

Особенности решения задачи тройного сдвига по эндохронной теории неупругости, учитывающей большие деформации*

Т. А. Забавникова¹, С. П. Помыткин²

¹ Военная академия связи имени Маршала Советского Союза С. М. Буденного, Российская Федерация, 194064, Санкт-Петербург, Тихорецкий пр., 3

² Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Российская Федерация, 190000, Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, 67

Для цитирования: Забавникова Т. А., Помыткин С. П. Особенности решения задачи тройного сдвига по эндохронной теории неупругости, учитывающей большие деформации // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 2. С. 329–337. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.215>

В рамках эндохронной теории неупругости, учитывающей большие деформации, решена задача жесткого тройного сдвига. Предложена численная реализация алгоритма для нахождения ортогонального тензора поворота и тензора вихря, на основе которых строится тензор деформаций. Одновременно тензор деформации вычисляется прямым численным методом. Сравняются и анализируются соответствующие компоненты деформаций, полученные с помощью обоих методов.

Ключевые слова: неупругость, большие деформации, эндохронная теория, определяющие соотношения, тройной жесткий сдвиг.

Введение. Эндохронный подход к построению определяющих соотношений теории неупругости, начиная с работ [1, 2], активно используется как в фундаментальных исследованиях [3], так и в инженерных расчетах [4, 5].

Установленные связи [6, 7] ранних вариантов эндохронной теории [1, 2, 8] с теориями пластического течения и упруго-пластических процессов взаимно обогатили и расширили возможности всех подходов к исследованию проявлений неупругости материалов.

Естественным эволюционным развитием эндохронных вариантов теории неупругости явилось их обобщение на область больших деформаций и поворотов. Некоторые геометрически нелинейные математические модели эндохронного типа и результаты исследований на их основе неупругого поведения материалов и конструкций можно найти в работах [9–12].

В предлагаемой статье представлены результаты вычисления деформаций в задаче жесткого тройного сдвига в рамках геометрически нелинейных определяющих соотношений эндохронной теории неупругости тензорно-параметрического типа, опубликованных ранее в [13].

Определяющие соотношения и постановка задачи. В работе [13] была сформулирована эндохронная теория неупругости, учитывающая большие деформации и повороты. Определяющие соотношения связи [13] между компонентами

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-08-01241А).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2019

тензора напряжений Коши σ и деформаций ε имеют следующий вид:

$$\frac{\alpha\tau}{2G} \overset{\circ}{\sigma} + \frac{\sigma}{2G} |\dot{r}| = \tau \overset{\circ}{r} + \frac{r}{g+\alpha} |\dot{r}|, \quad (1)$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon} = D, \quad r = \varepsilon - (1-\alpha) \frac{\sigma}{2G}, \quad \tau = \tau(|r|), \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{3K}.$$

Здесь r — девиатор параметрического тензора, τ — аналог деформационного предела текучести, g — аналог коэффициента упрочнения материала, α — параметр эндохронности ($0 \leq \alpha \leq 1$), G — модуль сдвига, K — объемный модуль. Кроме того, $\varepsilon_0 = \varepsilon_{ii}$ и $\sigma_0 = \sigma_{ii}$ — первые инварианты тензора деформаций и напряжений, $|A| = \sqrt{A : A}$ — норма тензора A , $\overset{\circ}{A} = \dot{A} + A\Omega - \Omega A$ — его объективная производная, $\Omega = \dot{Q}Q^T$ — тензор вихря, Q — ортогональный тензор поворота, $D = (L + L^T)/2$ — тензор скоростей деформаций, $L = \dot{F}F^{-1}$ — скорость градиента деформаций, F — градиент деформаций (точка над объектами определяет производную по «временному» параметру t). Имеет место полярное разложение градиента деформаций $F = QU$, где U — симметричный правый тензор удлинения. Во всех соотношениях принята безындексная форма записи тензоров.

Вычисляется тензор деформаций ε в тройном сдвиге, когда жесткое нагружение задается тензором скоростей деформации

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Отметим, что дифференциальное соотношение для деформаций $\overset{\circ}{\varepsilon} = D$ при задании тензора D определяет неголономную меру деформации, отличную от классических мер деформации из семейства Хилла [14].

