УДК 517.925.53 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 1
MSC 37C75, 37C29, 34C37

Устойчивость периодических точек диффеоморфизма плоскости в случае наличия гомоклинической орбиты*

Е. В. Васильева

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Васильева Е. В.* Устойчивость периодических точек диффеоморфизма плоскости в случае наличия гомоклинической орбиты // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 1. С. 44–52. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.103

Рассматривается диффеоморфизм плоскости в себя с неподвижной гиперболической точкой в начале координат и нетрансверсальной гомоклинической к ней точкой. Периодические точки, лежащие в достаточно малой окрестности гомоклинической точки, делятся на однообходные и многообходные в зависимости от расположения орбиты периодической точки по отношению к орбите гомоклинической точки. Из работ Ш. Ньюхауса, Л. П. Шильникова, Б. Ф. Иванова и других авторов следует, что при определенном способе касания устойчивого многообразия с неустойчивым в окрестности нетрансверсальной гомоклинической точки может лежать бесконечное множество устойчивых периодических точек, но, по крайней мере один из характеристических показателей этих точек стремится к нулю с ростом периода. Из прежних работ автора следует, что при ином способе касания устойчивого многообразия с неустойчивым в окрестности нетрансверсальной гомоклинической точки может лежать бесконечное множество устойчивых однообходных периодических точек, характеристические показатели которых отделены от нуля. В данной работе показано, что при определенных условиях, наложенных, прежде всего, на способ касания устойчивого многообразия с неустойчивым, любая окрестность нетрансверсальной гомоклинической точки может содержать счетное множество устойчивых двухобходных периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями.

Ключевые слова: диффеоморфизм плоскости, гиперболическая точка, нетрансверсальная гомоклиническая точка, устойчивость.

В предлагаемой работе изучается C^1-диффеоморфизм плоскости в себя с неподвижной гиперболической (седловой) точкой в начале координат, предполагается наличие нетрансверсальной гомоклинической к ней точки. Известно, что в произвольной окрестности нетрансверсальной гомоклинической точки может лежать бесконечное множество периодических точек исходного диффеоморфизма. Периодические точки, которые лежат в достаточно малой окрестности гомоклинической точки, делятся на однообходные и многообходные в зависимости от расположения орбиты периодической точки в окрестности гомоклинической точки.

Основная цель данной работы показать, что в произвольной окрестности нетрансверсальной гомоклинической точки может лежать бесконечное множество

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-01-00452).

многообходных (точнее двухобходных) устойчивых периодических точек, характеристические показатели которых отделены от нуля. Ранее структура окрестности нетрансверсальной гомоклинической точки изучалась в работах Ш. Ньюхауса, Л. П. Шильникова, Б. Ф. Иванова и других авторов [1–4]. Из перечисленных работ следует, что при определенных условиях, наложенных, прежде всего, на способ касания устойчивого многообразия с неустойчивым, в окрестности нетрансверсальной гомоклинической точки может лежать бесконечное множество устойчивых периодических точек, но, по крайней мере один из характеристических показателей у этих точек стремится к нулю с ростом периода.

Предлагаемая работа является продолжением работ [5, 6]. В указанных статьях рассматривались диффеоморфизмы с неподвижной гиперболической точкой в начале координат и нетрансверсальной гомоклинической к ней точкой, при этом на способ касания устойчивого многообразия с неустойчивым накладывались несколько иные условия, чем в [1–4]. Показано, что в произвольной окрестности нетрансверсальной гомоклинической точки может лежать бесконечное множество устойчивых однообходных периодических точек, характеристические показатели которых отделены от нуля. Пример диффеоморфизма с такими свойствами приведен в [7].

Пусть f — диффеоморфизм плоскости в себя с гиперболической неподвижной точкой в начале координат, т. е. $f(0) = 0$. Считаем, что f линеен в некоторой ограниченной окрестности V начала координат, точнее, если $(x, y) \in V$, то

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \mu y \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где

$$0 < \lambda < 1 < \mu.$$

Предположим, что

$$\lambda\mu^2 < 1. \tag{2}$$

Ясно, что существует такая $\bar{\gamma} > 2$, что $\lambda\mu^{\bar{\gamma}} = 1$.

Как обычно, через $W^s(0)$, $W^u(0)$ обозначим устойчивое и неустойчивое многообразия нулевой точки. Известно, что *устойчивое и неустойчивое многообразия* гиперболической точки диффеоморфизма f определяются как

$$W^s(0) = \left\{ z \in \mathbb{R}^2 : \lim_{k\to+\infty} \| f^k(z) \| = 0 \right\},$$

$$W^u(0) = \left\{ z \in \mathbb{R}^2 : \lim_{k\to+\infty} \| f^{-k}(z) \| = 0 \right\},$$

где f^k, f^{-k} — степени диффеоморфизмов f и f^{-1}.

