

Задача фильтрации в прямоугольной перемычке с частично непроницаемой вертикальной стенкой

Э. Н. Береславский, Л. М. Дудина

Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации,
Российская Федерация, 196210, Санкт-Петербург, ул. Пилотов, 38

Для цитирования: Береславский Э. Н., Дудина Л. М. Задача фильтрации в прямоугольной перемычке с частично непроницаемой вертикальной стенкой // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 2. С. 288–297. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.211>

Рассматривается плоская установившаяся фильтрация в прямоугольной перемычке с частично непроницаемой вертикальной стенкой при наличии испарения со свободной поверхности грунтовых вод. Для изучения влияния испарения сформулирована и с применением метода П. Я. Полубариновой-Кочиной решена смешанная многопараметрическая краевая задача теории аналитических функций. На базе предлагаемой модели разработан алгоритм расчета фильтрационных характеристик потока и приведены результаты гидродинамического анализа зависимостей расхода и ординаты точки выхода кривой депрессии от всех физических параметров схемы. Приводятся сравнения точных значений искомых характеристик с известными приближенными значениями, полученными другими авторами при отсутствии испарения. Результаты работы дают представление (по крайней мере качественно) о возможной зависимости характеристик движения при рассмотрении задачи фильтрации к несовершенной скважине или трубчатому колодцу.

Ключевые слова: фильтрация, испарение, перемычка, грунтовые воды, свободная поверхность, метод Полубариновой-Кочиной, комплексная скорость, конформные отображения, дифференциальные уравнения класса Фукса.

Введение. Как известно [1–6], точное решение осесимметричной задачи о притоке жидкости к несовершенной скважине с затопленным фильтром или трубчатому колодцу, представляющему собой непроницаемую трубу с фильтром в некоторой ее части, связано с большими математическими трудностями и до настоящего времени не найдено. Поэтому в свое время в качестве первого приближения к решению подобных задач были рассмотрены некоторые соответствующие плоские аналогичающие задачи о фильтрации в несовершенной прямолинейной галерее в безнапорном пласте [4, 7] и в прямоугольной перемычке с частично непроницаемой вертикальной стенкой [8]. Следует отметить, что области значений комплексной скорости в указанных случаях позволяют с помощью инверсии применить при решении формулу Кристоффеля — Шварца. Напомним также, что задачи о фильтрации в прямоугольных или трапециевидальных плотинах с вертикальным верховым откосом рассматривались П. Я. Кочиной [1–6] и Г. К. Михайловым [9–11].

В работе авторов [12] дано точное аналитическое решение задачи о притоке грунтовых вод в безнапорном пласте из бесконечности к несовершенной галерее при наличии испарения со свободной поверхности, а также приближенное решение

в случае через область течения, ограниченную слева некоторой эквипотенциалью, определяемой из решения. Показано, что картина течения вблизи непроницаемого экрана существенно зависит не только от несовершенства галереи, но и от наличия испарения, что сильно отражается на расходе галереи и ординате точки выхода кривой депрессии на непроницаемую стенку.

В настоящей работе дано точное аналитическое решение задачи о течении грунтовых вод через прямоугольную перемычку с частично непроницаемой вертикальной стенкой при наличии испарения со свободной поверхности грунтовых вод. В этом случае в области комплексной скорости, в отличие от задач, рассмотренных в [1, 4, 6–8], возникают не прямолинейные, а круговые многоугольники, что не дает возможности воспользоваться классическим интегралом Кристоффеля — Шварца. Важно также отметить, что по сравнению с предыдущими работами [1, 4, 6–8], а также [12] в области течения здесь добавляется граничная угловая особая точка A_1 , что значительно усложняет решение задачи.

Отмечаются предельные случаи рассматриваемого движения, связанные с вырождением перемычки в безнапорный пласт [12] и с отсутствием испарения со свободной поверхности [4, 7, 8].

Для решения задачи используется метод П. Я. Полубариновой-Кочиной [1–6]. С помощью способов конформного отображения круговых многоугольников, разработанных для областей специального вида [13–16], которые характерны для задач подземной гидромеханики, решена смешанная многопараметрическая краевая задача теории аналитических функций.