Восстановление градиента деформации. Предположим, что градиент деформаций имеет «минимальную» структуру

$$F = \begin{pmatrix} 1 & k_{12} & k_{13} \\ 0 & 1 & k_{12} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3a)$$

которая способна порождать тензор скоростей деформаций типа (2). Тогда находим при $k_3 = k_{12}^2 - k_{13}$

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -k_{12} & k_3 \\ 0 & 1 & -k_{12} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Последовательно вычисляем $L = \dot{F}F^{-1}$ и $D = (L + L^T)/2$, приравниваем найденные компоненты D к компонентам (2) и решаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно k_{12} и k_{13} при естественных начальных условиях $k_{ij}(0) = 0$. Получаем, что $k_{12} = 2t$, $k_{13} = 2t(t+1)$, $k_3 = 2t(t-1)$. Таким образом, по заданному жесткому нагружению типа (2) восстановлен градиент деформаций

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2t & 2t(t+1) \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3b)$$

Построение ортогонального тензора поворота. Для использования определяющих соотношений теории (1) необходимо вычислить тензор вихря Ω , который определяется ортогональным тензором поворота Q . Построение тензора Q — основная техническая задача.

Предлагается, составив из общих геометрических соображений структуру тензора Q , установить на основе изучаемого нагружения (2) и типа градиента деформации (3) число независимо изменяющихся параметров тензора Q . Затем найти из определения полярного разложения градиента деформации $F = QU$ правый тензор удлинения U и обратный ему U^{-1} . Учитывая симметричность тензоров U и U^{-1} , а также найденный тензор градиента деформации F в виде (3b), указать связи между параметрами Q , то есть определить зависимости компонент ортогонального тензора поворота Q от параметра нагружения t — времени. (Отметим, что для задач простого и двойного сдвига эти компоненты находятся относительно просто [15, 16].)

По методу, предложенному в [17, 18], запишем геометрическое соотношение, связывающее ортогональный тензор поворота Q с кососимметрическим тензором M :

$$Q = I + \frac{\sin \omega}{\omega} M + \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} M^2, \quad (4)$$

где $\bar{\omega} (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — вектор поворота с модулем $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$, I — единичный тензор,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^2 = \begin{pmatrix} -\omega_2^2 - \omega_3^2 & \omega_1\omega_2 & \omega_1\omega_3 \\ \omega_1\omega_2 & -\omega_1^2 - \omega_3^2 & \omega_2\omega_3 \\ \omega_1\omega_3 & \omega_2\omega_3 & -\omega_1^2 - \omega_2^2 \end{pmatrix}.$$

Исходя из найденного градиента деформаций (3b), заметим, что имеются лишь две различные функции k_1 и k_2 , определяющие тензор M , то есть структура M такова, что

$$M = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & k_1 \\ -k_2 & -k_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Введем обозначения

$$\sqrt{2} k_1 = \omega \sin \varphi, \quad k_2 = \omega \cos \varphi, \quad \omega = \sqrt{2k_1^2 + k_2^2},$$

тогда тензор M можно записать как

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sin \varphi}{\sqrt{2}} & \cos \varphi \\ -\frac{\sin \varphi}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sin \varphi}{\sqrt{2}} \\ -\cos \varphi & -\frac{\sin \varphi}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \omega.$$

Используя схему (4), получим равенства

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{12} \\ Q_{31} & Q_{21} & Q_{11} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= 1 + \frac{A}{2} \cdot (1 + \cos^2 \varphi), & Q_{22} &= 1 + A \cdot \sin^2 \varphi, \\
Q_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (B \cdot \sin \varphi + A \cdot \cos \varphi \sin \varphi), & Q_{13} &= B \cdot \cos \varphi - \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \varphi, \\
Q_{21} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (-B \cdot \sin \varphi + A \cdot \cos \varphi \sin \varphi), & Q_{31} &= -B \cdot \cos \varphi - \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \varphi, \\
A &= \cos \omega - 1, & B &= \sin \varphi.
\end{aligned}$$

