_1+0} x(t) = +0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{t \to a_1+0} C(t) = (n-1)\int_{t_0}^{a_1} q(u) e^{(n-1)\int_{t_0}^{u} p(s)\,ds} du;$

2) $\lim\limits_{t \to a_1+0} x(t) = +\infty \Longleftrightarrow \lim\limits_{t \to a_1+0} C(t) = +\infty.$

Первый вариант иллюстрируется решением $x = \sin^3 t$, а второй — решениями $x = 1/t,\ t > 0$, или $x = \operatorname{ctg} t,\ t \in (0, \pi)$, неравенства $\dot{x} \leqslant 3x^{2/3}$. Для $b_1 < b$ имеем

1) $\lim\limits_{t \to b_1-0} x(t) = +0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{t \to b_1-0} C(t) = (n-1)\int_{t_0}^{b_1} q(u) e^{(n-1)\int_{t_0}^{u} p(s)\,ds} du;$

2) $\lim\limits_{t \to b_1-0} x(t) = +\infty \Longleftrightarrow \lim\limits_{t \to b_1-0} C(t) = +\infty.$

Первый вариант реализуется на решениях $x = \sin^3 t$ или $x = \operatorname{ctg} t,\ t \in (0, \pi)$, неравенства $\dot{x} \leqslant 3x^{2/3}$, а второй вариант невозможен, так как $\dot{C}(t) \leqslant 0$. Таким образом, в отличие от случаев 1, 2, 3 теперь решения неравенства (3), располагающиеся в области G_1, не могут уходить на бесконечность с вертикальной асимптотой при продолжении вправо. Этот результат, разумеется, можно получить и без использования найденной явной формулы для решений, только с помощью теорем сравнения.

Перечислим теперь возможности для решений $x(t)$, располагающихся в области G_2.

Случай $(a_2, b_2) = (a, b)$ может иметь место (например, $x = -1$ для $\dot{x} \leqslant 3x^{2/3}$). Если $a_2 > a$, то возможны варианты:

$$\lim_{t \to a_2+0} x(t) = -0 \quad \text{или} \quad \lim_{t \to a_2+0} x(t) = -\infty.$$

Первый случай возможен, иллюстрацией служит $x = \operatorname{ctg} t$ или $x = -t$ для $\dot{x} \leqslant 3x^{2/3}$. А второй невозможен по тем же причинам, по которым решения неравенства в G_1 не могут иметь вертикальных асимптот при продолжении вправо. В самом деле, при продолжении влево решения неравенства по теореме сравнения теперь будут оцениваться решениями уравнения снизу, а решения уравнения асимптот не имеют.

Для $b_2 < b$ имеем

$$\lim_{t \to b_2-0} x(t) = -0 \quad \text{или} \quad \lim_{t \to b_2-0} x(t) = -\infty.$$

Оба этих варианта могут реализовываться, например, для $x = \sin^3 t$ и $x = \operatorname{ctg} t,\ t \in (0, \pi)$, и неравенства $\dot{x} \leqslant 3x^{2/3}$.

Нарушение единственности вдоль решения $x = 0$ приводит к тому, что в случае 5 появляются решения, многократно переходящие из G_1 в G_2 и обратно, как, например, $x = \sin^3 t$ для $\dot{x} \leqslant 3x^{2/3}$. Но как мы помним, есть еще одна проблема, связанная с потерей решениями гладкости (см. [1]). До сих пор мы рассматривали только функции $C(t) \in C^1$. Но $C(t)$ может терять гладкость в точках, в которых $y(t) = 0$. Мы не будем пытаться формулировать какие-то общие утверждения по этому поводу, а просто отметим, что $C(t)$ должна выбираться так, чтобы итоговая функция $x(t)$ уже была гладкой на всем промежутке определения.

3. Неравенство, получаемое из уравнения Риккати. Дифференциальное неравенство Риккати

$$\dot{x} \leqslant p(t)x^2 + q(t)x + r(t), \tag{6}$$

где $p, q, r \in C(a, b)$, легко сводится, так же как и в теории уравнений, к уже разобранному выше *ДН* Бернулли. Пусть $\varphi(t)$ есть какое-то частное решение соответствующего *ДУ* Риккати. Выполняя замену $x = y + \varphi(t)$ и учитывая, что $\dot{\varphi} = p(t)\varphi^2 + q(t)\varphi + r(t)$, получим неравенство $\dot{y} \leqslant (2p\varphi + q)y + py^2$, полностью разобранное в п. 2, случай 1.

Замечание. Решения *ДУ* Риккати не продолжаются, вообще говоря, на (a, b). То есть разные решения могут быть определены на разных промежутках. Поэтому выбор конкретного решения φ для замены будет влиять на область определения полученных с его помощью решений *ДН*.