Учет характерных особенностей рассматриваемого течения позволяет получить решение через элементарные функции, что делает его использование наиболее простым и удобным. Приведенный подробный гидродинамический анализ дает некоторое представление о возможной зависимости фильтрационных характеристик движения от всех физических параметров. Полученные результаты, по крайней мере, качественно могут быть перенесены на случай трубчатых колодцев.

1. Постановка задачи. На рис. 1 представлена прямоугольная перемычка с откосами A_0A_1 и D_0B на непроницаемом горизонтальном основании длины L . Высота воды в верхнем бьефе равна H . Нижний бьеф с уровнем воды H_2 , имеющий частично непроницаемую вертикальную стенку CD (экран), примыкает к подошве пласта. Если рабочая часть перемычки CB (фильтр) ширины H_1 затоплена, т. е. $H_2 > H_1$, то обычный для плотин промежуток высачивания отсутствует [1]. Верхней границей области движения является свободная поверхность AD , выходящая на непроницаемый экран CD_0 , с которой происходит равномерное испарение с интенсивностью ε ($0 < \varepsilon < 1$).

Грунт считается однородным и изотропным, течение жидкости подчиняется закону Дарси с известным коэффициентом фильтрации $\kappa = \text{const}$.

Введем комплексный потенциал движения $\omega = \varphi + i\psi$, где потенциал скорости и функция тока отнесены соответственно к κH и H , где H — напор в точке A .

При выборе системы координат, указанном на рис. 1, и совмещении плоскости сравнения напоров с плоскостью $y = 0$ на границе области фильтрации выполняются следующие краевые условия:

$$\begin{aligned} AD : \quad \varphi = -y, \quad \psi = -\varepsilon x + Q; \quad DC : \quad x = 0, \quad \psi = Q; \\ CB : \quad x = 0, \quad \varphi = -H_2; \quad BA_1 : \quad y = 0, \quad \psi = 0; \quad A_1A : \quad \varphi = -H, \quad x = -L. \end{aligned} \quad (1)$$

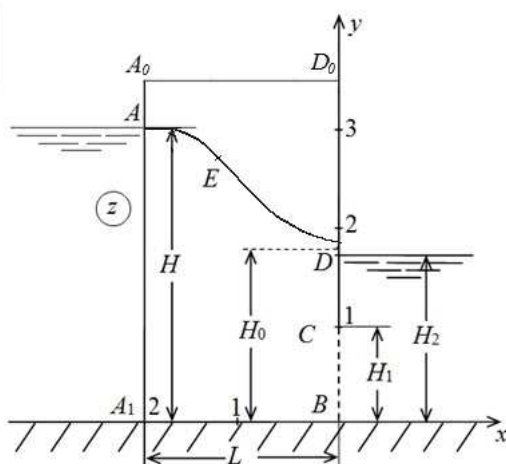


Рис. 1. Картина течения в прямоугольной перемычке, рассчитанная при $\varepsilon = 0.5$, $H = 3$, $L = 2$, $H_1 = 1$, $H_2 = 1.4$.

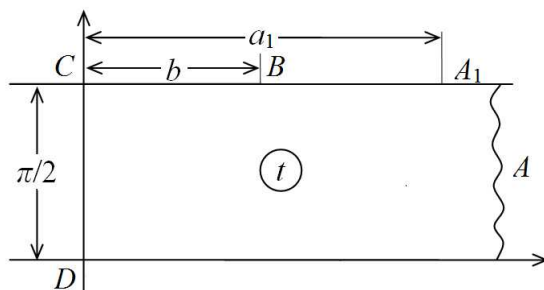


Рис. 2. Область вспомогательной параметрической переменной t .

Задача состоит в определении положения свободной поверхности AD и нахождении ординаты H_0 — точки выхода кривой депрессии на непроницаемый экран, а также фильтрационного расхода Q .