Предполагается наличие *нетрансверсальной гомоклинической точки*, а именно, предполагается, что в пересечении устойчивого и неустойчивого многообразий лежит отличная от нуля точка w, причем эта точка является точкой касания этих многообразий.

Из определения гомоклинической точки следуют равенства

$$\lim_{k\to+\infty} \| f^k(w) \| = \lim_{k\to+\infty} \| f^{-k}(w) \| = 0.$$

Пусть w_1 и w_2 — две такие точки из орбиты гомоклинической точки w, что $w_1 \in V$, $w_2 \in V$, и их координаты имеют вид $w_1 = (0, y^0)$, $w_2 = (x^0, 0)$. Из определения гомоклинической точки следует, что существует натуральное число ω такое, что $f^{\omega}(w_1) = w_2$.

Предположим, что при некоторых $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$ таких, что $\lambda < \bar{\lambda} < 1$, $1 < \bar{\mu} < \mu$, справедливо включение

$$V_1 = \left\{(x, y) : |x| < \bar{\lambda}^{-1}|x^0|, \, |y| < \bar{\mu}|y^0|\right\} \subset V. \tag{3}$$

Предположим, что

$$x^0 > 0, \quad y^0 > 0. \tag{4}$$

Пусть

$$U = \left\{(x, y) : |x| < \beta, \, |y - y^0| < \beta\right\}$$

— такая окрестность точки w_1, что $U \subset V_1$, $f^{\omega}(U) \subset V_1$, $f(U) \bigcap V_1 = \emptyset$, $f^{\omega-1}(U) \bigcap V_1 = \emptyset$ и множества U, $f(U)$, ..., $f^{\omega}(U)$ попарно не пересекаются. Обозначим через L сужение $f^{\omega} \mid_U$. Ясно, что L — отображение класса C^1, а матрица $DL(0)$ невырожденная.

Периодическая точка исходного диффеоморфизма $u \in U$ называется *однообходной* периодической точкой, если существует натуральное число j такое, что $f^j L(u) = u$, причем $(\omega + j)$ — наименьший период, и для любого $k = 1, 2, ..., j - 1$ $f^k L(u) \in V_1$.

Периодическая точка $u \in U$ исходного диффеоморфизма называется *s-обходной или многообходной* периодической точкой $(s > 1)$, если существуют натуральные числа j_1, j_2, ..., j_s такие, что $f^{j_s} L ... f^{j_2} L f^{j_1} L(u) = u$, причем $(s\omega + j_1 + j_2 + ... + j_s)$ — наименьший период, и для любого $k = 1, 2, \ldots, s - 1$ имеем $f^{j_k} L ... f^{j_2} L f^{j_1} L(u) \in U$ и для любого $k = 1, 2, ..., s$, $l = 1, 2, ..., j_k$ — $f^l L f^{j_{k-1}} L ... f^{j_1} L(u) \in V_1$.

В данной работе изучаются многообходные периодические точки с $s = 2$; такие точки называются двухобходными.

Запишем отображение L в координатах:

$$L(x, y) = \begin{pmatrix} x^0 + F_1(x, y - y^0) \\ F_2(x, y - y^0) \end{pmatrix},$$

где $F_1(x, y - y^0)$, $F_2(x, y - y^0)$ — C^1-функции, определенные в U. Ясно, что $F_1(0, 0) = F_2(0, 0) = 0$.

В работах [1–4] исследовалась окрестность гомоклинической точки и предполагалось, что существует $r > 1$ такая, что

$$\frac{\partial F_2(0, 0)}{\partial y} = \ldots = \frac{\partial^{r-1} F_2(0, 0)}{\partial y^{r-1}} = 0, \quad \frac{\partial^r F_2(0, 0)}{\partial y^r} \neq 0. \tag{5}$$

Из указанных работ следует, что при выполнении условий (5), которые определяют способ касания устойчивого многообразия с неустойчивым, в окрестности гомоклинической точки может лежать бесконечное множество устойчивых периодических точек, но по крайней мере один из характеристических показателей у этих точек стремится к нулю с ростом периода. В работах [5, 6] показано, что при ином способе касания устойчивого многообразия с неустойчивым окрестность гомоклинической точки может содержать бесконечное множество однообходных устойчивых периодических точек, характеристические показатели которых отделены от нуля. Вопрос об устойчивости многообходных периодических точек в этих работах не рассматривался. Основная цель данной работы — показать, что в случае, когда условия (5) не выполняются, в произвольной окрестности гомоклинической точки может лежать бесконечное множество двухобходных устойчивых периодических точек, характеристические показатели которых отделены от нуля.

