МАТЕМАТИКА

УДК 517.956
MSC 35K55

Памяти Г. А. Леонова

О регулярности решений модельной задачи с заданной косой производной для квазилинейных параболических систем с недиагональными главными матрицами*

А. А. Архипова[1], *Г. В. Гришина*[2]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
[2] Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,
Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5

Для цитирования: *Архипова А. А., Гришина Г. В.* О регулярности решений модельной задачи с заданной косой производной для квазилинейных параболических систем с недиагональными главными матрицами // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 1. С. 3–26. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.101

Рассматривается квазилинейная параболическая система уравнений с недиагональной главной матрицей в модельном параболическом цилиндре. На плоском участке боковой поверхности цилиндра решение системы удовлетворяет условию заданной косой производной. Предполагается, что главная матрица системы и функции, определяющие краевое условие, не обладают гладкостью по временной переменной. Доказана частичная регулярность обобщенного решения задачи (непрерывность по Гельдеру) в окрестности поверхности, где задано краевое условие. Как следствие, показано, что обобщенные решения соответствующей линейной задачи непрерывны по Гельдеру при оптимальных предположениях о гладкости данных задачи по независимым переменным. Для доказательства используется модификация метода $A(t)$-калорической аппроксимации, учитывающая данное краевое условие.

Ключевые слова: параболические системы, нелинейность, регулярность, косая производная.

*Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-01-00472).

1. Введение. В работе изучается регулярность обобщенных решений задачи с заданной косой производной для квазилинейных параболических систем с недиагональной главной матрицей. Данная работа обобщает результаты работы авторов [1], полученные для такого класса систем при краевом условии Неймана.

Пусть функция $u = u(x,\,t)$, $u = (u^1, \ldots, u^N)$, $N > 1$, — решение задачи

$$\begin{aligned} &u_t - \operatorname{div}(a(z,u)\nabla\, u) = g(z), \qquad\qquad z = (x,t) \in Q_1^+ = B_1^+ \times (-1,0);\\ &\frac{\partial u(z')}{\partial \mathbf{l}} := \frac{\partial u(z')}{\partial \mathbf{n}_a} + \sum_{\tau=1}^{n-1} \frac{d\, C^\tau(z', u(z'))}{d\, x_\tau} = \psi(z'), \quad z' = (x', 0, t) \in \Gamma_1 = \gamma_1 \times (-1,0). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь B_1^+ — полушар в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $\gamma_1 = B_1 \cap \{x_n = 0\}$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $\nabla\, u = \left\{\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\}$, $k \leq n$, $\mathbf{n}(x') = (0, \ldots, -1)$ — единичная нормаль в точках $x' \in \gamma_1$, внешняя к B_1^+.

Недиагональная матрица $a(z,u) = \{a_{kl}^{\alpha\beta}(z,u)\}$, $1 \leq \alpha, \beta \leq n$, $1 \leq k, l \leq N$, удовлетворяет условиям Каратеодори и условию равномерной эллиптичности на множестве $Q_1^+ \times \mathbb{R}^N$, эллиптический оператор в (1) определен равенством

$$\operatorname{div}(a(z,u)\,\nabla\, u) = \Big\{ \sum_{\alpha,\beta \leq n,\, l \leq N} (a_{kl}^{\alpha\beta}(z,u)\, u^l_{x_\beta})_{x_\alpha} \Big\}_{k \leq N},$$

и вектор конормальной производной имеет вид

$$\frac{\partial u(z')}{\partial \mathbf{n}_a} = -\Big\{ \sum_{\beta \leq n,\, l \leq N} a_{kl}^{n\beta}(z', u) u^l_{x_\beta} \Big\}_{k \leq N}, \quad z' \in \Gamma_1.$$

При $\tau = 1, \ldots, n-1$ определены вектор-функции $C^\tau(z', u) = \{C_k^\tau(z'u)\}_{k \leq N}$.

Далее мы всегда предполагаем, что $\tau \leq n-1$, и x_τ определяет касательное направление.

Данная работа посвящена описанию оптимальных предположений относительно гладкости матриц a, C^τ и функций g, ψ по переменным x и t, при которых можно показать непрерывность по Гельдеру обобщенного решения задачи (1) на множестве полной меры в окрестности поверхности Γ_1 и оценить хаусдорфову размерность допустимого замкнутого сингулярного множества решения. Как следствие, для *линейной* задачи с косой производной получаем гладкость решения на всем множестве $Q_1^+ \cup \Gamma_1$, т. е. для линейной задачи сингулярное множество исключается.

Первые результаты о частичной регулярности обобщенных решений простейших квазилинейных параболических систем с недиагональной главной матрицей получены в [2]. Для параболических систем более общего вида (класса систем с контролируемыми нелинейностями) частичная гладкость решений задачи с нелинейным краевым условием типа Неймана изучалась в работе [3] (в условии (1) $\psi = \psi(z', u)$ и $C^\tau = 0$). Регулярность обобщенных решений задачи с косой производной для эллиптических систем уравнений изучалась в работах [4, 5]. В [4] рассмотрены квазилинейные системы при краевом условии (1), а в [5] частичная регулярность обобщенных решений доказана для класса нелинейных эллиптических систем при более общем краевом условии.

Как показывают контрпримеры, построенные для размерностей $n \geq 3$, обобщенные решения квазилинейных параболических систем могут иметь сингулярности внутри параболического цилиндра даже при гладкой матрице системы и гладких граничных данных [6]. Пример, показывающий, что сингулярности могут накапливаться к границе области, построен для эллиптической квазилинейной системы, удовлетворяющей условию Дирихле [7]. Таким образом, можно ожидать лишь частичную регулярность обобщенных решений квазилинейных параболических систем в окрестности границы области.

В то же время показано, что для широкого класса нелинейных *скалярных* параболических уравнений и *линейных* систем уравнений имеет место непрерывность по Гельдеру обобщенных решений в ситуации, когда главная матрица системы не обладает какой-либо гладкостью по временной переменной. Были рассмотрены краевые задачи Дирихле и Неймана (см. [8–10] и ссылки в них). Метод исследования, примененный в этих работах, не распространяется на случай квазилинейных систем, когда априори известно, что решение может иметь сингулярности.

В работе Ф. Дюзар, Дж. Минджионе [11] был предложен новый метод «A-калорической» аппроксимации, с помощью которого авторы получили новые результаты о частичной регулярности решений для широкого класса параболических систем. Позднее этот метод был применен для изучения гладкости решений в окрестности границы при краевом условии Дирихле [12, 13]. (О применении этого метода для широкого класса систем см. работу [14] и ссылки в ней.) В рамках этого метода исследуемое решение аппроксимируется локально в L^2-норме решением простейшей параболической системы с постоянной матрицей A.

В работе А. Архиповой, О. Джон, Дж. Стара [15] была предложена модификация этого метода к методу «$A(t)$-калорической» аппроксимации. Это означает, что исследуемое решение системы аппроксимируется локально в L^2-норме решением простой линейной системы с матрицей $A(t)$, элементы которой — ограниченные измеримые на временном интервале функции. Это позволило при доказательстве частичной регулярности квазилинейных систем отказаться от требования какой-либо гладкости главной матрицы по переменной t. Метод $A(t)$-калорической аппроксимации в дальнейшем применялся этими авторами для ослабления предположений о гладкости матриц системы при доказательстве частичной регулярности вблизи границы при условии Дирихле [16], при рассмотрении квазилинейных систем недивергентного вида [17] и систем высокого порядка [18]. Кроме того, он был эффективно использован при изучении гладкости обобщенного решения задачи Вентцеля для параболических линейных и квазилинейных систем с недиагональными главными матрицами [19, 20]. Получение каждого нового результата основывалось на применении главной $A(t)$-калорической леммы в соответствующей задаче форме.

В работе авторов [1] при ослаблении известных требований гладкости относительно главной матрицы системы $a(z,u)$ была доказана частичная гладкость обобщенных решений задачи Неймана для квазилинейных параболических систем.

В данной работе мы рассматриваем более общее краевое условие и модифицируем метод $A(t)$-калорической аппроксимации для изучения задачи с заданной косой производной. Мы оцениваем хаусдорфову размерность сингулярного множества решения в окрестности границы при условиях интегральной непрерывности главной матрицы $a(z,u)$ и матриц $M^\tau(z,u) = (C^\tau(z,u))_u$ по пространственным переменным x. Мы не предполагаем какой-либо гладкости матрицы a, а также функций C^τ и их производных по x и u, по временной переменной t. Оптимальность требований относительно функций g и ψ в шкале пространств Морри подтверждается известными результатами для линейных задач. Можно допустить некоторый рост функций

g, ψ, C^τ по аргументу u, $|u| \to \infty$ (как это сделано в работе [3] для задачи Неймана), но мы не делаем этого, чтобы не усложнять доказательства. Как частный случай, мы показываем непрерывность по Гельдеру обобщенного решения соответствующей линейной задачи на всем множестве $Q_1^+ \cup \Gamma_1$.

В § 2 мы приводим принятые обозначения и требования на данные задачи, а также формулируем основные результаты работы — теорему 2.1 о частичной регулярности решений квазилинейных систем и теорему 2.2 о непрерывности по Гельдеру на множестве $Q_1^+ \cup \Gamma_1$ решений линейной задачи. В § 3 приведены вспомогательные утверждения для линейной задачи с косой производной, в которой $C^\tau(z, u) = M^\tau(z)\, u$ и не требуется какой-либо гладкости матриц $a(z)$ и $M^\tau(z)$. В § 4 обсуждаем свойства $A(t)$-калорических функций, удовлетворяющих краевому условию вида (1) и доказываем основную лемму (лемма 4.2). В последнем § 5 мы доказываем теоремы 2.1 и 2.2.

2. Обозначения и формулировка основного результата. В работе приняты следующие обозначения:

$\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство с точками $x = (x_1, \ldots, x_n) = (x', x_n)$;
$u = (u^1, \ldots, u^N)$, $\nabla u = \{u^k_{x_i}\}^{k \le N}_{i \le n}$, $|\nabla u|^2 = \sum_{i \le n, k \le N} (u^k_{x_i})^2$;
$B_R(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x^0| < R\}$, $\Lambda_R(t^0) = (t^0 - R^2, t^0)$;
$Q_R(z^0) = B_R(x^0) \times \Lambda_R(t^0)$, $Q'_R(z^0) = Q_R(z^0) \cap \{x_n > 0\}$, $\Omega_R(x^0) = B_R(x^0) \cap \{x_n > 0\}$;
$\gamma_R(x^0) = B_R(x^0) \cap \{x_n = 0\}$, $\Gamma_R(z^0) = Q_R(z^0) \cap \{x_n = 0\}$;
$B^+_R(x^0) = B_R(x^0) \cap \{x_n > 0\}$, если $x^0 \in \gamma_1(0)$;
$Q^+_R(z^0) = Q_R(z^0) \cap \{x_n > 0\}$, если $z^0 \in \Gamma_1(0)$;
$\partial_p Q^+_R(0) = \partial Q^+_R(0) \setminus (B^+_R(0) \times \{t = t^0\})$; $|Q_R|_{n+1} = \omega_n R^{n+2}, \omega_n = |B_1|_n$.