2. Построение решения. Для решения задачи используем метод П. Я. Полубариновой-Кочиной, который основан на применении аналитической теории линейных дифференциальных уравнений класса Фукса [1–6, 17]. Введем: вспомогательную область t (рис. 2) — полуполосу $Ret > 0$, $0 < Im t < 0.5\pi$ параметрической переменной t при соответствии точек $t_A = \infty$, $t_{A_1} = \operatorname{arctg}\sqrt{a_1} + 0.5\pi$, $t_B = \operatorname{arctg}\sqrt{b} + 0.5\pi$ ($1 < a_1 < b < \infty$), a_1, b — неизвестные аффиксы точек A_1 и B в плоскости t , $t_C = 0.5\pi i$ и $t_D = 0$; функцию $z(t)$, конформно отображающую полуполосу плоскости t на область z , а также производные $d\omega/dt$ и dz/dt .

Обратимся к области комплексной скорости w , соответствующей граничным условиям (1), которая изображена на рис. 3. Эта область, представляющая собой круговой четырехугольник $ACDE$ с разрезом с вершиной в точке E (соответству-

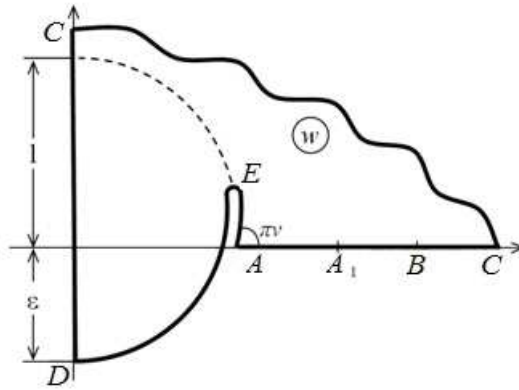


Рис. 3. Область комплексной скорости w .

ющей точке перегиба кривой депрессии) и углом $\pi\nu = 2\text{arctg}\sqrt{\varepsilon}$ при вершине A , принадлежит классу многоугольников в полярных сетках и была исследована ранее [16]. Важно подчеркнуть, что подобные области, несмотря на свой частный вид, однако весьма типичны и характерны для многих задач подземной гидромеханики: при фильтрации из каналов, оросителей и водоемов, при течениях пресных вод над покоящимися солеными, в задачах обтекания шпунта Жуковского при наличии соленых подпорных вод [14].

Функция, совершающая конформное отображение полуполосы на область комплексной скорости w , имеет известный вид [12]

$$w = -\sqrt{\varepsilon}i \frac{\sqrt{\varepsilon}(\text{ch } t \text{ ch } \nu t + C \text{ sh } t \text{ sh } \nu t) + i(\text{ch } t \text{ sh } \nu t + C \text{ sh } t \text{ ch } \nu t)}{\text{ch } t \text{ ch } \nu t + C \text{ sh } t \text{ sh } \nu t - i\sqrt{\varepsilon}(\text{ch } t \text{ sh } \nu t + C \text{ sh } t \text{ ch } \nu t)}, \quad (2)$$

где $C \neq 1$ — некоторая подходящая вещественная постоянная.

Определив характеристические показатели функций $d\omega/dt$ и dz/dt около регулярных особых точек [1–6, 17], учтя, что $w = d\omega/dz$, и приняв во внимание соотношение (2), придем к зависимостям

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= iM \frac{\sqrt{\varepsilon}(\text{ch } t \text{ ch } \nu t + C \text{ sh } t \text{ sh } \nu t) + i(\text{ch } t \text{ sh } \nu t + C \text{ sh } t \text{ ch } \nu t)}{\Delta(t)}, \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{M}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\text{ch } t \text{ ch } \nu t + C \text{ sh } t \text{ sh } \nu t - i\sqrt{\varepsilon}(\text{ch } t \text{ sh } \nu t + C \text{ sh } t \text{ ch } \nu t)}{\Delta(t)}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\Delta(t) = \sqrt{[(a_1 - 1) \text{sh}^2 t + a_1][(b - 1) \text{sh}^2 t + b]},$$

где $M > 0$ — масштабная постоянная моделирования.

Можно проверить, что функции (3) удовлетворяют граничным условиям (1), переформулированным в терминах функций $d\omega/dt$ и dz/dt , и, таким образом, являются параметрическим решением исходной краевой задачи. Запись представлений (3) для разных участков границы полуполосы с последующим интегрированием по всему контуру вспомогательной области параметрической переменной t приводит к замыканию области течения и, тем самым, служит для контроля вычислений.