4. Неравенство с разделяющимися переменными. Рассмотрим неравенство

$$\dot{x} \leqslant f(t)g(x), \tag{7}$$

где $f \in C(a, b),\ g \in C^1(\alpha, \beta)$. При сделанных предположениях область $G = (a, b) \times (\alpha, \beta)$ будет областью существования и единственности для уравнения

$$\dot{x} = f(t)g(x). \tag{8}$$

Что касается общего решения, то дело обстоит следующим образом. Если $g(x) \neq 0$ на (α, β), то общее решение задается формулой (см. [12])

$$H(x) = F(t) + C, \quad \text{где} \quad H(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{g(s)}, \;\; F(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds. \tag{9}$$

При этом, так как $H'(x) = 1/g(x) \neq 0$, то $H(x)$ обратима, и формула (9) может быть переписана в виде

$$x = H^{-1}(F(t) + C). \tag{10}$$

Сделаем в (7) замену $(t, x) \mapsto (t, C)$, где $C = H(x) - F(t)$. Получим $\dot{C} = H'(x)\dot{x} - \dot{F}(t) = \frac{\dot{x}}{g(x)} - f(t)$. Если $g(x) > 0$, то получим

$$\dot{C} \leqslant \frac{f(t)g(x)}{g(x)} - f(t) = 0 \Longleftrightarrow C(t) \downarrow,$$

а если $g(x) < 0$, то

$$\dot{C} \geqslant \frac{f(t)g(x)}{g(x)} - f(t) = 0 \Longleftrightarrow C(t) \uparrow .$$

В любом случае, подставляя такие функции $C(t)$ в формулу (9) или (10), получим все решения исходного *ДН* в виде

$$H(x) = F(t) + C(t) \quad \text{или} \quad x = H^{-1}(F(t) + C(t)). \tag{11}$$

Согласно теореме 3 из [1], функцию $C(t)$ надо брать или определенной на всем промежутке (a, b), или такой, чтобы при приближении t к концам интервала ее определения $x(t)$ стремилось бы к значениям α или β. При этом будет $C(b_1 - 0) =$

$\int_{x_0}^{\beta} \frac{du}{g(u)} - \int_{t_0}^{b_1-0} f(s)\,ds$ (для $C(a_1+0)$ пишется аналогичное равенство). Интегралы должны сходиться. Если они расходятся, то $x(t)$ не достигает β и $b_1 = b$.

Допустим теперь, что $g(x)$ может обращаться в ноль. Множество $M = \{x \in (\alpha, \beta) \mid g(x) \neq 0\}$ открыто в $\mathbb{R}$ и поэтому представимо в виде не более чем счетного объединения открытых дизъюнктных интервалов: $M = \bigcup(\alpha_k, \beta_k)$. В каждой области $G_k = (a,b) \times (\alpha_k, \beta_k)$ применимы рассуждения, проведенные выше, и в них решения неравенства описываются формулой (11). Заметим, что прямые $x = \alpha_k$ и $x = \beta_k$ являются решениями уравнения (8), поскольку $g(\alpha_k) = g(\beta_k) = 0$ (за исключением α и β), и на них нет точек ветвления (напомним, что мы считаем $g \in C^1(\alpha, \beta)$). Согласно предложению 1, решения неравенства (7) могут пересекать их только сверху вниз. Поэтому максимально продолженное в области G_k решение $x(t)$ нашего неравенства, определенное на максимальном интервале существования (a_k, b_k), может быть устроено только следующим образом:

1) $(a_k, b_k) = (a, b)$,

2) $a_k = a,\ b_k < b$, тогда $\lim\limits_{t \to b_k - 0} x(t) = \alpha_k$,

3) $a_k > a,\ b_k = b$, тогда $\lim\limits_{t \to a_k + 0} x(t) = \beta_k$,

4) $a_k > a,\ b_k < b$, тогда $\lim\limits_{t \to a_k + 0} x(t) = \beta_k$, $\lim\limits_{t \to b_k - 0} x(t) = \alpha_k$.

В том случае, если $\alpha_k = \alpha$ или $\beta_k = \beta$, может также выполняться $\lim\limits_{t \to a_k + 0} x(t) = \alpha$ или $\lim\limits_{t \to b_k - 0} x(t) = \beta$.

Ни в поведении решений в областях G_k, ни в стыковке друг с другом решений из соседних областей не появляется ничего нового по сравнению со сказанным для случаев 1, 2, 3 из п. 2 для *ДН* Бернулли. Поэтому мы не будем повторяться.

В случае, когда функция g просто непрерывна, и поэтому решения $x = \alpha_k$ и $x = \beta_k$ могут содержать точки ветвления, нам кажется уже практически невозможным (или же это будет чрезмерно громоздким) дать какое-то общее описание поведения решений. Примеры показывают, что тут начинают играть важную роль слишком конкретные свойства функций g и f. Как бы то ни было, но в практических задачах источником для *ДН* служат обычно какие-то достаточно хорошие *ДУ*, правые части которых, как правило, почти всюду дифференцируемы, и тогда подобных трудностей не возникает.