Мы пишем B^+_R, если $x^0 = 0$, Q_R, Q^+_R, Γ_R, если $z^0 = 0$.

В интегральных тождествах

$$g \cdot \phi = \sum_{k=1}^{N} g^k \phi^k, \quad a \nabla u \cdot \nabla \phi = \sum_{\alpha,\beta \le n,\, k,l \le N} a^{\alpha\beta}_{kl} u^l_{x_\beta} \phi^k_{x_\alpha}.$$

Через $\|u\|_{p,\Omega}$ обозначаем норму в пространстве $L^p(\Omega)$, где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$; $W^k_2(\Omega)$, $k \ge 1$, — пространства Соболева;

$$v_{r,z^0} = \fint_{Q'_r(z^0)} v(z)\, dz = \frac{1}{|Q'_r|} \int_{Q'_r(z^0)} v(z)\, dz.$$

Пространство $V_2(Q'_r(z^0)) = C(\Lambda_r(t^0))$; $W^1_2(\Omega_r(x^0))$ состоит из функций с конечной нормой

$$\|v\|_{V_2(Q'_r(z^0))} = \sup_{\Lambda_r(t^0)} \|v(\cdot, t)\|_{2,\Omega_r(x^0)} + \|\nabla v\|_{2,Q'_r(z^0)}.$$

Параболическое расстояние δ в $\mathbb{R}^{n+1}$ определяется следующим образом:

$$\delta(z^1, z^2) = \max\{|x^1 - x^2|, |t^1 - t^2|^{1/2}\} \quad \forall z^i = (x^i, t^i) \in \mathbb{R}^{n+1}, \qquad i = 1, 2.$$

Для произвольной ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и интервала $\Lambda \subset \mathbb{R}^1$ в цилиндре $Q = \Omega \times \Lambda$ определяем пространство Морри $L^{2,\lambda}(Q;\delta)$, $\lambda \in (0, n+2]$, в метрике δ:

$$L^{2,\lambda}(Q;\delta) = \Big\{ u \in L^2(Q) : \|u\|_{L^{2,\lambda}(Q)} = \Big(\sup_{z^0 \in Q,\ 0<\rho\le d} \frac{1}{\rho^\lambda} \int\limits_{Q'_\rho(z^0)} |u(z)|^2\, dz \Big)^{\frac{1}{2}} < \infty \Big\},$$

где $d = \max\{\mathrm{diam}\Omega, |\Lambda|\}$.

Пространство Кампанато $\mathcal{L}^{2,\lambda}(Q;\delta)$ с показателем $\lambda \in (0, n+4]$ в метрике δ — это пространство функций из $L^2(Q)$ с конечной нормой

$$[\![u]\!]_{2,\lambda,Q} = \|u\|_{2,Q} + [u]_{2,\lambda,Q},$$

где полунорма определяется следующим образом:

$$[u]_{2,\lambda,Q} = \left(\sup_{z^0 \in Q,\ 0<\rho\le d} \frac{1}{\rho^\lambda} \int\limits_{Q_\rho(z^0)} |u(z) - (u)_{z^0,\rho}|^2\, dz \right)^{\frac{1}{2}}, \quad d = \max\{\mathrm{diam}\Omega,\ |\Lambda|\}.$$

Для краткости пространства вектор-функций $\mathbb{B}(Q;\mathbb{R}^N)$ мы обозначаем $\mathbb{B}(Q)$. Различные, зависящие от параметров задачи постоянные будем обозначать как c или c_i.

Сформулируем условия на данные задачи, при которых будет доказан основной результат работы — теорема 2.1.

(H1) Существуют положительные постоянные $\nu \le \mu$ такие, что

$$(a(z,\eta)\,\xi\cdot\xi) = \sum_{\alpha,\beta\le n;\,k,l\le N} a^{\alpha\beta}_{kl}(z,\eta)\xi^l_\beta \xi^k_\alpha \ge \nu\,|\xi|^2, \tag{2}$$

$$|a(z,\eta)| \le \mu \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^N,\ \xi \in \mathbb{R}^{nN}, \quad \text{п. в. } z \in Q_1^+.$$

(H2) Элементы матрицы $a(z,\eta)$ равномерно непрерывны по $\eta \in \mathbb{R}^N$ при почти всех $z \in Q_1^+$, точнее, существует неубывающая ограниченная выпуклая вверх функция $\omega(s)$, $s \in [0,\infty)$, такая, что $\omega(s) \to 0$ при $s \to 0$, и

$$\operatorname*{ess\,sup}_{z\in Q_1^+} |a(z,\eta) - a(z,\zeta)| \le \omega(|\eta-\zeta|^2) \quad \forall \eta,\ \zeta \in \mathbb{R}^N.$$

(H3) При $r \ge 0$ определена ограниченная функция

$$q_a(r) = \sup_{\rho\le r,\,\eta\in\mathbb{R}^N}\ \sup_{z^0\in Q_1^+} \ \fint\limits_{\Lambda_\rho(t^0)} \Bigg(\ \fint\limits_{\Omega_\rho(x^0)} |a(x,t,\eta) - a_{\rho,x^0}(t,\eta)|^2\, dx \Bigg) dt,$$

где

$$a_{\rho,x^0}(t,\eta) = \fint\limits_{\Omega_\rho(x^0)} a(x,t,\eta)\, dx, \quad q_a(r) \to 0, \quad r \to 0.$$

(H4) При всех $\tau \le n-1$ функции $C^\tau(z,\eta)$ удовлетворяют условию Каратеодори на множестве $Q_1^+ \times \mathbb{R}^N$, дифференцируемы по x и η, и существует постоянная $\mu_1 > 0$ такая, что при почти всех $z \in Q_1^+$ и любых $\eta \in \mathbb{R}^N$

$$|C^\tau(z,\eta)| + |\nabla_x C^\tau(z,\eta)| \le \mu_1\,(|\eta|+1), \quad |M^\tau(z,\eta)| \le \mu_1,$$

где матрицы $M^\tau = \{M^\tau_{kl}\}$, $M^\tau_{kl} = (C^\tau_k)_{\eta^l}$, $k,l \le N$.

(H5) Мы предполагаем симметричность матриц M^τ для всех $\tau \le n-1$:

$$M^\tau_{ms}(z,\eta) = M^\tau_{sm}(z,\eta), \quad 1 \le s,m \le N, \quad \eta \in \mathbb{R}^N, \quad \text{п. в.} \quad z \in Q_1^+. \tag{3}$$

(H6) Для функции $\omega(s)$, определенной в условии (H2), справедлива также оценка

$$\operatorname*{ess\,sup}_{Q_1^+} |M^\tau(z,\eta) - M^\tau(z,\zeta)| \le \omega(|\eta-\zeta|^2) \quad \forall \eta,\zeta \in \mathbb{R}^N, \quad \forall \tau \le n-1.$$

(H7) Существуют такие ограниченные функции $q_\tau(r)$, что

$$q_\tau(r) = \sup_{\rho \le r,\, \eta \in \mathbb{R}^N} \sup_{z^0 \in Q_1^+} \fint_{\Lambda_\rho(t^0)} \left(\fint_{\Omega_\rho(x^0)} |M^\tau(x,t,\eta) - M^\tau_{\rho,x^0}(t,\eta)|^2\, dx \right) dt,$$

где

$$M^\tau_{\rho,x^0}(t,\eta) = \fint_{\Omega_\rho(x^0)} M^\tau(x,t,\eta)\, dx, \quad q_\tau(r) \to 0, \quad r \to 0.$$

(H8) Функции $g \in L^{2,n-2+2\alpha}(Q_1^+;\delta)$, $\psi \in L^{2,n-1+2\alpha}(\Gamma_1;\delta)$, где $\alpha \in (0,1)$.

Замечание 2.1. Условие (3) будет выполняться, если, например, для гладких скалярных функций $f^\tau(z,v)$ определить

$$C^\tau_k = (f^\tau)_{v^k}; \quad (C^\tau_k)_{x_j} = (f^\tau)_{v^k\, x_j}; \quad M^\tau_{mk} = (f^\tau)_{v^m v^k}.$$

Обобщенное решение u задачи (1) из пространства $\widehat{V}(Q_1^+) := L^2(\Lambda_1; W_2^1(B_1^+))$ можно определить следующим образом:

$$\int_{Q_1^+} [-u \cdot \phi_t + a(z,u)\nabla u \cdot \nabla \phi]\, dz = J(u,\phi) + \int_{Q_1^+} g \cdot \phi\, dz + \int_{\Gamma_1} \psi \cdot \phi\, d\Gamma,$$
$$\forall \phi \in W_2^1(Q_1^+), \quad \phi\big|_{\partial Q_1^+ \setminus \Gamma_1} = 0, \tag{4}$$

где

$$J(u,\phi) = \int_{\Gamma_1} C^\tau(z', u(z')) \cdot \phi_{x_\tau}(z')\, d\Gamma.$$

Далее мы сведем интеграл $J(u,\phi)$ к объемному. Если, например, предположить, что функции $C^\tau(z,u(z))$, $\tau \le n-1$, определены и непрерывно дифференцируемы по всем аргументам на множестве $\overline{Q_1^+} \times \mathbb{R}^N$, то

$$J(z,u) = \int_{Q_1^+} ([C^\tau]_{x_\tau} \cdot \phi_{x_n} - [C^\tau]_{x_n} \cdot \phi_{x_\tau})\, dz,$$

где $[C^\tau]_{x_j} = C^\tau_{x_j} + C^\tau_{u^m} u^m_{x_j}$ — полная производная функций C^τ по переменным x_j, $j \le n$.

Введем далее обозначения

$$p^\tau = -(C^\tau)_{x_n}, \quad p^n = (C^\tau)_{x_\tau}, \quad M^\tau = \{M^\tau_{km}\}, \quad M^\tau_{km} = (C^\tau_k)_{u^m}, \quad k,m \le N, \tag{5}$$

тогда интеграл $J(u, \phi)$ можно представить в форме

$$J(u, \phi) = \int\limits_{Q_1^+} [p \cdot \nabla \phi + M^\tau (u_{x_\tau} \cdot \phi_{x_n} - u_{x_n} \cdot \phi_{x_\tau})] \, dz. \qquad (6)$$

Определение 2.1. Функция $u \in \widehat{V}(Q_1^+) := L^2(\Lambda_1; W_2^1(B_1^+))$ называется обобщенным решением задачи (1), если она удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_{Q_1^+} [-u \cdot \phi_t + a(z, u) \nabla u \cdot \nabla \phi] \, dz = \int\limits_{Q_1^+} [p \cdot \nabla \phi + M^\tau (u_{x_\tau} \cdot \phi_{x_n} - u_{x_n} \cdot \phi_{x_\tau})] \, dz +$$

$$+ \int\limits_{Q_1^+} g \cdot \phi \, dz + \int\limits_{\Gamma_1} \psi \cdot \phi \, d\Gamma, \quad \forall \phi \in W_2^1(Q_1^+), \quad \phi\big|_{\partial Q_1^+ \setminus \Gamma_1} = 0, \quad (7)$$

где вектор-функция p определена равенством (5).

В работе мы будем изучать свойства обобщенного решения, удовлетворяющего тождеству (7). Условия на функции C^τ представлены в условиях (H4)–(H7).