В результате получим выражения для задаваемых величин: ширины L перемычки, уровней воды в верхнем и нижнем бьефах (H и H_2) и длины H_1 фильтра:

$$\int_0^{\infty} X_{DA}(t)dt = L, \quad \int_{\operatorname{arcth}\sqrt{a_1}}^{\infty} Y_{AA_1}(t)dt = H, \quad (4)$$

$$\int_0^{0.5\pi} [\Phi_{DC}(t) + Y_{DC}(t)]dt + H_1 = H_2, \quad \int_0^{\operatorname{arcth}\sqrt{b}} Y_{CB}(t)dt = H_1,$$

а также искомым координат точек свободной поверхности AD

$$x(t) = - \int_0^t X_{DA}(t)dt, \quad y(t) = H_0 - \int_0^t Y_{DA}(t)dt \quad (5)$$

и выражений для фильтрационного расхода Q и ординаты точки выхода свободной поверхности на экран

$$Q = \int_0^{\operatorname{arcth}\sqrt{b}} \Psi_{CB}(t)dt, \quad H_0 = H - \int_0^{\infty} \Phi_{DA}(t)dt. \quad (6)$$

Для контроля расчетов служат другие выражения для величин Q , H_0 и L :

$$Q = -\varepsilon L + \int_{\operatorname{arcth}\sqrt{a_1}}^{\infty} \Psi_{AA_1}(t)dt, \quad (7)$$

$$H_0 = H_2 - \int_0^{0.5\pi} \Phi_{DC}(t)dt, \quad H_0 = H_1 + \int_0^{0.5\pi} Y_{DC}(t)dt, \quad (8)$$

$$L = \int_{\operatorname{arcth}\sqrt{b}}^{\operatorname{arcth}\sqrt{a_1}} X_{BA_1}(t)dt, \quad (9)$$

а также выражение

$$\int_0^{\infty} \Phi_{DA}(t)dt = \int_0^{0.5\pi} \Phi_{DC}(t)dt + \int_{\operatorname{arcth}\sqrt{b}}^{\operatorname{arcth}\sqrt{a_1}} \Phi_{BA_1}(t)dt, \quad (10)$$

непосредственно вытекающее из граничных условий (1).

В формулах (4)–(8) подынтегральные функции — выражения правых частей равенств (3) на соответствующих участках контура вспомогательной области t .

Рассмотрим предельные случаи.

1. При $L \rightarrow \infty$, т.е. при слиянии точек A_1 и A , в плоскости t , т.е. при $a_1 \rightarrow 1$ ($\operatorname{arcth} a_1 = \infty$), перемычка вырождается в полубесконечный слева безнапорный пласт. Таким образом, получается точное решение о течении грунтовых вод к несовершенной галерее, исследованное ранее [12].