Литература

1. *Ильин Ю. А.* Общие вопросы интегрирования дифференциальных неравенств в явном виде // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 4. С. 597–607. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.408

2. *Pachpatte B. G.* Inequalities for Differential and Integral Equations. In Ser.: Mathematics in Science and Engineering. Vol. 197. Academic Press, 2007.

3. *Hoang N. S., Ramn A. G.* Nonlinear Differential Inequality // Math. Inequal. Appl. 2011. Vol. 14, no. 4. P. 967–976.

4. *Lungu N., Popa D.* On some Differential Inequalities // Seminar on Fixed Point Theory Cluj — Napoca. 2002. Vol. 3. P. 323–326.

5. *Ramm A. G.* Dynamical systems method for solving operator equations. Amsterdam: Elsevier, 2007.

6. *Pouso R. L.* Greatest solutions and differential inequalities: a journey in two directions. arXiv:1304.3576vl [math.CA] 12 Apr 2013

7. *Uhl R.* Odinary Differential Inequalities and Quasimonotonicity in Ordered Topological Vector Spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. Vol. 126, no. 7. P. 1999–2003.

8. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

9. *Szarski J.* Differential Inequalities. Warszawa: PWN, 1967.

10. *Васильева А. Б., Нефедов Н. Н.* Теоремы сравнения. Метод дифференциальных неравенств Чаплыгина: учеб. пособие. М.: Изд-во МГУ, 2007.

11. *Lakshmikantham V., Leela S.* Differential and integral inequalities; theory and applications. New York: Academic Press, 1969.

12. *Бибиков Ю. Н.* Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2005.

Статья поступила в редакцию 19 ноября 2018 г.;
после доработки 19 ноября 2018 г.;
рекомендована в печать 20 декабря 2018 г.

Контактная информация:

Ильин Юрий Анатольевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; iljin_y_a@mail.ru

On integration of special types of differential inequalities in explicit form

Yu. A. Iljin

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Iljin Yu. A. On integration of special types of differential inequalities in explicit form. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2019, vol. 6 (64), issue 2, pp. 196–207. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.202 (In Russian)

In the previous work, the author proposed a general method for finding all solutions of the differential inequality in explicit form, which is based on the formula of the general solution of the corresponding differential equation or, in other words on the method of the variation of arbitrary constants. Criteria of extendibility of solutions and characteristics of the maximally extended (full) solution of the inequality had been proven. In the present paper, these results are applied specific types of inequalities to the most frequently encountered in applications and literature. We also compare them to other methods in existing literature.

Keywords: differential inequality, comparison theorems, integration in explicit form, general solution, method of variations, continuation of solution, nonuniqueness points.

References

1. Iljin Yu. A., "General problems of explicit integration of differential inequalities", *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics* **50**, issue 4, 364–371 (2017). https:/doi.org/10.3103/S1063454117040094

2. Pachpatte B. G., *Inequalities for Differential and Integral Equations*, in Ser. *Mathematics in Science and Engineering* **197** (Academic Press, 2007).

3. Hoang N. S., Ramn A. G., "Nonlinear Differential Inequality", *Math. Inequal. Appl.* **14** (4), 967–976 (2011).

4. Lungu N., Popa D., "On some Differential Inequalities", *Seminar on Fixed Point Theory Cluj — Napoca* **3**, 323–326 (2002).

5. Ramm A. G., *Dynamical systems method for solving operator equations* (Elsevier, Amsterdam, 2007).

6. Pouso R. L., "Greatest solutions and differential inequalities: a journey in two directions" (rXiv:1304.3576vl [math.CA] 12 Apr 2013).

7. Uhl R., "Odinary Differential Inequalities and Quasimonotonicity in Ordered Topological Vector Spaces", *Proc. Amer. Math. Soc.* **126** (7), 1999–2003 (1998).

8. Hartman P., *Ordinary Differential Equations*, in *Classics in Applied Mathematics* **38** (SIAM, 2002).

9. Szarski J., *Differential Inequalities* (PWN Publ., Warszawa, 1967).
10. Vasilyeva A. B., Nefedov N. N., *Comparison theorems. The method of differential inequalities of Chaplygin* (Moscow Univ. Press, 2007). (In Russian)
11. Lakshmikantham V., Leela S., *Differential and integral inequalities; theory and applications* (Academic Press, New York, 1969).
12. Bibikof Yu. N., *General course of ordinary differential equations* (St. Petersburg Univ. Press, 2005). (In Russian)

Received: November 19, 2018
Revised: November 19, 2018
Accepted: December 20, 2018

Author's information:
Yuriy A. Iljin — iljin_y_a@mail.ru