Найдем зависимость параметров ω и φ от времени t . Исходя из (3b) и (5), запишем правый тензор удлинения $U = Q^{-1} F = Q^T F$ и обратный ему $U^{-1} = F^{-1} Q$. Учитывая симметрию U и U^{-1} , получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
Q_{21} &= Q_{12} - k_{12} Q_{11}, & Q_{31} &= -k_{12} Q_{12} + k_3 Q_{11} + Q_{13}, \\
Q_{22} &= -\frac{k_{13}}{k_{12}} Q_{12} + Q_{11} + Q_{13}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Подчеркнем, что из шести условий симметрии для компонент тензоров U и U^{-1} независимыми являются только три. Подставим в третье уравнение группы (6) выражения для Q_{ij} из (5) и получим

$$\frac{A}{B} = \frac{\cos \varphi - \frac{k_{13}}{k_{12}} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sqrt{2}}}{2 \sin^2 \varphi - 1 + \frac{k_{13}}{k_{12}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin \varphi \cos \varphi}. \tag{7}$$

Подставляя в первое и во второе соотношения (6) их выражения из (5), аналогично находим, что

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{2k_3 \sin \varphi}{\sqrt{2}} + 2k_{12} \cos \varphi - \frac{k_{12}^2 \sin \varphi}{\sqrt{2}}}{\frac{k_{12}^2}{\sqrt{2}} \cdot \sin \varphi \cos \varphi}. \tag{8}$$

Приравнивая правые части (7) и (8), составляем уравнение для нахождения связи между t и φ :

$$\operatorname{tg}^3 \varphi - \frac{t^2 + 1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg}^2 \varphi - 2 \operatorname{tg} \varphi + \sqrt{2} = 0. \tag{9}$$

Из соотношений (7)–(9) окончательно получаем выражения

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{\sqrt{2} \cos \varphi - (t + 1) \sin \varphi}{\sqrt{2} \cos 2\varphi - (t + 1) \sin \varphi \cos \varphi}, \tag{10}$$

$$t = \sqrt{\sqrt{2} \operatorname{tg} \varphi - 1 - 2 \sqrt{2} \operatorname{ctg} \varphi + 2 \operatorname{ctg}^2 \varphi}. \tag{11}$$

Нахождение тензора деформаций. После нахождения ортогонального тензора поворота для записи объективных производных физических величин, входящих в определяющие соотношения (1), необходимо вычислить тензор вихря $\Omega = \dot{Q}Q^T$. Прямые вычисления для тензора Ω приводят к следующему выражению:

$$\Omega = \dot{\varphi} \cdot S + \dot{\omega} \cdot T, \tag{12}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & P + A & -\sqrt{2} N \\ -P - A & 0 & P - A \\ \sqrt{2} N & -P + A & 0 \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \sin \varphi & \sqrt{2} \cos \varphi \\ -\sin \varphi & 0 & \sin \varphi \\ -\sqrt{2} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \end{pmatrix},$$

в котором обозначено

$$P = \sin \omega \cos \varphi, \quad N = \sin \omega \sin \varphi, \quad H = \sqrt{2} \cos 2\varphi - (t + 1) \sin \varphi \cos \varphi,$$

а также

$$\dot{\varphi} = \frac{\sqrt{2} t \cdot \sin^2 \varphi}{3 \operatorname{tg}^2 \varphi - \sqrt{2}(t^2 + 1) \operatorname{tg} \varphi - 2}, \quad (13)$$

$$\dot{\omega} = \frac{2 \cos^2 \frac{\omega}{2} \sin \varphi}{H^2} \times \left[\sqrt{2} \sin^2 \varphi + \dot{\varphi} \cdot \left(6 - 3\sqrt{2} \cdot (t + 1) \sin \varphi \cos \varphi + (t^2 + 2t - 3) \sin^2 \varphi \right) \right]. \quad (14)$$

Для вычисления деформаций при тройном сдвиге решается замкнутая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\varepsilon} + \varepsilon \Omega - \Omega \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

если девиатор тензора деформаций ε имеет вид

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix},$$

а начальные условия $-\varepsilon_{ij}(0) = 0$.