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия (H1)–(H8), $u \in \widehat{V}(Q_1^+)$ — обобщенное решение задачи (1), т. е. u удовлетворяет тождеству (7). Существуют такие числа θ_0, q_0, $r_0 \in (0,1)$, что если*

$$q_*(r_0) := \sup\{q_a, \, q_\tau\} \le q_0, \qquad (8)$$

и в точке $z^0 \in Q_1^+ \cup \Gamma_1$

$$\frac{1}{R^n} \int_{Q'_R(z^0)} (|\nabla u|^2 + |u|^2) \, dz < \theta_0 \qquad (9)$$

для некоторого $R \le r_0$, тогда $u \in C^\alpha(\overline{Q'_{sR}(z^0)}; \delta)$, $\nabla u \in L^{2, n+2\alpha}(Q'_{sR}(z^0); \delta)$ при $\alpha \in (0,1)$ из условия (H8) и некотором $s \in (0,1)$, и верна следующая оценка:

$$\|u\|_{C^\alpha(\overline{Q'_{sR}(z^0)}; \, \delta)} + \|\nabla u\|_{L^{2,n+2\alpha}(Q'_{sR}(z^0); \, \delta)} \le$$

$$\le c_1 \, \|u\|_{\widehat{V}(Q_1^+)} + c_2 (\|g\|_{L^{2,n-2+2\alpha}(Q_1^+; \, \delta)} + \|\psi\|_{L^{2,n-1+2\alpha}(\Gamma_1; \, \delta)}). \quad (10)$$

Постоянные c_1 и c_2 зависят от ν, μ, μ_1, α, n, N и функций $q_*(r)$ и $\omega(s)$. Кроме того, c_1 зависит от s и R^{-1}.

Для линейной задачи мы получаем следующий результат.

Теорема 2.2. *Пусть для матрицы $a = a(z)$ и функций $C^\tau(z, u) = M^\tau(z) \, u(z)$ выполнены условия (H1), (H3), (H4), (H5), (H7), и функции g, ψ удовлетворяют условию (H8) с каким-либо $\alpha \in (0,1)$. Пусть функция $u \in \widehat{V}(Q_1^+)$ — обобщенное решение линейной задачи (1). Тогда $u(z)$ непрерывна по Гельдеру с показателем α на множестве $\overline{Q_s^+}$ при любом фиксированном $s < 1$, и справедлива оценка*

$$\|u\|_{C^\alpha(\overline{Q_s^+}; \, \delta)} + \|\nabla u\|_{L^{2,n+2\alpha}(Q_s; \, \delta)} \le$$

$$\le c\{\|u\|_{\widehat{V}(Q_1^+)} + \|g\|_{L^{2,n-2+2\alpha}(Q_1^+; \delta)} + \|\psi\|_{L^{2,n-1+2\alpha}(\Gamma_1; \, \delta)}\}. \quad (11)$$

Постоянная c в оценке (11) зависит от данных задачи и от $(1-s)^{-1}$.

3. Вспомогательные предложения. Пусть для матрицы $a(z)$ и функций $C^\tau(z,v)=M^\tau(z)\,v$, $1\le\tau\le n-1$, выполнены условия (H1) и (H4), матрица M^τ удовлетворяет условию симметрии (H5), и функции $f\in L^2(Q_1^+)$, $\psi\in L^2(\Gamma_1)$.

Пусть далее $v=(v^1,\dots,v^N)$ — решение параболической *линейной* системы (1) в Q_1^+ при заданной косой производной на Γ_1:

$$\begin{gathered}
v_t(z)-\operatorname{div}(a(z)\nabla v(z))=f(z),\quad z\in Q_1^+; \\
\left.\frac{\partial v(z')}{\partial\mathbf{n}_a}+\frac{d\,(M^\tau(z')v(z'))}{d\,x_\tau}\right|_{z'\in\Gamma_1}=\psi(z').
\end{gathered}\tag{12}$$

Замечание 3.1. При сделанных выше предположениях относительно данных задачи любое решение задачи (12) из пространства $\widehat{V}(Q_1^+)$ является функцией класса $V_2(Q_1^+)$. Более того, можно показать, что эти обобщенные решения имеют половинную производную по времени (см., например, [21, гл. 3, § 4]).

Лемма 3.1. *Для обобщенного решения $v\in\widehat{V}(Q_1^+)$ задачи (12) справедливы неравенство Качопполи*

$$\begin{gathered}
\int\limits_{Q_r'(z^0)}|\nabla v|^2\,dz\le \\
\le\frac{c_1}{r^2}\int\limits_{Q_{2r}'(z^0)}|v-v_{2r,z^0}|^2\,dz+c_1\int\limits_{Q_{2r}'(z^0)}|v|^2\,dz+c\,r^2\int\limits_{Q_{2r}'(z^0)}|f|^2\,dz+c\,r\int\limits_{\Gamma_{2r}(z^0)}|\psi|^2\,d\Gamma
\end{gathered}\tag{13}$$

и неравенство Пуанкаре

$$\int\limits_{Q_r'(z^0)}|v-v_{r,z^0}|^2\,dz\le c_2r^2\int\limits_{Q_r'(z^0)}(|\nabla v|^2+|v|^2)\,dz+c\,r^4\int\limits_{Q_r'(z^0)}|f|^2\,dz+c\,r^3\int\limits_{\Gamma_r(z^0)}|\psi|^2\,d\Gamma,\tag{14}$$

где $z^0\in Q_1^+\cup\Gamma_1$, и $Q_{2r}(z^0)\cap(\partial Q_1^+\setminus\Gamma_1)=\emptyset$. Постоянные c, c_1, c_2 в неравенствах (13) и (14) зависят от ν, μ, n, N, а c_1 и c_2 зависят также от параметра μ_1 из условия (H4).

Доказательство. Если учесть симметричность матриц M^τ, то оценка (13) выводится из тождества (7) точно так же, как это сделано при выводе неравенства Качопполи в лемме 3.1 работы [1], где $C^\tau=0$.

Для вывода неравенства Пуанкаре мы воспользуемся идеей, изложенной в монографии [8, гл. 4, раздел 2], где неравенство Пуанкаре выводится сначала для гладких решений параболических уравнений, а затем проводится аппроксимация. Здесь мы приведем рассуждение, позволяющее получить неравенство сразу для обобщенных решений v задачи (12) класса $\widehat{V}(Q_1^+)$.

Зафиксируем точку $z^0\in Q_1^+$ и $r>0$ такие, что $\overline{Q_r'(z^0)}\subset Q_1^+\cup\Gamma_1$. Пусть $\xi\in C_0^1(\overline{B_r(x^0)})$, $0\le\xi\le1$, $|\nabla\xi|\le\frac{c}{r}$, и $m_r:=\int_{\Omega_r(x^0)}\xi(x)\,dx\ge\kappa_n\,r^n$ с некоторым $\kappa_n>0$.

Определим весовые средние

$$\widetilde{v}_{r,x^0}(t)=m_r^{-1}\int_{\Omega_r(x^0)}v(x,t)\xi(x)\,dx,\quad t\in\Lambda_r(t^0),\qquad \widetilde{v}_{r,z^0}=\fint\limits_{\Lambda_r(t^0)}\widetilde{v}_{r,x^0}(t)\,dt.$$

Для почти всех $t \in \Lambda_r(t^0)$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{\Omega_r(x^0)} |v(x,t) - \widetilde{v}_{r,x^0}(t)|^2\, dx \le c(n) \int\limits_{\Omega_r(x^0)} |v(x,t) - v_{r,x^0}(t)|^2\, dx. \tag{15}$$

Правую часть соотношения (15) оценим по неравенству Пуанкаре и полученное неравенство проинтегрируем по интервалу $\Lambda_r(t^0)$:

$$\int\limits_{Q'_r(z^0)} |v(z) - \widetilde{v}_{r,x^0}(t)|^2\, dz \le c_1(n) r^2 \int\limits_{Q'_r(z^0)} |\nabla\, v|^2\, dz. \tag{16}$$

Теперь с помощью оценки (16) получаем, что

$$\int\limits_{Q'_r(z^0)} |v(z) - \widetilde{v}_{r,z^0}|^2\, dz \le\ 2 \int\limits_{Q'_r(z^0)} |v(z) - \widetilde{v}_{r,x^0}(t)|^2\, dz + 2|\Omega_r| \int\limits_{\Lambda_r(t^0)} |\widetilde{v}_{r,z^0} - \widetilde{v}_{r,x^0}(t)|^2\, dt \le$$

$$\le c_1(n) r^2 \int\limits_{Q'_r(z^0)} |\nabla\, v(z)|^2\, dz + 2|\Omega_r| \int\limits_{\Lambda_r(t^0)} P_r^2(t)\, dt, \tag{17}$$

где

$$P_r^2(t) = |\widetilde{v}_{r,z^0} - \widetilde{v}_{r,x^0}(t)|^2 = \left| \ \fint\limits_{\Lambda_r(t^0)} [\widetilde{v}_{r,x^0}(\tau) - \widetilde{v}_{r,x^0}(t)]\, d\tau \right|^2.$$

Чтобы оценить выражение $P_r^2(t)$, обратимся к тождеству, которому удовлетворяет обобщенное решение задачи (12):

$$\int\limits_{Q'_r(z^0)} \{-v \cdot \phi_t + a\, \nabla\, v \cdot \nabla\, \phi + M^\tau [v_{x_n} \cdot \phi_{x_\tau} - v_{x_\tau} \cdot \phi_{x_n}]\}\, dz +$$

$$+ \int\limits_{Q'_r(z^0)} (M^\tau_{x_n}\, v \cdot \phi_{x_\tau} - M^\tau_{x_\tau}\, v \cdot \phi_{x_n})\, dz = \int\limits_{Q'_r(z^0)} f \cdot \phi\, dz + \int\limits_{\Gamma_r(z^0)} \psi \cdot \phi\, d\Gamma. \tag{18}$$

Для произвольно фиксированных $s, l \in \Lambda_r(t^0)$, $s < l$, и параметра $\varepsilon << 1$ такого, что $(s-\varepsilon, l+\varepsilon) \subset \Lambda_r(t^0)$, определим кусочно-линейную непрерывную функцию $\chi_\varepsilon(t)$: $\chi_\varepsilon(t) = 0$ при $t \in \Lambda_r(t^0) \setminus (s-\varepsilon, l+\varepsilon)$, $\chi_\varepsilon(t) = 1$ на интервале (s, l). Очевидно, что $\chi'_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}$ при $t \in (s-\varepsilon,\, s)$ и $\chi'_\varepsilon(t) = -\frac{1}{\varepsilon}$ при $t \in (l,\, l+\varepsilon)$. Из тождества (18) с функцией $\phi(z) = \xi(x)\, \chi_\varepsilon(t)$ получаем равенство

$$-\fint\limits_{s-\varepsilon}^{s} \int\limits_{\Omega_r(x^0)} v(x,t)\, \xi(x)\, dx\, dt + \fint\limits_{l}^{l+\varepsilon} \int\limits_{\Omega_r(x^0)} v(x,t)\, \xi(x)\, dx\, dt + \int\limits_{s-\varepsilon}^{l+\varepsilon} \int\limits_{\Omega_r(x^0)} a\, \nabla\, v\, \nabla \xi\, \chi_\varepsilon\, dx\, dt +$$

$$+ \int\limits_{s-\varepsilon}^{l+\varepsilon} \int\limits_{\Omega_r(x^0)} M^\tau\, [v_{x_n} \xi_{x_\tau} - v_{x_\tau} \xi_{x_n}] \chi_\varepsilon\, dx\, dt + \int\limits_{s-\varepsilon}^{l+\varepsilon} \int\limits_{\Omega_r(x^0)} (M^\tau_{x_n} v\, \xi_{x_\tau} - M^\tau_{x_\tau} v\, \xi_{x_n}) \chi_\varepsilon\, dz =$$

$$= \int\limits_{s-\varepsilon}^{l+\varepsilon} \int\limits_{\Omega_r(x^0)} f\, \xi\, \chi_\varepsilon\, dz + \int\limits_{s-\varepsilon}^{l+\varepsilon} \int\limits_{\gamma_r(x^0)} \psi\, \xi \chi_\varepsilon\, d\gamma\, dt.$$