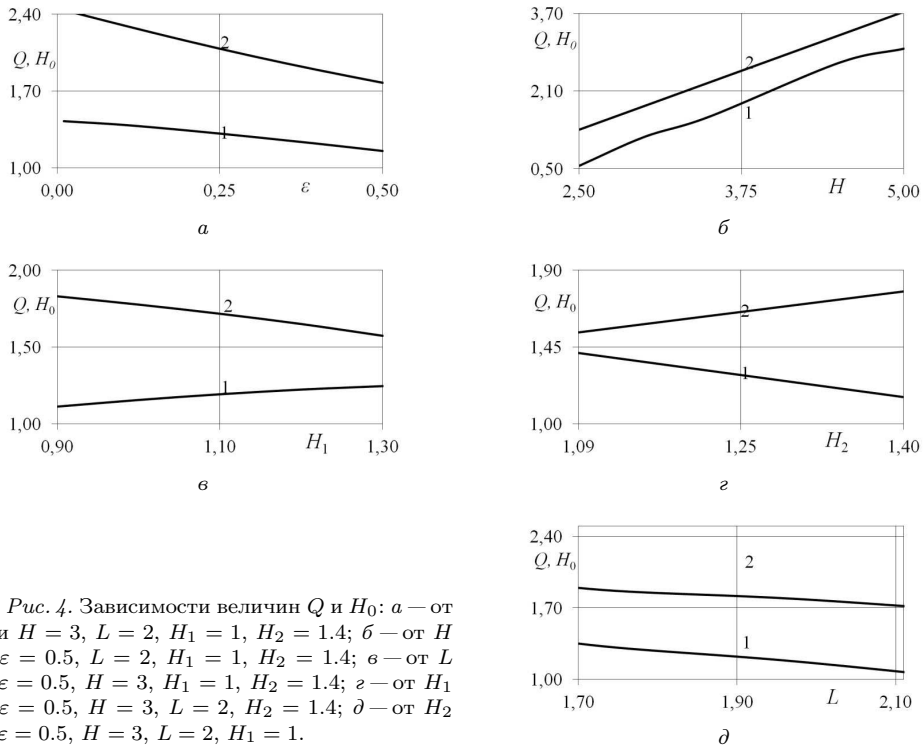


Рис. 4. Зависимости величин Q и H_0 : а — от ε при $H = 3$, $L = 2$, $H_1 = 1$, $H_2 = 1.4$; б — от H при $\varepsilon = 0.5$, $L = 2$, $H_1 = 1$, $H_2 = 1.4$; в — от L при $\varepsilon = 0.5$, $H = 3$, $H_1 = 1$, $H_2 = 1.4$; г — от H_1 при $\varepsilon = 0.5$, $H = 3$, $L = 2$, $H_2 = 1.4$; д — от H_2 при $\varepsilon = 0.5$, $H = 3$, $L = 2$, $H_1 = 1$.

2. При $\varepsilon \rightarrow 0$, т.е. при малых значениях интенсивности испарения в области комплексной скорости w , получается круговой четырехугольник, который при $\varepsilon = 0$ сводится к прямолинейному (в этом случае применима формула Кристоффеля — Шварца). Приходим к зависимостям расхода и точки выхода свободной поверхности на экран работы [8].

3. Анализ численных результатов. Представления (3)–(10) содержат четыре неизвестные постоянные M , C , a_1 и b . Параметры a_1 , b ($1 < a_1 < b < \infty$), C ($C \neq 1$) определяются из уравнений (4) для задаваемых величин H_1 , H_2 ($H_1 \leq H_2 < H$) и L , постоянная моделирования M при этом находится из второго уравнения (4), фиксирующего уровень H воды в верхнем бьефе перемычки. После определения неизвестных постоянных последовательно находятся фильтрационный расход Q и ордината H_0 точки выхода кривой депрессии на непроницаемый участок DC по формулам (6) и координаты точек свободной поверхности DA по формулам (5).

На рис. 1 изображена картина течения, рассчитанная при $\varepsilon = 0.5$, $H = 3$, $L = 2$, $H_1 = 1.0$, $H_2 = 1.4$ (базовый вариант [12]). Результаты расчетов влияния определяющих физических параметров ε , H , H_1 , H_2 и L на величины Q и H_0 приведены в табл. 1–3. На рис. 4 представлены зависимости расхода Q (кривые 1) и ординаты H_0 выхода кривой депрессии на экран (кривые 2) от параметров ε , H , H_1 , H_2 и L .

Анализ данных таблиц и графиков позволил сделать следующие выводы.

Прежде всего, обращает на себя внимание противоположный качественный характер изменения величин Q и H_0 при варьировании параметров ε , H и L (табл. 1): так же, как и ранее [12], уменьшение ε и L и увеличение H приводят к возраста-

нию расхода и увеличению ординаты выхода кривой депрессии на экран. При этом наибольшее влияние на величины Q и H_0 оказывает напор: при возрастании параметра H всего вдвое расход и ордината увеличиваются более, чем на 428 и 166% соответственно.