На рис. 1 приведены графики развития сдвиговых ε_{12} , ε_{13} , ε_{23} и осевых компонент $(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33})$ тензора деформаций во времени для задачи жесткого тройного сдвига (2), полученные в процессе численно-аналитического решения по соотношениям (3)–(15).

Независимо от численно-аналитического решения эта же задача (2) была решена и прямым численным методом в среде MATLAB. Результаты в форме графиков изменения деформаций от t представлены на рис. 2.

Естественно, что вычисленные деформации при активном нагружении монотонно возрастают по абсолютной величине, соответствующие компоненты совпадают по знаку и порядку, хотя во втором случае сдвиговые деформации несколько больше полученных по численно-аналитической схеме. Отметим также, что осевые деформации на три порядка меньше сдвиговых, но их абсолютные значения ненулевые, то есть проявляется эффект Свифта [19], причем $\varepsilon_{ii} = 0$, как и должно быть у девиаторов.

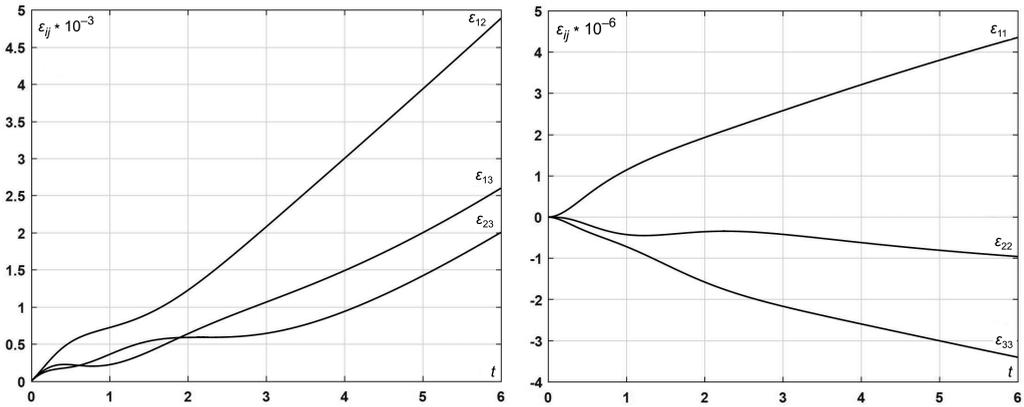


Рис. 1. Развитие деформаций во времени (численно-аналитический метод).

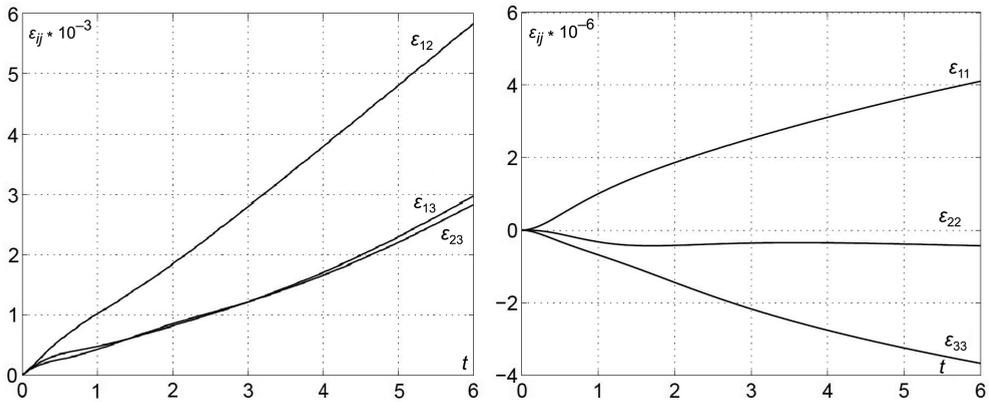


Рис. 2. Изменение компонент деформаций от времени (численный метод).