Переходя к пределу по $\varepsilon \to 0$ в последнем равенстве, получаем, что

$$\int\limits_{\Omega_r(x^0)} [v(x,l)-v(x,s)]\,\xi(x)\,dx = \int\limits_s^l \int\limits_{\Omega_r(x^0)} f\,\xi\,dx\,dt + \int\limits_s^l \int\limits_{\gamma_r(x^0)} \psi\,\xi\,d\gamma\,dt-$$

$$-\int\limits_s^l \int\limits_{\Omega_r(x^0)} \{a\nabla v\,\nabla\xi + (M^\tau_{x_n} v\,\xi_{x_\tau} - M^\tau_{x_\tau} v\,\xi_{x_n}) + M^\tau[v_{x_n}\xi_{x_\tau} - v_{x_\tau}\xi_{x_n}]\}\,dx\,dt\,. \quad (19)$$

Оценивая правую часть равенства (19), выводим оценку

$$J_r(l,s) := \left| \int\limits_{\Omega_r(x^0)} [v(x,l)-v(x,s)]\xi(x)\,dx \right|^2 \le$$

$$\le c(\,r^{n-2}\|\nabla v\|^2_{2,Q'_r(z^0)} + r^{n-2}\|v\|^2_{2,Q'_r(z^0)} + r^n\,\|f\|^2_{2,Q'_r(z^0)} + r^{n-1}\,\|\psi\|^2_{2,\Gamma_r(z^0)})\,|l-s|$$

$\forall l,s \in \Lambda_r(t^0)$. Из полученного неравенства следует, что функция $\widetilde{v}_{r,x^0}(t)$ определена при всех $t \in \Lambda_r(t^0)$ и непрерывна на этом интервале, причем

$$J_r(l,s) = |m_r|^2\,|\widetilde{v}_{r,x^0}(l) - \widetilde{v}_{r,x^0}(s)|^2.$$

Теперь выражение $P^2_r(t)$ можно оценить следующим образом:

$$P^2_r(t) \le c(r^{-n}\|\nabla v\|^2_{2,Q'_r(z^0)} + r^{-n}\|v\|^2_{2,Q'_r(z^0)} + r^{-n+2}\|f\|^2_{2,Q'_r(z^0)} + r^{-n+1}\|\psi\|^2_{2,\Gamma_r(z^0)}). \quad (20)$$

Возвращаясь теперь к неравенству (17), с помощью оценки (20) получаем (14). □

Замечание 3.2. Так как при доказательстве леммы 3.1 использовались только условие эллиптичности и ограниченности матрицы a, а также условия (H4) и (H5) относительно функций C^τ, то полученные в лемме оценки (13) и (14) справедливы для обобщенных решений $u \in \widehat{V}(Q_1^+)$ задачи (1).

Нам потребуется результат о локальной гладкости обобщенного решения простейшей задачи с заданной косой производной в следующей постановке:

$$\begin{aligned} &h_t - A(t)\nabla^2 h = 0, \quad z \in Q_2^+; \\ &\frac{\partial\, h(z')}{\partial \mathbf{n}_A} + M^\tau(t)\,h_{x_\tau}(z') = 0, \quad z' \in \Gamma_2, \end{aligned} \quad (21)$$

где элементы матриц A, $M^\tau \in L^\infty(\Lambda_2)$ удовлетворяют условиям (H1) и (H5) соответственно.

Отметим, что вопросы разрешимости и возможной гладкости решения задачи Неймана в шкале соболевских пространств при $p > 1$ для *линейных* параболических систем второго и высокого порядков подробно изучались в работах [9, 10]. В частности, в лемме 4.2 работы [9] доказано утверждение приведенной выше леммы 3.2 при $M^\tau = 0$. Анализ всех этапов доказательства леммы 4.2 из [9] показал, что утверждение остается справедливым и при $M^\tau \ne 0$, если M^τ — симметричные матрицы.

Таким образом, справедлив следующий результат.

Лемма 3.2. *Обобщенное решение $h \in \widehat{V}(Q_2^+)$ задачи (21) является непрерывной по Гельдеру функцией в $\overline{Q_1^+}$ (в параболической метрике) при любом показателе $\gamma \in (0,1)$, и справедлива оценка*

$$\|h\|_{C^{\gamma}(\overline{Q_1^+};\,\delta)} \le c\,\|h\|_{2,Q_2^+}, \tag{22}$$

где постоянная c зависит только от ν, μ, μ_1, n, N, γ.

4. $(A(t),\, M^{\tau}(t))$**-калорические функции.** В этом параграфе мы рассматриваем матрицы A, $M^{\tau} \in L^{\infty}(\Lambda_R(t^0))$, $\Lambda_R(t^0) \subset (-1,0)$. Для матрицы A выполнено условие эллиптичности (2), а для матриц M^{τ}, $\tau \le n-1$, — условие симметричности (3). Будем также считать, что $Q_R(z^0) \cap \Gamma_1 \ne \emptyset$.

Определение 4.1. Функция $h \in \widehat{V}(Q'_R(z^0))$ называется $(A(t),\, M^{\tau}(t))$-калорической в $Q'_R(z^0)$, если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q'_R(z^0)} \{-h\cdot\phi_t + A(t)\nabla h\cdot\nabla\phi + M^{\tau}(t)[h_{x_n}\cdot\phi_{x_{\tau}} - h_{x_{\tau}}\cdot\phi_{x_n}]\}\,dz = 0 \tag{23}$$

$\forall \phi \in W_2^1(Q'_R(z^0))$, $\phi\big|_{\partial Q'_R(z^0)\setminus\Gamma_R(z^0)} = 0$.

Из тождества (7) следует, что h — обобщенное решение в $Q'_R(z^0)$ задачи с косой производной (21). Согласно замечанию 3.1 имеем $h \in V_2(Q'_R(z^0))$.

Замечание 4.1. Так как матрицы M^{τ} в (23) не зависят от x и функции f и ψ равны нулю, то для $(A(t),\, M^{\tau}(t))$-калорических функций $h \in \widehat{V}(Q'_{2R}(z^0))$ из леммы 3.1 следуют оценки

$$\int\limits_{Q'_R(z^0)} |\nabla h|^2\,dz \le \frac{c}{R^2}\int_{Q'_{2R}(z^0)} |h - h_{R,z^0}|^2\,dz, \tag{24}$$

$$\int\limits_{Q'_R(z^0)} |h - h_{R,z^0}|^2\,dz \le R^2 \int\limits_{Q'_R(z^0)} |\nabla h|^2\,dz. \tag{25}$$

Лемма 3.2 гарантирует, что функции h из $\widehat{V}(Q'_R(z^0))$ обладают дополнительной гладкостью и для них справедливы интегральные оценки Кампанато, две из которых приведены далее. Они будут использоваться при доказательстве теорем 2.1 и 2.2.

Лемма 4.1. *Пусть $h \in \widehat{V}(Q_1^+)$ — $(A(t),\, M^{\tau}(t))$-калорическая функция. Тогда при любом $\beta \in (0,1)$ справедлива оценка*

$$\int\limits_{Q'_{\rho}(z^0)} |h - h_{\rho,z^0}|^2\,dz \le c_1\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2+2\beta} \int\limits_{Q'_r(z^0)} |h - h_{r,z^0}|^2\,dz, \quad \rho \le r, \tag{26}$$

кроме того,

$$\int\limits_{Q'_{\rho}(z^0)} |h|^2\,dz \le c_2\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \int\limits_{Q'_r(z^0)} |h|^2\,dz, \quad \rho \le r, \tag{27}$$

в цилиндрах $Q'_r(z^0) \subset Q_1^+$, $z^0 \in \overline{Q_{1-s}^+}$, при $r \le s$, где число $s \in (0,1)$ фиксировано произвольно. Постоянные c_1, c_2 зависят от ν, μ, μ_1, n, N и не зависят от z^0, c_1 зависит также от β.

Мы не приводим доказательство этой леммы, так как она доказывается точно так же, как лемма 4.1 в работе [1]. Следует только воспользоваться оценками (24), (25) и (22).

Замечание 4.2. Далее мы обозначаем как $C_*^\infty(Q_R^+(z^0))$, $z^0 \in \Gamma_1$, сужение множества $C_0^\infty(Q_R(z^0))$ на $Q_R^+(z^0)$. Заметим, что замыкание этого множества в норме $W_2^1(Q_R^+(z^0))$ определяет совокупность функций этого пространства, обращающихся в ноль на множестве $\partial Q_R^+(z^0) \setminus \Gamma_R(z^0)$. Таким образом, в определениях (7) и (23) достаточно предполагать, что пробные функции $\phi \in C_*^\infty(Q_R^+(z^0))$.

Лемма 4.2. *Пусть $z^0 \in \Gamma_1$, и матрицы A, $M^\tau \in L^\infty(\Lambda_r(t^0))$, $\tau \le n-1$, удовлетворяют условиям (H1), (H4) и (H5) с фиксированными параметрами ν, μ, μ_1. Для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon, \nu, \mu, \mu_1, n, N) > 0$, что если функция $u \in \widehat{V}(Q_r^+(z^0))$ удовлетворяет условиям*

$$\fint\limits_{Q_r^+(z^0)} (r^{-2}|u|^2 + |\nabla u|^2)\, dz \le 1, \tag{28}$$

$$\Bigg| \fint\limits_{Q_r^+(z^0)} \{-u \cdot \phi_t + A(t)\nabla u \cdot \nabla \phi + M^\tau(t)[u_{x_n} \cdot \phi_{x_\tau} - u_{x_\tau} \cdot \phi_{x_n}]\}\, dz \Bigg| \le \delta \sup_{Q_r^+(z^0)} |\nabla \phi| \tag{29}$$

для всех $\phi \in C_*^\infty(\overline{Q_r^+(z^0)})$, тогда существует такая $(A(t), M^\tau(t))$-калорическая функция $h \in \widehat{V}(Q_{r/2}^+(z^0))$, что имеют место неравенства

$$\fint\limits_{Q_{r/2}^+(z^0)} (r^{-2}|h|^2 + |\nabla h|^2)\, dz \le 2^{n+5},$$

$$\fint\limits_{Q_{r/2}^+(z^0)} |h - u|^2\, dz \le \varepsilon r^2.$$

Доказательство. Доказательство этой леммы похоже на доказательство леммы 4.2 работы авторов [1]. Поэтому мы отметим только основные новые его этапы. Достаточно доказать лемму для $r = 1, z^0 = 0$, так как общий случай нетрудно получить, применяя преобразование подобия.