Предположим, что координатные функции отображения L имеют вид

$$F_1(x, y - y^0) = ax + b(y - y^0) + \varphi_1(x, y - y^0),$$

$$F_2(x, y - y^0) = cx + g(y - y^0) + \varphi_2(x), \tag{6}$$

где a, b, c — действительные числа такие, что

$$b < 0, \quad c > 0, \tag{7}$$

а g, φ_1, φ_2 — непрерывно дифференцируемые функции одной или двух переменных, определенные в окрестности начала координат, равные нулю вместе со своими производными первого порядка в начале координат. Предположим, что производные первого порядка этих функций ограничены $\frac{1}{2}$ в окрестности U.

Характер касания устойчивого многообразия с неустойчивым в точке w_2 определяется свойствами функции g. Опишем свойства этой функции с помощью последовательностей. Пусть σ_k, ε_k — положительные, стремящиеся к нулю последовательности, причем последовательность σ_k убывает. Пусть Δ_k — отрицательная, стремящаяся к нулю последовательность.

Предположим, что

$$\sigma_k - \varepsilon_k > \sigma_{k+1} + \varepsilon_{k+1} \tag{8}$$

для любого k.

Пусть γ, p — не зависящие от k положительные постоянные, причем $1 \le \gamma < \bar{\gamma}$.

Пусть m_k — строго возрастающая последовательность натуральных чисел, а n_k — такая последовательность натуральных чисел, что

$$n_k = \gamma_k m_k + p_k, \tag{9}$$

где $1 \le \gamma_k \le \gamma$, $|p_k| \le p$.

Предположим, что при любых k справедливы неравенства

$$10x^0 \max\left[\lambda^{n_k}\mu^{(n_k+m_k)},\, \lambda^{m_k}\mu^{n_k}\right] \le \varepsilon_k. \tag{10}$$

Обозначим

$$x_k = \left[\lambda^{n_k}(x^0 + b\Delta_k) + \lambda^{(m_k+n_k)}a(x^0 + b\sigma_k)\right]\left(1 - a^2\lambda^{(m_k+n_k)}\right)^{-1},$$

$$\bar{x}_k = \left[\lambda^{m_k}(x^0 + b\sigma_k) + \lambda^{(m_k+n_k)}a(x^0 + b\Delta_k)\right]\left(1 - a^2\lambda^{(m_k+n_k)}\right)^{-1}.$$

Пусть для любого k выполняются неравенства

$$\left|\mu^{m_k}\left(cx_k + g(\sigma_k)\right) - \left(y^0 + \Delta_k\right)\right| < 0.1\varepsilon_k\mu^{-n_k},$$

$$\left|\mu^{n_k}\left(c\bar{x}_k + g(\Delta_k)\right) - \left(y^0 + \sigma_k\right)\right| < 0.1\varepsilon_k. \tag{11}$$

Предположим, что существует такая постоянная $\alpha > 1 + 0.5\,(\bar{\gamma} - \gamma)$, что при любом k и $t \in (\sigma_k - \varepsilon_k,\, \sigma_k + \varepsilon_k)$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{dg(t)}{dt} \right| < \mu^{-\alpha(m_k + n_k)}. \tag{12}$$

Если функция g удовлетворяет неравенствам (11), (12), то условия (5) не выполняются.

Из (11), (12) следует

$$\lim_{k \to +\infty} \mu^{-m_k} (\sigma_k)^{-1} = \lim_{k \to +\infty} \mu^{-n_k} (\Delta_k)^{-1} = 0.$$

Определим $\delta_k = 10\lambda^{n_k}\, |\Delta_k|$.

Пусть

$$B_k = \left\{ (x, y) :\, |x - x_k| < \delta_k,\ |y - (y^0 + \sigma_k)| < \varepsilon_k \right\}.$$

Ясно, что при достаточно больших номерах k будем иметь $B_k \subset U$.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия (1)–(4), (6)–(12), тогда существует номер k_0 такой, что при $k > k_0$ справедливы включения*

$$f^{n_k} L f^{m_k} L(\mathrm{cl}(B_k)) \subset B_k, \tag{13}$$

где $\mathrm{cl}(B_k)$ *— замыкание* B_k.

Доказательство. Пусть $(x, y) \in \mathrm{cl}(B_k)$, ясно, что $x = x_k + u$, $y = y^0 + \sigma_k + v$, где $|u| \le \delta_k$, $|v| \le \varepsilon_k$.