Заключение. Таким образом, поставлена и для тензора деформаций решена задача жесткого тройного сдвига. Предложен и в технически сложном случае реализован численно-аналитический метод построения ортогонального тензора поворота и тензора вихря, необходимых для определения объективных производных, входящих в определяющие соотношения теории напряжений и деформаций. Отмечается, что прямой численный метод, протестированный здесь на задаче жесткого тройного сдвига численно-аналитической процедурой, имеет более общее приложение, так как при определении ортогонального тензора поворота позволяет исходить не только из нагружения типа (2), но и из произвольного задания тензора D . Вычисленные по геометрическим соотношениям нелинейной теории эндохронного типа деформации (15) не противоречат экспериментальным наблюдениям. Вычисление тензора напряжений по уравнениям теории (1) после этого не представляет затруднений (при этом, конечно же, необходимо знать константы и функции изучаемого материала).

Литература

1. *Кадашевич Ю. И.* О различных вариантах тензорно-линейных соотношений в теории пластичности // Исследования по упругости и пластичности. Л.: Изд-во ЛГУ, 1967. № 6. С. 39–45.
2. *Valanis K. C.* A theory of viscoplasticity without a yield surface // Archives of Mechanics. 1971. Vol. 23, N 4. P. 517–551.
3. *Lu J.-B., Zhao S.-X.* A thermal-viscoplastic endochronic constitutive model for PC/ABS alloys // Shanghai Jiaotong University. 2011. Vol. 45. Issue 10. P. 1465–1468.
4. *Lee C. F.* Recent finite element applications of the incremental endochronic plasticity // International Journal of Plasticity. 1995. Vol. 30, N 7. P. 843–864.
5. *Klitschkowski T., Schomburg U., Bertram A.* Endochronic viscoplastic material models for filled PTFE // Mechanics of Materials. 2002. Vol. 34, N 12. P. 795–808.
6. *Мосолов А. Б.* Эндохронная теория пластичности. Препринт N 353 / Ин-т проблем механики АН СССР. 1988. 44 с.
7. *Кадашевич Ю. И., Помыткин С. П.* О взаимосвязи теории пластичности, учитывающей микронапряжения, с эндохронной теорией пластичности // Известия РАН. Механика твердого тела. 1997. N 4. С. 99–105.
8. *Valanis K. C.* Fundamental consequence of a new intrinsic time measure-plasticity as a limit of the endochronic theory // Archives of Mechanics. 1980. Vol. 32, N 2. P. 171–191.
9. *Pan W. F., Lee T. H., Yeh W. C.* Endochronic analysis for finite elasto-plastic deformation and application to metal tube under torsion and metal rectangular block under biaxial compression // International Journal of Plasticity. 1996. Vol. 12, N 10. P. 1287–1316.
10. *Khoei A. R., Bakhshiani A., Modif M.* An implicit algorithm for hypoelastic-plastic and hypoelastic-viscoplastic endochronic theory in finite strain isotropic-kinematic hardening model // International Journal of Solids and Structures. 2003. Vol. 40. Issues 13–14. P. 3393–3423.
11. *Быков Д. Л., Коновалов Д. Н.* Эндохронная модель механического поведения стареющих вязкоупругих материалов при конечных деформациях // Известия РАН. Механика твердого тела. 2006. N 6. С. 136–148.
12. *Suchocki C., Skoczylas P.* Finite strain formulation of elasto-plasticity without yield surface: theory, parameter identification and applications // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. 2016. Vol. 54, N 3. P. 731–742.
13. *Кадашевич Ю. И., Помыткин С. П.* Анализ сложного нагружения при конечных деформациях по эндохронной теории неупругости // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Москва: КМК, 1998. Вып. 59. С. 72–76.
14. *Nemat-Nasser S.* Plasticity. A treatise on finite deformation of heterogeneous inelastic materials. Cambridge; New York; Melbourne; Madrid; CapeTown: Cambridge University Press, 2004. 730 p.
15. *Кадашевич Ю. И., Помыткин С. П.* Вычисление ортогонального тензора поворота в задачах теории пластичности для конечных деформаций // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. Серия «Механика». 2004. Вып. 1 (6). С. 73–80.
16. *Кадашевич Ю. И., Помыткин С. П., Юдовин М. Э.* Вычисление меры деформации при двойном сдвиге // Актуальные проблемы строительства и строительной индустрии: сб. материалов III междунар. науч.-технич. конф. (Тула, 25–27 июня 2002). Тула: Изд-во Тульск. гос. ун-та, 2002. С. 35–36.
17. *Черных К. Ф.* Введение в физически и геометрически нелинейную теорию трещин. М.: Наука, 1996. 288 с.
18. *Иванов Б. Ф., Кадашевич Ю. И., Помыткин С. П.* О построении ортогонального тензора поворота для эндохронной теории неупругости, учитывающей большие деформации // Машины и аппараты целлюлозно-бумажного производства. СПб: Редакц.-издат. отдел СПбГТУРП, 2010. С. 53–61.
19. *Swift H. W.* Length changes in metals under torsional overstrain // Engineering. 1947. Vol. 163. P. 253–257.