Итак, пусть условия (28), (29) выполнены в Q_1^+. Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда существуют такое $\varepsilon > 0$, последовательности матриц $A_k(t)$, $M_k^\tau(t)$, удовлетворяющих условиям леммы, и последовательность функций $u_k \in \widehat{V}(Q_1^+)$, для которых

$$\fint\limits_{Q_1^+} (|u_k|^2 + |\nabla u_k|^2)\, dz \le 1, \tag{30}$$

$$\Bigg| \fint\limits_{Q_1^+} \{-u_k \cdot \phi_t + A_k(t)\nabla u_k \cdot \nabla \phi + M_k^\tau(t)[(u_k)_{x_n} \cdot \phi_{x_\tau} - (u_k)_{x_\tau} \cdot \phi_{x_n}]\}\, dz \Bigg| \le$$
$$\le \frac{1}{k} \sup_{Q_1^+} |\nabla \phi| \qquad \forall \phi \in C_*^\infty(\overline{Q_1^+}), \tag{31}$$

но в то же время

$$\fint_{Q_{1/2}^+} |u_k - h|^2 \, dz > \varepsilon$$

для всех $(A(t),\ M^\tau(t))$-калорических функций $h \in \widehat{V}(Q_{1/2}^+)$, принадлежащих классу

$$\mathcal{H}^+ = \Big\{ v \in \widehat{V}(Q_{1/2}^+) : \ \fint_{Q_{1/2}^+} (|v|^2 + |\nabla v|^2) \, dz \le 2^{n+5} \Big\}. \tag{32}$$

Из условия (30) следует, что существует такая подпоследовательность последовательности u_k (здесь и далее при выборе подпоследовательностей мы будем сохранять обозначения исходных последовательностей), что $u_k \rightharpoonup u$, $\nabla u_k \rightharpoonup \nabla u$, $k \to \infty$, в пространстве $L^2(Q_1^+)$, и

$$\fint_{Q_1^+} (|u|^2 + |\nabla u|^2) \, dz \le 1. \tag{33}$$

Из условий $\|A_k\|_{L^\infty(Q_1^+)} \le \mu$, $\|M_k^\tau\|_{L^\infty(Q_1^+)} \le \mu_1$ следует, что существуют такие подпоследовательности, что $A_k \overset{*}{\rightharpoonup} A$, $M_k^\tau \overset{*}{\rightharpoonup} M^\tau$ в пространстве $L^\infty(Q_1^+)$. Отметим, что условие эллиптичности предельной матрицы A с постоянными ν, μ и условие симметричности матриц M^τ сохраняются.

Следующий шаг — показать, что для некоторой последовательности значений k

$$\|u_k - u\|_{L^2(Q_1^+)} \to 0, \qquad \|u_k - u\|_{L^2(\Gamma_1)} \to 0, \quad k \to \infty. \tag{34}$$

Мы опускаем обоснование этих предельных переходов, так как они фактически совпадают с тем, как это сделано в [1] при рассмотрении задачи Неймана.

Наличие соотношений (34) позволяет сделать предельный переход в неравенстве (31) по $k \to \infty$.

Покажем, например, что при $\phi \in C_*^\infty(\overline{Q_1^+})$

$$\int_{Q_1^+} M_k^\tau(t) \, (u_k)_{x_n} \cdot \phi_{x_\tau} \, dz \to \int_{Q_1^+} M^\tau(t) \, u_{x_n} \cdot \phi_{x_\tau} \, dz, \quad k \to \infty. \tag{35}$$

Действительно,

$$\int_{Q_1^+} M_k^\tau(t) \, (u_k)_{x_n} \cdot \phi_{x_\tau} \, dz =$$

$$= - \int_{Q_1^+} M_k^\tau(t) \, u_k \cdot \phi_{x_\tau \, x_n} \, dz + \int_{\Gamma_1} M_k^\tau(t) u_k \cdot (-1) \phi_{x_\tau} \, d\Gamma =: J_k + S_k.$$

Рассмотрим отдельно предельный переход для J_k и S_k. Имеем

$$J_k \to - \int_{Q_1^+} M^\tau(t) u \cdot \phi_{x_\tau \, x_n} \, dz = \int_{Q_1^+} M^\tau(t) u_{x_n} \cdot \phi_{x_\tau} \, dz - \int_{\Gamma_1} M^\tau(t) u \cdot (-1) \phi_{x_\tau} \, d\Gamma,$$

так как из сходимости последовательности u_k в $L^2(Q_1^+)$ и $*$-слабой сходимости в $L^\infty(Q_1^+)$ последовательности матриц M_k^τ следует, что

$$J_k + \int\limits_{Q_1^+} M^\tau(t) u \cdot \phi_{x_\tau\, x_n}\, dz =$$
$$= - \int\limits_{Q_1^+} M_k^\tau(t)(u_k - u) \cdot \phi_{x_\tau\, x_n}\, dz - \int\limits_{Q_1^+} \left(M_k^\tau(t) - M^\tau(t)\right) u \cdot \phi_{x_\tau\, x_n}\, dz \to 0, \quad k \to \infty.$$

Если принять во внимание сходимость последовательности u_k в $L^2(\Gamma_1)$, то аналогично доказывается, что

$$S_k \to - \int\limits_{\Gamma_1} M^\tau(t) u \cdot \phi_{x_\tau}\, d\Gamma, \quad k \to \infty.$$

Из сказанного следует справедливость предельного перехода (35). Слабой сходимости последовательности u_k в $L^2(Q_1^+)$ достаточно, чтобы обосновать предельный переход

$$\int\limits_{Q_1^+} u_k \cdot \phi_t\, dz \to \int\limits_{Q_1^+} u \cdot \phi_t\, dz, \quad k \to \infty.$$

Таким образом, в результате предельного перехода в (31), получаем интегральное тождество (23), т. е. u является $(A(t), M^\tau(t))$-калорической функцией в Q_1^+.

Далее мы рассмотрим следующие вспомогательные задачи при каждом k из выбранной последовательности:

$$\begin{aligned}
&(v_k)_t - A_k(t)\nabla^2 v_k = (A(t) - A_k(t))\nabla^2 u, \quad z \in Q_{1/2}^+,\\
&\frac{\partial v_k}{\partial \mathbf{n}_{A_k}} + M_k^\tau(t)(v_k)_{x_\tau} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_{A_k}} + M_k^\tau(t) u_{x_\tau}, \quad z' \in \Gamma_{1/2};\\
&v_k = 0, \quad z' \in \partial Q_{1/2}^+ \setminus \Gamma_{1/2}.
\end{aligned} \tag{36}$$

При каждом k существует единственное обобщенное решение $v_k \in V_2(Q_{1/2}^+)$ задачи (36) (см. замечание 3.1), функции v_k удовлетворяют тождеству

$$\int\limits_{Q_{1/2}^+} \left[-v_k \cdot \phi_t + A_k(t)\nabla v_k \cdot \nabla \phi\right] dz - \int\limits_{\Gamma_{1/2}} M_k^\tau(t) v_k \cdot \phi_{x_\tau}\, d\Gamma =$$
$$= \int\limits_{Q_{1/2}^+} (A_k(t) - A(t))\nabla u \cdot \nabla \phi\, dz - \int\limits_{\Gamma_{1/2}} (M_k^\tau(t) - M^\tau(t)) u \cdot \phi_{x_\tau}\, d\Gamma \tag{37}$$

при всех $\phi \in C_*^\infty(\overline{Q_{1/2}^+})$.

Представляя поверхностные интегралы в (37) как объемные, получаем тождество

$$\int\limits_{Q^+_{1/2}} \{-v_k \cdot \phi_t + A_k(t)\nabla v_k \cdot \nabla \phi + M^\tau_k(t)[(v_k)_{x_n} \cdot \phi_{x_\tau} - (v_k)_{x_\tau} \cdot \phi_{x_n}]\}\, dz =$$

$$= \int\limits_{Q^+_{1/2}} (A_k(t) - A(t))\nabla u \cdot \nabla \phi\, dz + \int\limits_{Q^+_{1/2}} (M^\tau_k(t) - M^\tau(t))[u_{x_n}\phi_{x_\tau} - u_{x_\tau} \cdot \phi_{x_n}]\, dz. \quad (38)$$

Учитывая симметричность матриц M^τ, из тождества (38) нетрудно вывести равенство

$$\frac{1}{2}\int\limits_{B^+_{1/2}} |v_k(x,s)|^2\, dx + \int\limits_{Q^s_{1/2}} A_k(t)\nabla v_k \cdot \nabla v_k\, dz = \int\limits_{Q^s_{1/2}} (A_k(t) - A(t))\nabla u \cdot \nabla v_k\, dz +$$

$$+ \int\limits_{Q^s_{1/2}} (M^\tau_k(t) - M^\tau(t))[u_{x_n} \cdot (v_k)_{x_\tau} - u_{x_\tau} \cdot (v_k)_{x_n}]\, dz, \quad (39)$$

где $s \in \Lambda_{1/2}$, $Q^s_{1/2} = Q^+_{1/2} \cap \{t < s\}$. (Подробный вывод при $M^\tau = 0$ приведен в доказательстве леммы 4.2 из [1].)

Из тождества (39) следует оценка

$$\sup_{s\in\Lambda_{1/2}} \|v_k(\cdot,s)\|^2_{2,B^+_{1/2}} + \|\nabla v_k\|^2_{2,Q^+_{1/2}} \le c\,\|\nabla u\|^2_{2,Q^+_{1/2}} \underset{(33)}{\le} c(\nu,\mu,\mu_1). \quad (40)$$

Кроме того, из равенства (39) имеем

$$\|v_k(\cdot,s)\|^2_{2,B^+_{1/2}} \le c \int\limits_{Q^s_{1/2}} |\nabla u|^2\, dz \to 0, \quad s \to 0.$$

Таким образом, получаем, что предельная функция $v \in V_2(Q^+_{1/2})$, и $v = 0$ на множестве $\partial_p Q^+_{1/2} \setminus \Gamma_{1/2}$.

Из оценки (40) следует слабая сходимость некоторой подпоследовательности функций v_k в $L^2(Q^+_{1/2})$, но как и в случае с последовательностью u_k, можно показать, что

$$\|v_k - v\|_{2,Q^+_{1/2}} \to 0, \quad \|v_k - v\|_{2,\Gamma_{1/2}} \to o, \quad k \to \infty. \quad (41)$$

Соотношения (41) позволяют сделать предельный переход в тождестве (38):

$$\int\limits_{Q^+_{1/2}} [-v \cdot \phi_t + A(t)\nabla v \cdot \nabla \phi + M^\tau(t)\{v_{x_n} \cdot \phi_{x_\tau} - v_{x_\tau} \cdot \phi_{x_n}\}]\, dz = 0. \quad (42)$$

Формально подставляя v в тождество (42) (мы опускаем процедуру сглаживания функции v по переменной t), получаем, что $v = 0$ в $Q^+_{1/2}$, т. е.

$$\|v_k\|_{2,Q^+_{1/2}} \to 0, \quad k \to \infty. \quad (43)$$

Вычитая теперь из тождества (23), которому удовлетворяет функция u в $Q^+_{1/2}$, тождество (38), получаем, что $w_k = u - v_k$ удовлетворяет соотношению

$$\int\limits_{Q^+_{1/2}} [-w_k \cdot \phi_t\, dz + A_k(t)\nabla w_k \cdot \nabla \phi]\, dz + \int\limits_{Q^+_{1/2}} M^\tau_k(t)[(w_k)_{x_n} \cdot \phi_{x_\tau} - (w_k)_{x_\tau} \cdot \phi_{x_n}]\, dz = 0$$

при таких же функциях ϕ, что и в тождестве (37).