Таблица 1. Результаты расчетов величин Q и H_0 при варьировании ε , H и L

ε	Q	H_0	H	Q	H_0	L	Q	H_0
0.1	1.3937	2.3003	2.5	0,5624	1,4074	1.5	1.6261	2.1424
0.2	1.3423	2.1544	3.0	1,1554	1,775	1.7	1,897	1,3492
0.3	1.2839	2.0179	3.5	1,5715	2,0883	2.0	1,1554	1,7755
0.4	1.2218	1.8920	4.5	2,6811	3,3097	2.5	0,7585	1,5045
0.5	1.1554	1.7755	5.0	2,9726	3,7528	2.9	0,4863	1,3727

Существенный интерес представляют изменения расхода и ординаты точки выхода свободной поверхности на экран от уровня воды H_2 в нижнем бьефе, а также от степени заглубления экрана, т. е. от величины H_1 при фиксированных ε , H и L (табл. 2). Видно, что увеличение уровня воды H_2 в нижнем бьефе и уменьшение заглубления экрана H_1 сопровождаются уменьшением расхода и подъемом свободной поверхности, что, в свою очередь, выражается в увеличении H_0 ; оба эти фактора характеризуют усиление подпора.

Из табл. 2 следует, что уменьшение параметров H_1 и H_2 соответственно на 45 и 29% влечет изменение величины Q на 21% (при фиксации H_1) и 12% (при фиксации H_2). Подобные изменения величины расхода характерны также и при других значениях варьируемых параметров H_1 и H_2 . Отмеченные закономерности приводят к заключению, что расход перемычки зависит от величины понижения уровня в несколько большей степени, чем от длины фильтра.

Таблица 2. Результаты расчетов величин Q и H_0 при варьировании H_1 и H_2

H_1	Q	H_0	H_2	Q	H_0
0.9	1.1120	1.8292	1.09	1.3965	1.5533
1.0	1.1554	1.7755	1.19	1.3627	1.5775
1.1	1.1928	1.7161	1.29	1.2425	1.7051
1.2	1.2235	1.6494	1.39	1.1598	1.7695
1.3	1.2460	1.5728	1.40	1.1634	1.7694

Из рис. 4 видно, что для базового варианта почти все зависимости величин Q и H_0 от параметров ε и H_2 близки к линейным.

Сравнение точных значений, полученных для базового варианта $Q = 1.155$ и $H_0 = 1.776$, с приближенными значениями $Q = 1.141$ и $H_0 = 1.768$ для базового варианта работы [12], где область течения слева ограничивалась эквипотенциалью, показывает, что относительная погрешность приближенных вычислений расхода Q и ординаты H_0 весьма мала и составляет всего 0.5 и 1.3% соответственно.

Сопоставление точного значения расхода $Q = 1.16$, найденного для базового варианта, со значением $Q = 1.26$, которое получается при применении обобщенной приближенной формулы И. А. Чарного [1, с. 267] для прямоугольной перемычки (без

экрана) при наличии испарения

$$Q = -\frac{\varepsilon L}{2} + \frac{H^2 - H_2^2}{2L},$$

приводит к погрешности 8.3%.

Для сравнения с данными $H = 1$, $H_1 = 0.05$, $H_2 = 0.238$, $L = 4$ работы [8] при отсутствии испарения, т.е. при $\varepsilon = 0$, для которых по приближенным формулам в полуобратной постановке получены значения $Q = 0.118$, $H_0 = 0.29$, рассмотрим вариант $\varepsilon = 0.1$, $H = 1$, $H_1 = 0.05$, $H_2 = 0.238$, $L = 4$, приводящий к точным значениям $Q = 0.42$, $H_0 = 0.75$. Здесь относительные погрешности приближенных вычислений составляют 71 и 61% соответственно. Следовательно, также, как и в [12], испарение существенно влияет на картину течения.

Заключение. Разработана методика построения точного аналитического решения задачи о движении в жидкости в прямоугольной перемычке с экраном при наличии испарения со свободной поверхности грунтовых вод. Исследование показывает, что схема фильтрации в прямоугольной перемычке с непроницаемым экраном, во-первых, весьма схожа с рассмотренной ранее [12] задачей о движении грунтовых вод к несовершенной галерее, причем одна из них является предельной по отношению к другой. Во-вторых, картина течения вблизи экрана существенно зависит не только от размера фильтра, но и от наличия испарения, что сильно отражается на величине расхода и ординате точки выхода кривой депрессии на экран. Полученные результаты дают некоторое представление (по крайней мере, качественно) о возможной зависимости характеристик движения при рассмотрении задачи фильтрации уже к несовершенной скважине или трубчатому колодцу.