Статья поступила в редакцию 25 сентября 2018 г.;
после доработки 10 октября 2018 г.;
рекомендована в печать 20 декабря 2018 г.

Контактная информация:

Забавникова Татьяна Алексеевна — преподаватель; zabavnikova.tatyana.al@yandex.ru
Помыткин Сергей Павлович — д-р физ.-мат. наук, проф.; sppom@yandex.ru

The features of solving the problem of triple shear in endochronic theory of inelasticity taking account large deformations

T. A. Zabavnikova¹, S. P. Pomytkin²

¹ Military Telecommunication Academy, Tikhoretskij pr., 3, St. Petersburg, 194064, Russian Federation

² University of Aerospace Instrumentation, ul. Bolshaya Morskaya, 67, St. Petersburg, 190000, Russian Federation

For citation: Zabavnikova T. A., Pomytkin S. P. The features of solving the problem of triple shear in endochronic theory of inelasticity taking account large deformations. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2019, vol. 6 (64), issue 2, pp. 329–337. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.215> (In Russian)

The problem of rigid triple shear is solved in the framework of the endochronic theory of inelasticity taking into account the finite deformations. The numerical realization of the algorithm for finding of orthogonal rotation tensor and vortex tensor is proposed. On their basis the strain tensor is formed. Simultaneously, the strain tensor is calculated by direct numerical method. The corresponding components of deformation obtained by both methods are compared and analyzed.

Keywords: inelasticity, large deformations, endochronic theory, constitutive equations, rigid triple shear.

References

1. Kadashevich Yu. I., "On different versions of tensor-linear relations in plasticity", *Issledovaniya po uprugosti i plastichnosti*, issue 6, 39–45 (1967). (In Russian)
2. Valanis K. C., "A theory of viscoplasticity without a yield surface", *Archives of Mechanics* **23** (4), 517–551 (1971).
3. Lu J.-B., Zhao S.-X., "A thermal-viscoplastic endochronic constitutive model for PC/ABS alloys", *Shanghai Jiaotong University* **45** (10), 1465–1468 (2011).
4. Lee C. F. "Recent finite element applications of the incremental endochronic plasticity", *International Journal of Plasticity* **30** (7), 843–864 (1995).
5. Kletschkowski T., Schomburg U., Bertram A., "Endochronic viscoplastic material models for filled PTFE", *Mechanics of Materials* **34** (12), 795–808 (2002).
6. Mosolov A. B., *Endochronic theory of plasticity*, Preprint N353 (IPM AN SSSR, Moscow, 1988, 44 p.). (In Russian)
7. Kadashevich Yu. I., Pomytkin S. P., "On the interconnection of plasticity theory taking into account the microstresses and endochronic theory of plasticity", *Izvestiya Rossiyskoy Akademii Nauk. Mekhanika Tverdogo Tela* **32** (4), 99–105 (1997). (In Russian)
8. Valanis K. C., "Fundamental consequence of a new intrinsic time measure-plasticity as a limit of the endochronic theory", *Archives of Mechanics* **32** (2), 171–191 (1980).
9. Pan W. F., Lee T. H., Yeh W. C., "Endochronic analysis for finite elasto-plastic deformation and application to metal tube under torsion and metal rectangular block under biaxial compression", *International Journal of Plasticity* **12** (11), 1287–1316 (1996).
10. Khoei A. R., Bakhshiani A., Modif M., "An implicit algorithm for hypoelastic-plastic and hypoelastic-viscoplastic endochronic theory in finite strain isotropic-kinematic hardening model", *International Journal of Solids and Structures* **40**, issues 13–14, 3393–3423 (2003).
11. Bykov D. L., Konovalov D. N., "Endochronic model of mechanical behavior of ageing viscoelastic materials at finite strains", *Izvestiya Rossiyskoy Akademii Nauk. Mekhanika Tverdogo Tela* **41** (6), 136–148 (2006). (In Russian)
12. Suchocki C., Skoczylas P., "Finite strain formulation of elasto-plasticity without yield surface: theory, parameter identification and applications", *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* **54** (3), 731–742 (2016).
13. Kadashevich Yu. I., Pomytkin S. P., "Analysis of complex loading at finite deformations for endochronic theory of plasticity", *Prikladnyye problemy prochnosti i plastichnosti*, issue 59, 72–76 (1998). (In Russian)