Таким образом, функция w_k является $(A_k(t),\, M^\tau_k(t))$-калорической функцией в $Q^+_{1/2}$,

$$\|w_k - u\|_{2,Q^+_{1/2}} = \|v_k\|_{2,Q^+_{1/2}} \to 0, \qquad k \to \infty.$$

Принимая во внимание оценку (33) для функции u и соотношение (43), заключаем, что при некотором $k_0 \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$\|w_k\|_{\widehat{V}(Q^+_{1/2})} \le \|u\|_{\widehat{V}(Q^+_{1/2})} + \|v_k\|_{\widehat{V}(Q^+_{1/2})} \le 2\,(\omega_n)^{1/2} \quad \forall k \ge k_0. \tag{44}$$

Из неравенства (44) следует оценка

$$\fint\limits_{Q^+_{1/2}} (|w_k|^2 + |\nabla w_k|^2)\, dz \le 2^{n+5},$$

и, кроме того,

$$\|w_k - u_k\|_{2,Q^+_{1/2}} \le \|w_k - u\|_{2,Q^+_{1/2}} + \|u - u_k\|_{2,Q^+_{1/2}} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Два последних соотношения означают, что существует $(A_k(t),\, M^\tau_k(t))$-калорическая функция w_k, аппроксимирующая функцию u_k, причем функция w_k принадлежит классу $\mathcal{H}^+$, определенному равенством (32). Таким образом, мы получили противоречие со сделанным предположением. Следовательно, верно утверждение леммы. □

В следующем параграфе нам потребуется следствие к лемме 4.2, которое мы сформулируем также в виде леммы.

Лемма 4.3. *Пусть выполнены предположения леммы 4.2. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая постоянная $C_\varepsilon = C(\varepsilon, \nu, \mu, \mu_1, n, N) > 0$, что верно следующее утверждение: для любой функции $u \in \widehat{V}(Q^+_r(z^0))$ существуют $(A(t),\, M^\tau(t))$-калорическая функция $h \in \widehat{V}(Q^+_{r/2}(z^0))$ и функция $\phi \in C^\infty_*(\overline{Q^+_r(z^0)})$, $\sup_{Q^+_r(z^0)} |\nabla \phi| \le 1$ такие, что*

$$\fint\limits_{Q^+_{r/2}(z^0)} (|h - h_{r/2,z^0}|^2 + r^2|\nabla h|^2)\, dz \le 2^{n+5} \fint\limits_{Q^+_r(z^0)} (|u - u_{r,z^0}|^2 + r^2|\nabla u|^2)\, dz,$$

$$\fint\limits_{Q^+_{r/2}(z^0)} |u - h|^2\, dz \le \varepsilon \fint\limits_{Q^+_r(z^0)} (|u - u_{r,z^0}|^2 + r^2|\nabla u|^2)\, dz +$$

$$+ C_\varepsilon r^2 \Big| \fint\limits_{Q^+_r(z^0)} \{-u \cdot \phi_t + A(t)\nabla u \cdot \nabla \phi + M^\tau(t)[u_{x_n} \cdot \phi_{x_\tau} - u_{x_\tau} \cdot \phi_{x_n}]\}dz \Big|^2.$$

Так как доказательство этого утверждения почти не отличается от доказательства леммы 4.3 из [20], мы его опускаем.

Замечание 4.3. Утверждения лемм 4.2 и 4.3 остаются справедливыми для любого цилиндра $Q'_r(z^0)$, $Q'_r(z^0)\cap(\partial Q_1^+\setminus\Gamma_1)=\emptyset$. Так как нас интересует поведение решения вблизи поверхности Γ_1, то можно рассматривать только цилиндры, для которых $\operatorname{dist}(x^0,\gamma_1)\le r/2$. В противном случае $Q_{r/2}(z^0)\cap\Gamma_1=\emptyset$, и все результаты этого параграфа справедливы в цилиндрах $Q_{r/2}(z^0)$ согласно утверждениям, доказанным в работе [15].

5. Доказательства теорем 2.1 и 2.2.

Доказательство теоремы 2.1. Зафиксируем точку $z^0\in\Gamma_1$ и $Q_{2R}^+(z^0)\subset Q_1^+$. Пусть $u\in\widehat{V}(Q_{2R}^+(z^0))$ — обобщенное решение задачи (1):

$$\int\limits_{Q_{2R}^+(z^0)}[-u\cdot\phi_t+a(z,u)\nabla u\cdot\nabla\phi+(C^\tau_{x_n}\cdot\phi_{x_\tau}-C^\tau_{x_\tau}\cdot\phi_{x_n})]\,dz+$$

$$+\int\limits_{Q_{2R}^+(z^0)}M^\tau(u_{x_n}\cdot\phi_{x_\tau}-u_{x_\tau}\cdot\phi_{x_n})\,dz=$$

$$=\int\limits_{Q_{2R}^+(z^0)}g\cdot\phi\,dz+\int\limits_{\Gamma_{2R}(z^0)}\psi\cdot\phi\,d\Gamma\quad\forall\phi\in C_*^\infty(Q_{2R}^+(z^0)).\qquad(45)$$

Покажем, что по данным задачи можно выбрать такие параметры θ_0, q_0, r_0, что при выполнении условий (8) и (9) справедливо неравенство

$$\Phi(\rho,z^0):=\fint\limits_{Q_\rho^+(z^0)}(|u-u_{\rho,z^0}|^2+\rho^{2\beta}|u|^2)\,dz\le c\left\{\left(\frac{\rho}{r}\right)^{2\alpha}\Phi(r,z^0)+M_0^2\rho^{2\alpha}\right\}\quad\forall\rho\le r,\qquad(46)$$

где показатель $\alpha\in(0,1)$ — из условия (H8), и число $\beta\in(\alpha,1)$ фиксировано произвольно,

$$M_0^2=\|g\|^2_{L^{2,n-2+2\alpha}(Q_1^+)}+\|\psi\|^2_{L^{2,n-1+2\alpha}(\Gamma_1^+)}.$$

Прежде всего отметим, что из неравенств Качопполи и Пуанкаре, после применения условия (H8), для функции u можно получить неравенства

$$R^{-n}\int\limits_{Q_R^+(z^0)}|\nabla u|^2\,dz\le c\fint\limits_{Q_{2R}^+(z^0)}(|u-u_{2R,z^0}|^2+R^2\,|u|^2)\,dz+c\,M_0^2R^{2\alpha},\qquad(47)$$

$$\fint\limits_{Q_R^+(z^0)}|u-u_{R,z^0}|^2\,dz\le c\,R^2\fint\limits_{Q_R^+(z^0)}(|\nabla u|^2+|u|^2)\,dz+M_0^2R^{2\alpha}.$$

Определим матрицы

$$A(t):=a_{R,x^0}(t,u_{R,z^0})=\fint\limits_{B_R^+(x^0)}a(x,t,u_{R,z^0})\,dx,$$

$$M^\tau(t) := M^\tau_{R,x^0}(t, u_{R,z^0}) = \fint_{B^+_R(x^0)} M^\tau(x,t,u_{R,z^0})\,dx, \quad \tau = 1,\dots,n-1.$$

Заметим, что A, $M^\tau \in L^\infty(\Lambda_R(t^0))$, причем $A(t)$ удовлетворяет условию эллиптичности с постоянными $\nu \le \mu$ из условия (H1), а $M^\tau(t)$ — симметричные матрицы.

Так как функция $u \in \widehat{V}(Q^+_R(z^0))$, то согласно лемме 4.3 существует такая $(A(t), M^\tau(t))$-калорическая функция $h \in \widehat{V}(Q^+_{R/2}(z^0))$, что

$$\fint_{Q^+_{R/2}(z^0)} (|h - h_{R/2,z^0}|^2 + R^2|\nabla h|^2)\,dz \le 2^{n+5} \fint_{Q^+_R(z^0)} (|u - u_{R,z^0}|^2 + R^2|\nabla u|^2)\,dz; \quad (48)$$

$$\fint_{Q^+_{R/2}(z^0)} |u - h|^2\,dz \le \varepsilon \fint_{Q^+_R(z^0)} (|u - u_{R,z^0}|^2 + R^2|\nabla u|^2)\,dz + C_\varepsilon R^2 \mathcal{L}^2_R(u,\phi), \quad (49)$$

где

$$\mathcal{L}_R(u,\phi) = \Big|\fint_{Q^+_R(z^0)} (-u\cdot\phi_t + A(t)\nabla u\cdot\nabla\phi + M^\tau(t)[u_{x_n}\cdot\phi_{x_\tau} - u_{x_\tau}\cdot\phi_{x_n}])\,dz\Big|$$

для некоторой $\phi \in C^\infty_*(\overline{Q^+_R(z^0)})$, $|\nabla\phi| \le 1$ в $Q^+_R(z^0)$. Для оценки выражения $\mathcal{L}_R(u,\phi)$ обратимся к интегральному тождеству (45) с функцией u и заметим, что $\sup_{Q^+_R(z^0)}|\phi(z)| \le c\,R$, так как $\phi = 0$ на множестве $\partial B^+_R(x^0)\setminus\gamma_R(x^0)$ при $t \in \Lambda_R(t^0)$. В результате получим

$$\mathcal{L}_R(u,\phi) \le$$
$$\le \fint_{Q^+_R(z^0)} (|\Delta A| + |\Delta M^\tau|)\,|\nabla u|\,dz + 2\mu_1 \fint_{Q^+_R(z^0)} |u|\,dz + c\,R \fint_{Q^+_R(z^0)} |g|\,dz + \fint_{\Gamma_R(z^0)} |\psi|\,d\Gamma,$$

где

$$|\Delta A| = |a(z,u) - A(t)| \le |a(z,u) - a(z,u_{R,z^0})| + |a(z,u_{R,z^0}) - A(t)|,$$

аналогично оценивается выражение $|\Delta M^\tau| = |M^\tau(z,u) - M^\tau(t)|$.