Авторы благодарят рецензентов за тщательное рецензирование и полезные замечания, способствующие значительному улучшению статьи.

Литература

1. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. 2-е изд. М.: Наука, 1977.
2. *Аравин В. И., Нумеров С. Н.* Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде М.: Гостехиздат, 1953.
3. *Полубаринова-Кочина П. Я.* (отв. ред.) Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967). М.: Наука, 1967.
4. *Полубаринова-Кочина П. Я., Пряхинская В. Г., Эмих В. Н.* Математические методы в вопросах орошения. М.: Наука, 1969.
5. *Михайлов Г. К., Николаевский В. Н.* Движение жидкостей и газов в пористых средах // В кн.: Механика в СССР за 50 лет. М.: Наука, 1970. Т. 2. С. 585–648.
6. *Кочина П. Я.* Гидродинамика и теория фильтрации. Избранные труды. М.: Наука, 1991.
7. *Полубаринова-Кочина П. Я., Постнов В. А., Эмих В. Н.* Установившаяся фильтрация к несовершенной галерее в безнапорном пласте // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1967. № 4. С. 97–100.
8. *Пряхинская В. Г.* Движение грунтовых вод в прямоугольной перемычке с непроницаемой вертикальной стенкой // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1964. № 4. С. 41–49.
9. *Михайлов Г. К.* К задаче о фильтрации в анизотропных земляных плотинах трапециевидного профиля на горизонтальном водоупоре // Докл. АН СССР. 1967. Т. 80, № 4. С. 553–556.
10. *Михайлов Г. К.* о фильтрации в трапециевидных плотинах на горизонтальном водоупоре // Гидротехника и мелиорация. 1952. № 1. С. 33–42.
11. *Михайлов Г. К.* о фильтрации в трапециевидных плотинах с вертикальным верховым откосом // ПММ. 1953. Т. 17. Вып. 2. С. 189–199.

12. Береславский Э. Н., Дудина Л. М. О движении грунтовых вод к несовершенной галерее при наличии испарения со свободной поверхности // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 4. С. 654–663. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.413>

13. Береславский Э. Н., Кочина П. Я. О некоторых уравнениях класса Фукса в гидро- и аэромеханике // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1992. № 5. С. 3–7.

14. Кочина П. Я., Береславский Э. Н., Кочина Н. Н. Аналитическая теория линейных дифференциальных уравнений класса Фукса и некоторые задачи подземной гидромеханики. Ч. 1. М.: Институт проблем механики РАН, 1996. Препринт № 567. 122 с.

15. Береславский Э. Н., Кочина П. Я. О дифференциальных уравнениях класса Фукса, встречающихся в некоторых задачах механики жидкостей и газов // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1997. № 5. С. 9–17.

16. Береславский Э. Н. Об интегрировании в замкнутой форме некоторых дифференциальных уравнений класса Фукса, связанных с конформным отображением круговых пятиугольников с разрезом // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 4. С. 459–466.

17. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.

Статья поступила в редакцию 6 июня 2018 г.;
после доработки 14 декабря 2018 г.;
рекомендована в печать 20 декабря 2018 г.

Контактная информация:

Береславский Эдуард Наумович — д-р физ.-мат. наук, проф.; eduber@mail.ru
Дудина Лилия Михайловна — аспирант; liliya_shuvalova@mail.ru

Problem of filtration in a rectangular web with a partially impenetrable vertical wall

E. N. Bereslavskii, L. M. Dudina

St. Petersburg State University of Civil Aviation,
ul. Pilotov, 38, St. Petersburg, 196210, Russian Federation

For citation: Bereslavskii E. N., Dudina L. M. Problem of filtration in a rectangular web with a partially impenetrable vertical wall. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2019, vol. 6 (64), issue 2, pp. 288–297. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.211> (In Russian)

We consider a flat steady filtration in a rectangular web with a partially impenetrable vertical wall in the presence of evaporation from a free surface of groundwater. To study the effect of evaporation, a mixed multiparametric boundary-value problem of the theory of analytic functions is solved using the method of P. Ya. Polubarinova-Kochina. Based on the proposed model, an algorithm for calculating the flow's filtration characteristics has been developed and a hydrodynamic analysis of the dependencies of the effect of all physical parameters of the circuit on the flow rate of the web and the ordinate of the point of exit of the depression curve on an impenetrable wall is developed.