14. Nemat-Nasser S., *Plasticity. A treatise on finite deformation of heterogeneous inelastic materials* (Cambridge University Press, Cambridge; New York; Melbourne; Madrid; CapeTown, 2004, 730 p.).
15. Kadashevich Yu. I., Pomytkin S. P., "Calculation of the orthogonal rotation tensor for the problems of plasticity at finite deformations", *Vestnik Nizhegorodskogo Universiteta, Seriya Mekhanika*, issue 6, 73–80 (2004). (In Russian)
16. Kadashevich Yu. I., Pomytkin S. P., Yudovin M. E., "Calculation of the deformation measure for double shear", *Aktual'nye problemy stroitel'stva i stroitel'noi industrii. Materials of the 3rd International Conference (June 25–27, 2002, Tula, Russia)*, 35–36 (2002). (In Russian)
17. Chernykh K. F., *Introduction to physically and geometrically nonlinear theory of cracks* (Nauka Publ., Moscow, 1996, 288 p.). (In Russian)
18. Ivanov B. F., Kadashevich Yu. I., Pomytkin S. P., "On construction of orthogonal rotation tensor for endochronic theory of inelasticity at large deformations", *Machines and apparatuses of pulp and paper industry*, 53–61 (2010). (In Russian)
19. Swift H. W. "Length changes in metals under torsional overstrain", *Engineering* **163**, 253–257 (1947).

Received: September 25, 2018

Revised: October 10, 2018

Accepted: December 20, 2018

Author's information:

Tatiana A. Zabanikova — zabanikova.tatyana.al@yandex.ru

Sergey P. Pomytkin — sppom@yandex.ru

ХРОНИКА

12 декабря 2018 г. состоялось заседание секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Санкт-Петербургском Доме ученых РАН. Первым пунктом повестки заседания была презентация новой книги заслуженного деятеля науки, доктора физ.-мат. наук, профессора Г. Т. Алдошина: Аналитическая динамика и теория колебаний: учеб. пособие. — СПб.: Изд-во «Лань», 2018. — 256 с. ISBN 978-5-8114-3432-9. Книга рекомендована научно-методическим советом по теоретической механике в качестве учебного пособия для студентов и аспирантов машиностроительных и физико-технических вузов. Вторым пунктом повестки заседания был доклад доктора физ.-мат. наук, профессора М. П. Юшкова и магистра В. Э. Кондренкиной (математико-механический факультет СПбГУ) на тему «Неголономная модель скольжения фигуриста по льду».

Краткое содержание доклада:

Составлена упрощенная математическая модель скольжения фигуриста по льду. Неголономность задачи определяется отсутствием движения ноги фигуриста в перпендикулярном к коньку направлении. Упрощенность задачи состоит в том, что рассматриваются вращения рук и ног спортсмена только в плоскости его туловища. Составлены уравнения Маджи и приведены численные результаты его интегрирования для последовательности нескольких этапов движения фигуриста.