Из условий (H2), (H3), (H6)–(H8) следует, что

$$R^2\mathcal{L}^2_R(u,z^0) \le c\Big[\omega\Big(\fint_{Q^+_R(z^0)} |u - u_{R,z^0}|^2\,dz\Big) + q_*(R)\Big]R^2 \fint_{Q^+_R(z^0)} |\nabla u|^2\,dz +$$
$$+ c\,M_0^2 R^{2\alpha} + c\,R^2 \fint_{Q^+_R(z^0)} |u|^2\,dz. \quad (50)$$

При выводе неравенства (50) мы воспользовались выпуклостью и ограниченностью функции $\omega(\cdot)$. Оценивая правую часть соотношения (50) с помощью неравенств (47) и определения функции $\Phi(r,z^0)$, получаем, что

$$R^2\mathcal{L}^2_R(u,z^0) \le c\,[\omega(\Phi(R,z^0)) + q_*(R)]\Phi(2R,z^0) + c\,M_0^2R^{2\alpha} + c\,R^{2(1-\beta)}\Phi(R,z^0). \quad (51)$$

Из неравенств (47) и (49) следует, что

$$\fint_{Q^+_{R/2}(z^0)} |u-h|^2\,dz \le c\,\varepsilon\,\Phi(2R,z^0) + C_\varepsilon R^2\mathcal{L}^2_R(u,\phi) + c\,M_0^2R^{2\alpha}. \qquad (52)$$

Оценивая правую часть неравенства (52) с помощью оценки (51), приходим к соотношению

$$\fint_{Q^+_{R/2}(z^0)} |u-h|^2\,dz \le c\,\{(\varepsilon + C_\varepsilon[\omega(\Phi(R,z^0)) + q_*(R) + R^{2(1-\beta)}]\}\Phi(2R,z^0)+$$
$$+\,c(1+C_\varepsilon)M_0^2(2R)^{2\alpha}. \qquad (53)$$

При $\rho \le R/4$ справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\Phi(\rho,z^0) \le 4\fint_{Q^+_\rho(z^0)} |u-h|^2\,dz + 2\fint_{Q^+_\rho(z^0)} |h-h_{\rho,z^0}|^2\,dz + 2\rho^{2\beta}\fint_{Q^+_\rho(z^0)} |h|^2\,dz \le$$
$$\underset{(26),(27)}{\le} c\left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+2}\fint_{Q^+_{R/2}(z^0)} |u-h|^2\,dz + \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2\beta}\fint_{Q^+_{R/2}(z^0)} (|h-h_{R/2,z^0}|^2 + R^{2\beta}|h|^2)\,dz \underset{(*)}{\le}$$
$$\underset{(*)}{\le} c\left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+2}\fint_{Q^+_{R/2}(z^0)} |u-h|^2\,dz + c\left(\frac{\rho}{R}\right)^{2\beta}\Phi(2R,z^0) + c\,M_0^2\,R^{2\alpha}. \qquad (54)$$

В переходе $(*)$ мы воспользовались оценками (47), (48) и неравенством $|h| \le |u-h| + |u|$.

Применяя к правой части неравенства (54) оценку (53) получаем, что

$$\Phi(\rho,z^0) \le c\Big\{\left(\frac{\rho}{R}\right)^{2\beta} + \left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+2}(\varepsilon + C_\varepsilon[\omega(\Phi(R,z^0)) + q_*(R) + R^{2(1-\beta)}])\Big\}\Phi(2R,z^0)+$$
$$+\,c\left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+2}(1+C_\varepsilon)M_0^2(2R)^{2\alpha}. \qquad (55)$$

Дальнейшие рассуждения совпадают с соответствующими этапами доказательства теоремы 2.1 работы авторов [1]. Мы приводим их для полноты изложения.

Обозначив $r = 2R$, $\rho = \tau\,r$, где $\tau \le 1/8$ будет фиксировано далее, мы получим из неравенства (55) соотношение

$$\Phi(\tau\,r,z^0) \le c_0\{\tau^{2\beta} + \tau^{-(n+2)}(\varepsilon + C_\varepsilon[\omega(\Phi(r,z^0)) + q_*(r) + r^{2(1-\beta)}])\Phi(r,z^0)+$$
$$+\,K_\varepsilon M_0^2\,r^{2\alpha}, \quad K_\varepsilon = c\tau^{-(n+2)}(1+C_\varepsilon). \qquad (56)$$

Напомним, что мы фиксировали $\beta > \alpha$. Далее полагаем $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2} \in (\alpha,\beta)$ и выбираем τ так, чтобы выполнялось неравенство

$$c_0\tau^{2\beta} \le \frac{\tau^{2\gamma}}{8}. \qquad (57)$$

При фиксированном τ выбираем ε из соотношения

$$\varepsilon\, c_0\, \tau^{-(n+2)} \le \frac{\tau^{2\gamma}}{8}. \tag{58}$$

Функция $\omega(s) \to 0$ при $s \to 0$ в условиях (H2) и (H6), что позволяет фиксировать параметр θ_0 так, чтобы

$$c_0\ C_\varepsilon\, \tau^{-(n+2)} \omega(\theta_0) \le \frac{\tau^{2\gamma}}{8}. \tag{59}$$

Теперь мы можем выбрать радиус r_0 настолько малым, чтобы выполнялись соотношения

$$c_0\ C_\varepsilon\, \tau^{-(n+2)} (q_*(r_0) + r_0^{2(1-\beta)}) \le \frac{\tau^{2\gamma}}{8}, \quad K\, M_0^2\, r_0^{2\alpha} < \frac{\theta_0}{2},\ \ K = K_\varepsilon. \tag{60}$$

Предположим, что для некоторого $r \le r_0$ функция $\Phi(r, z^0)$ достаточно мала, точнее,

$$\Phi(r, z^0) < \theta_0. \tag{61}$$

При выполнении условий (57)–(61) из неравенства (56) следует, что

$$\Phi(\tau\, r, z^0) \le \frac{\tau^{2\gamma}}{2} \Phi(r, z^0) + K M_0^2 r^{2\alpha}. \tag{62}$$

В частности,

$$\Phi(\tau\, r, z^0) \underset{(60),\,(61)}{\le} \frac{\tau^{2\gamma}}{2} \theta_0 + \frac{\theta_0}{2} < \theta_0. \tag{63}$$

Неравенство (63) означает, что условие (61) выполнено при замене r на $\tau\, r$. Заметим, что все остальные условия на выбор τ, ε, r_0 также выполняются при замене r на $\tau\, r$. Следовательно, верно неравенство (62), если заменить r на $\tau\, r$, т. е.

$$\Phi(\tau^2\, r, z^0) \le \frac{\tau^{2\gamma}}{2} \Phi(\tau\, r, z^0) + K M_0^2 (\tau\, r)^{2\alpha}, \quad \gamma > \alpha. \tag{64}$$

Повторяя далее рассуждения для последовательности радиусов $r_j = \tau^j r$, $j \in \mathbb{N}$, и проводя итерации в полученных соотношениях, получим (как и в работе [1]) оценку

$$\Phi(\tau^j r, z^0) \le \frac{\tau^{2\gamma\, j}}{2} \Phi(r, z^0) + K\, M_0^2 \tau^{2\alpha\, j} \sum_{s=0}^{j} \tau^{2(\gamma-\alpha)s} r^{2\alpha}, \tag{65}$$

откуда следует, что

$$\Phi(\tau^j r, z^0) \le \tau^{2\alpha\, j} \big\{ \Phi(r, z^0) + K_1\, M_0^2\, r^{2\alpha} \big\}.$$

Полученные неравенства гарантируют, что при всех $\rho \le r$ справедлива оценка

$$\Phi(\rho, z^0) \le c \left[\left(\frac{\rho}{r} \right)^{2\alpha} \Phi(r, z^0) + \rho^{2\alpha} M_0^2 \right]. \tag{66}$$

Неравенство (66) совпадает с неравенством (46), и из него следует, что

$$\frac{1}{\rho^{n+2+2\alpha}} \int\limits_{Q_\rho^+(z^0)} |u - u_{\rho, z^0}|^2\, dz \le c \left\{ \frac{\|u\|^2_{\widehat{V}(Q_1^+)}}{r^{n+2+2\alpha}} + M_0^2 \right\}, \quad \rho \le r, \tag{67}$$

где постоянная c определяется параметрами задачи и не зависит от z^0 и r. Заметим, что при фиксированном $r \le r_0$ неравенство (61) остается справедливым в некоторой окрестности точки z^0, т. е. существует такая окрестность $Q^+_{s\,r}(z^0)$, что для всех $\xi \in Q^+_{s\,r}(z^0)$ выполняется неравенство

$$\Phi(r, \xi) < \theta_0. \tag{68}$$

Из неравенства (68) следует оценка (67) для всех $\xi \in Q^+_{s\,r}(z^0)$, а не только для точки z^0, т. е.

$$\sup_{\xi \in Q^+_{s\,r}(z^0)} \frac{1}{\rho^{n+2+2\alpha}} \int\limits_{Q'_\rho(\xi)} |u - u_{\rho,z^0}|^2\, dz \le c_1 \|u\|^2_{\hat{V}(Q_1^+)} + c_2 M_0^2.$$

Таким образом, мы оценили полунорму (следовательно, и норму) функции u в пространстве $\mathcal{L}^{2,n+2+2\alpha}(Q^+_{sr}(z^0); \delta)$. В силу изоморфизма этого пространства пространству Гельдера $C^\alpha(\overline{Q^+_{s\,r}(z^0)};\, \delta)$ заключаем, что решение u непрерывно по Гельдеру с показателем α в окрестности точки z^0, и справедлива оценка (10). $\square$

Следствие 5.1. (Оценка сингулярного множества). *Пусть*

$$\Sigma_u = \left\{ z^0 \in Q_1^+ \cup \Gamma_1 :\ \liminf_{\rho \to 0} \int\limits_{Q'_\rho(z^0)} \rho^{-n}(|\nabla\, u|^2 + |u|^2)\, dz > 0 \right\}.$$

Тогда $R(u) = (Q_1^+ \cup \Gamma_1) \setminus \Sigma_u$ — *открытое относительно* $Q_1^+ \cup \Gamma_1$ *множество регулярных точек функции* u. *Замкнутое сингулярное множество* Σ_u *допускает оценку* $\dim_{\mathcal{H}}(\Sigma_u; \delta) \le n$.

Для доказательства следствия зафиксируем $\beta \in (\alpha,\, 1)$, где α — показатель из условия (H8). Пусть

$$\Sigma_\beta(u) = \left\{ z^0 \in Q_1^+ \cup \Gamma_1 :\ \liminf_{\rho \to 0} \rho^{-(n+2(1-\beta))} \int\limits_{Q'_\rho(z^0)} (|\nabla\, u|^2 + |u|^2)\, dz > 0 \right\}.$$

Предположим, что $z^0 \in R_\beta(u) = (Q_1^+ \cup \Gamma_1) \setminus \Sigma_\beta(u)$. Тогда

$$\liminf_{\rho \to 0} \rho^{-(n+2(1-\beta))} \int\limits_{Q'_\rho(z^0)} (|\nabla\, u|^2 + |u|^2)\, dz = 0.$$

Из этого соотношения и неравенства Пуанкаре следует, что $\Phi(\rho,\, z^0) \to 0$ для некоторой последовательности $\rho \to 0$. Это означает, что в точке z^0 выполнено условие (61) при некотором $r \le r_0$, т. е. z^0 — регулярная точка. Таким образом, множество $R_\beta(u)$ открыто относительно $Q_1^+ \cup \Gamma_1$, а множество $\Sigma_\beta(u)$ замкнуто, и $\mathcal{H}_{n+2(1-\beta)}(\Sigma_\beta(u);\, \delta) = 0$. Заметим, что замкнутое множество $\Sigma(u) = \bigcap\limits_{\beta \in (\alpha,\, 1)} \Sigma_\beta(u)$ допускает оценку $\dim_{\mathcal{H}}(\Sigma_u; \delta) \le n$, где размерность Хаусдорфа множества $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ в параболической метрике δ определяется как

$$\dim_{\mathcal{H}}(D; \delta) = \inf\{\kappa \ge 0 :\ \mathcal{H}_\kappa(D;\, \delta) = 0\}. \qquad \square$$

Доказательство теоремы 2.2. Схема доказательства та же, что использовалась для доказательства теоремы 2.1. В этом случае для функции $\Phi(r, z^0)$ мы получаем оценку вида (55), в которой отсутствует слагаемое, содержащее функцию $\omega(\cdot)$. Точнее, справедливо неравенство

$$\Phi(\rho, z^0) \leq c \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2\beta} \Phi(2R, z^0) + c \left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+2} \{\varepsilon + C_\varepsilon\, q_*(2R) + R^{2(1-\beta)}\} \Phi(2R, z^0).$$

Анализируя далее доказательство теоремы 2.1, заключаем, что в данном случае можно так выбрать параметры τ, ε, r_0, что в любой точке z^0 будут выполняться неравенства (64), (66). Из сказанного следует, что все точки множества $\overline{Q_s^+}$, $s < 1$, будут регулярными, и оценка (11) справедлива на всем множестве $\overline{Q_s^+}$. $\square$

Литература

1. *Архипова А. А., Гришина Г. В.* Регулярность решений квазилинейных параболических систем с негладкой по времени главной матрицей при краевом условии Неймана // В сб. Проблемы математ. анализа. 2018. Вып. 92. С. 27–44.