Keywords: filtration, evaporation, web, ground water, free surface, Polubarinova-Kochina method, complex velocity, conformal mappings, differential equations of the Fuchs class.

References

1. Polubarinova-Kochina P. Y., *Theory of the motion of ground waters* (2nd ed., Nauka Publ., Moscow, 1977). (In Russian)
2. Aravin V. I., Numerov S. N., *Theory of the motion of liquids and gases in an undeformable porous medium* (Gostehizdat Publ., Moscow, 1953). (In Russian)

3. Polubarinova-Kochina P. Y. (ed.), *Development of research on filtration theory in USSR (1917–1967)* (Nauka Publ., Moscow, 1967). (In Russian)
4. Polubarinova-Kochina P. Y., Priazhinskaia V. G., Emikh V. N., *Mathematical methods in irrigation* (Nauka Publ., Moscow, 1969). (In Russian)
5. Mihajlov G. K., Nikolaevskij V. N., *Movement of liquids and gases in porous media*, in *Mechanics in USSR for 50 years* **2**, 585–648 (Nauka Publ., Moscow, 1970). (In Russian)
6. Kochina P. Y., *Hydrodynamics and the theory of filtration. Selected Works* (Nauka Publ., Moscow, 1991). (In Russian)
7. Polubarinova-Kochina P. Y., Postnov V. A., Emikh V. N., “Steady filtration to the unadulterated gallery in the free-flowing formation”, *Izv. AN SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza* (4), 97–100 (1967). (In Russian)
8. Priazhinskaia V. G., “Movement of groundwater in a rectangular web with an impenetrable vertical wall”, *Izv. AN SSSR. Mekhanika i Mashinstroenie* (4), 41–49 (1964). (In Russian)
9. Mikhailov G. K., “To a task about filtration in anisotropic earth dams of a trapezoidal profile on a horizontal water emphasis”, *Dokl. Academy of Sciences of the USSR* **80**(4), 553–556 (1967). (In Russian)
10. Mikhailov G. K., “On filtration in trapezoidal dams on a horizontal water body”, *Hydraulic engineering and melioration* (1), 33–42 (1952). (In Russian)
11. Mikhailov G. K., “On the filtration in trapezoidal dams with a vertical upper slope”, *PMM* **17**(2), 189–199 (1953). (In Russian)
12. Bereslavskii E. N., Dudina L. M., “About flow of ground water to imperfect gallery in the presence of evaporation with a free surface”, *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, **4** (62), issue 4, 654–663 (2017). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.413> (In Russian)
13. Bereslavskii E. N., Kochina P. Y., “Some equations of the Fuchs class in hydro- and aeromechanics”, *Fluid Dynamics* **27**, issue 5, 603–607 (1992).
14. Kochina P. Y., Bereslavskii E. N., Kochina N. N., *Analytic theory of linear differential equations of the Fuchs class and some problems of underground hydromechanics*, ch. 1 (Institut problem mekhaniki RAN, Moscow, 1996, preprint N 567, 122 p.). (In Russian)
15. Bereslavskii E. N., Kochina P. Y., “Differential equations of the Fuchs class encountered in some problems of mechanics of liquids and gases”, *Fluid Dynamics* **32**, issue 5, 619–625 (1997).
16. Bereslavskii E. N., “On closed-form integration of some Fuchsian differential equations related to a conformal mapping of circular pentagons with a cut”, *Differential Equations* **46**(4), 463–469 (2010). <https://doi.org/10.1134/S0012266110040014>
17. Golubev V. V., *Lectures on the analytic theory of differential equations* (Gostehizdat Publ., Moscow, Leningrad, 1950). (In Russian)

Received: July 6, 2018

Revised: December 14, 2018

Accepted: December 20, 2018

Author's information:

Eduard N. Bereslavskii — eduber@mail.ru

Liliya M. Dudina — liliya_shuvalova@mail.ru