2. *Giaquinta M., Giusti E.* Partial regularity for solutions to nonlinear parabolic systems // Ann. Mat. Pura Applic. 1973. Vol. 97. P. 253–261.

3. *Архипова А. А.* О регулярности решения задачи Неймана для квазилинейных параболических систем // Известия Росс. Акад. Наук, сер. матем. 1994. Т. 58. Вып. 5. С. 3–25.

4. *Архипова А. А.* О регулярности решений задачи с косой производной для квазилинейных эллиптических систем // Зап. научн. сем. ПОМИ. 1994. Т. 213. С. 5–13.

5. *Архипова А. А.* О регулярности решений модельных нелинейных эллиптических систем при краевом условии типа заданной косой производной // Зап. научн. сем. ПОМИ. 1995. Т. 221. С. 30–57.

6. *Stará J., John O.* Some (new) counterexamples of parabolic systems // Comment. Math. Univ. Carolin. 1995. Vol. 36. P. 503–510.

7. *Giaquinta M.* A counterexample to the boundary regularity of solutions to elliptic systems // Manuscripta Math. 1978. Vol. 26. P. 217–220.

8. *Krylov N. V.* Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Sobolev Spaces. In Ser.: Graduate Studies in Math. Vol. 96. Amer. Math. Soc., 2008.

9. *Dong H., Kim D.* L-p solvability of divergence type parabolic and elliptic systems with partially BVO coefficients // Calc. Var. 2011. Vol. 40. P. 357–389.

10. *Dong H., Zhang H.* Conormal problem of higher-order parabolic systems // Transactions of AMS. 2016. Vol. 368, no. 1. P. 7413–7460.

11. *Duzaar F., Mingione G.* Second order parabolic systems, optimal regularity and singular sets of solutions // Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Nonlinear. 2005. Vol. 22. P. 705–751.

12. *Bögelein V., Duzaar F., Mingione G.* The boundary regularity for nonlinear parabolic systems. I // Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Nonlinear. 2010. Vol. 27. P. 201–255.

13. *Bögelein V., Duzaar F., Mingione G.* The boundary regularity for nonlinear parabolic systems. II // Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Nonlinear. 2010. Vol. 27. P. 145–200.

14. *Duzaar F., Mingione G., Steffen K.* Parabolic systems with polynomial growth and regularity // Mem. Amer. Math. Soc. 2011. Vol. 214, no. 1005. P. 128.

15. *Arkhipova A., John O., Stará J.* Partial regularity for solutions of quasilinear parabolic systems with nonsmooth in time principal matrix // Nonlinear Analysis. Ser. A. 2014. Vol. 95. P. 421–435.

16. *Arkhipova A., Stará J.* Boundary partial regularity for solutions of quasilinear parabolic systems with nonsmooth in time principal matrix // Nonlinear Analysis, Ser. A. 2015. Vol. 120. P. 236–261.

17. *Arkhipova A., Stará J.* Regularity of weak solutions to linear and quasilinear parabolic systems of non divergence type with non smooth in time principal matrix: $A(t)$-caloric method // Forum Mathematicum. 2017. Vol. 29, N 5. P. 1039–1064.

18. *Arkhipova A., Stará J.* Regularity problem for 2m-order quasilinear parabolic systems with nonsmooth in time principal matrix // Topological Methods in Nonlinear Analysis. 2018. Vol. 52, no. 1. P. 111–146. https://doi.org/10.12775/TMNA.2018.006

19. *Arkhipova A.* Regularity of weak solutions to the model Venttsel problem for linear parabolic systems with non smooth in time principal matrix. $A(t)$-caloric approximation method // Manuscripta Math. 2016. Vol. 151, no. 3. P. 519–548.

20. *Arkhipova A.* Regularity of solutions of the model Venttsel's problem for quasilinear parabolic systems with nonsmooth in time principal matrix // Computational Mathematics and Math. Physics. 2017. Vol. 3. P. 476–496; in Russian: Ж. Вычислит. Матем. и Математ. Физики. 2017. Т. 57, № 3. С. 470–490.

21. *Ладыжеская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Изд-во Наука, 1967. 736 с.

Статья поступила в редакцию 13 июня 2018 г.;
после доработки 3 августа 2018 г.;
рекомендована в печать 27 сентября 2018 г.

Контактная информация:

Архипова Арина Алексеевна — д-р физ.-мат. наук, проф.; arinaark@gmail.com, arina@AA1101.spb.edu

Гришина Галина Владимировна — канд. физ.-мат. наук, доц.; galinavg@yandex.ru

Regularity of solutions to a model oblique derivative problem for quasilinear parabolic systems with nondiagonal principal matrices

A. A. Arkhipova[1], *G. V. Grishina*[2]

[1] St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation
[2] Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005, Russian Federation

For citation: Arkhipova A. A., Grishina G. V. Regularity of solutions to a model oblique derivative problem for quasilinear parabolic systems with nondiagonal principal matrices. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2019, vol. 6 (64), issue 1, pp. 3–26. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.101 (In Russian)

We consider quasilinear parabolic systems of equations with nondiagonal principal matrices. The oblique derivative of a solution is defined on the flat part of the lateral surface of a parabolic cylinder. We do not assume smoothness of the principal matrix and the boundary functions in the time variable and prove partial Hölder continuity of a weak solution near the flat part of the lateral surface of the cylinder. Hölder continuity of weak solutions to the correspondent linear problem is stated. A modification of the $A(t)$-caloric approximation method is applied to study regularity of weak solutions.

Keywords: parabolic systems, nonlinearity, regularity, oblique derivative.

References

1. Arkhipova A., Grishina G., "Regularity of Solutions to Quasilinear Parabolic Systems with Time-Nonsmooth Principal Matrix and the Neumann Boundary Condition", *Journal of Mathematical Sciences* **232**(3), 232–253 (2018).

2. Giaquinta M., Giusti E., "Partial regularity for solutions to nonlinear parabolic systems", *Ann. Mat. Pura Applic.* **97**, 253–261 (1973).

3. Arkhipova A., "On the regularity of the solution of the Neumann problem for quasilinear parabolic systems", *Russian Academy Science, Izvestiya Math.* **45**(2), 231–253 (1995).

4. Arkhipova A., "On the regularity of solutions for oblique derivative problem to quasilinear elliptic systems", *Journal of Math. Sci., N. Y.* **84**(1), 817–822 (1997).

5. Arkhipova A., "On the regularity of weak solutions of the model nonlinear elliptic systems under the oblique derivative type problem", *Journal of Math. Sci., N. Y.* **87**(2), 3284–3303 (1997).

6. Stará J., John O., “Some (new) counterexamples of parabolic systems”, *Comment. Math. Univ. Carolin.* **36**, 503–510 (1995).

7. Giaquinta M., “A counterexample to the boundary regularity of solutions to elliptic systems”, *Manuscripta Math.* **26**, 217–220 (1978).

8. Krylov N. V., *Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Sobolev Spaces.* In Ser. *Graduate Studies in Math.* **96** (Amer. Math. Soc., 2008).

9. Dong H., Kim D., “L-p solvability of divergence type parabolic and elliptic systems with partially BVO coefficients”, *Calc. Var.* **40**, 357–389 (2011).

10. Dong H., Zhang H., “Conormal problem of higher-order parabolic systems”, *Transactions of AMS* **368**(1), 7413–7460 (2016).

11. Duzaar F., Mingione G., “Second order parabolic systems, optimal regularity and singular sets of solutions”, *Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire* **22**, 705–751 (2005).

12. Bögelein V., Duzaar F., Mingione G., “The boundary regularity for nonlinear parabolic systems. I”, *Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire* **27**, 201–255 (2010).

13. Bögelein V., Duzaar F., Mingione G., “The boundary regularity for nonlinear parabolic systems. II”, *Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire* **27**, 145–200 (2010).

14. Duzaar F., Mingione G., Steffen K., “Parabolic systems with polynomial growth and regularity”, *Mem. Amer. Math. Soc.* **214**(1005), 128 (2011).

15. Arkhipova A., John O., Stará J., “Partial regularity for solutions of quasilinear parabolic systems with nonsmooth in time principal matrix”, *Nonlinear Analysis. Ser. A* **95**, 421–435 (2014).

16. Arkhipova A., Stará J., “Boundary partial regularity for solutions of quasilinear parabolic systems with nonsmooth in time principal matrix”, *Nonlinear Analysis, Ser. A* **120**, 236–261 (2015).

17. Arkhipova A., Stará J., “Regularity of weak solutions to linear and quasilinear parabolic systems of non divergence type with non smooth in time principal matrix: $A(t)$-caloric method”, *Forum Mathematicum* **29**(5), 1039–1064 (2017).

18. Arkhipova A., Stará J., “Regularity problem for 2m-order quasilinear parabolic systems with nonsmooth in time principal matrix”, *Topological Methods in Nonlinear Analysis* **52**(1), 111–146 (2018) https://doi.org/10.12775/TMNA.2018.006

19. Arkhipova A., “Regularity of weak solutions to the model Venttsel problem for linear parabolic systems with non smooth in time principal matrix. $A(t)$-caloric approximation method”, *Manuscripta Math.* **151**(3), 519–548 (2016).

20. Arkhipova A., “Regularity of solutions of the model Venttsel’s problem for quasilinear parabolic systems with nonsmooth in time principal matrix”, *Computational Mathematics and Math. Physics* **3**, 476–496 (2017).

21. Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Uraltseva N. N., *Linear and Quasilinear Parabolic Equations* (Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1968).

Received: June 13, 2018
Revised: August 3, 2018
Accepted: September 27, 2018

Author’s information:

Arina A. Arkhipova — arinaark@gmail.com, arina@AA1101.spb.edu
Galina V. Grishina — galinavg@yandex.ru