Обозначим

$$\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = f^{m_k} L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

ясно, что

$$\overline{x} = \overline{x}_k + \lambda^{m_k} \left[au + bv + \varphi_1(x_k + u, \sigma_k + v) \right],$$

$$\overline{y} = \mu^{m_k} \left(c x_k + g(\sigma_k) \right) + \mu^{m_k} \left[cu + g(\sigma_k + v) - g(\sigma_k) + \varphi_2(x_k + u) \right].$$

При любом фиксированном k к функциям g, φ_1, φ_2 можно применить теорему о среднем значении, в результате, с учетом (12), получим

$$|\varphi_1(x_k + u, \sigma_k + v)| \le 0.5\,(|x_k| + |u| + |\sigma_k| + |v|) < \left(\lambda^{n_k} x^0 + \delta_k + \sigma_k + \varepsilon_k \right),$$

$$|\varphi_2(x_k + u)| \le 0.5\,(|x_k| + |u|) < \left(\lambda^{n_k} x^0 + \delta_k \right),$$

$$|g(\sigma_k + v) - g(\sigma_k)| \le \varepsilon_k \mu^{-\alpha(m_k + n_k)}.$$

Обозначим

$$\overline{\delta}_k = \lambda^{m_k} \left[(|a| + 1)\,\delta_k + (|b| + 1)\,\varepsilon_k + \lambda^{n_k} x^0 + \sigma_k \right],$$

$$\overline{\varepsilon}_k = 0.1 \varepsilon_k \mu^{-n_k} + \mu^{m_k} \left[(|c| + 1)\,\delta_k + \varepsilon_k \mu^{-\alpha(m_k + n_k)} + \lambda^{n_k} x^0 \right].$$

Определим последовательность множеств

$$\overline{B}_k = \left\{ (x, y) :\, |x - \overline{x}_k| < \overline{\delta}_k,\ |y - (y^0 + \Delta_k)| < \overline{\varepsilon}_k \right\}. \tag{14}$$

Ясно, что при достаточно больших номерах k будем иметь $\overline{B}_k \subset U$.

Легко видеть, что

$$|\overline{x} - \overline{x}_k| < \overline{\delta}_k,$$

$$|\overline{y} - \left(y^0 + \Delta_k\right)| < \overline{\varepsilon}_k,$$

следовательно $f^{m_k}L(\mathrm{cl}(B_k)) \subset \overline{B}_k$.

Пусть $(x, y) \in \overline{B}_k$, ясно, что $x = \overline{x}_k + \overline{u}$, $y = y^0 + \Delta_k + \overline{v}$, где $|\overline{u}| < \overline{\delta}_k$, $|\overline{v}| < \overline{\varepsilon}_k$.

Обозначим

$$\begin{pmatrix} \overline{\overline{x}} \\ \overline{\overline{y}} \end{pmatrix} = f^{n_k}L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

ясно, что

$$\overline{\overline{x}} = x_k + \lambda^{n_k} \left[a\overline{u} + b\overline{v} + \varphi_1(\overline{x}_k + \overline{u}, \Delta_k + \overline{v})\right],$$

$$\overline{\overline{y}} = \mu^{n_k} \left(c\overline{x}_k + g(\Delta_k)\right) + \mu^{n_k} \left[c\overline{u} + g(\Delta_k + \overline{v}) - g(\Delta_k) + \varphi_2(\overline{x}_k + \overline{u})\right].$$

Из последних равенств, с учетом условий (9)–(12), имеем

$$\left|\overline{\overline{x}} - x_k\right| < \lambda^{n_k} \left[(|a| + 1)\, \overline{\delta}_k + (|b| + 1)\, \overline{\varepsilon}_k + \lambda^{m_k} x^0 + |\Delta_k|\right] \le \delta_k,$$

$$\left|\overline{\overline{y}} - \left(y^0 + \sigma_k\right)\right| < 0{,}1\varepsilon_k + \mu^{n_k} \left[(|c| + 1)\, \overline{\delta}_k + \overline{\varepsilon}_k + \lambda^{m_k} x^0\right] \le \varepsilon_k.$$

Последние неравенства выполняются для достаточно больших номеров k. Включения (13) доказаны. Лемма доказана.

Легко видеть, что для любого k $B_k \bigcap \overline{B}_k = \emptyset$, где $\overline{B}_k$ определено в (14).

Теорема 1. *Пусть f — диффеоморфизм плоскости в себя с неподвижной гиперболической точкой в начале координат и нетрансверсальной гомоклинической к ней точкой. Пусть выполнены условия (1)–(4), (6)–(12), тогда в любой окрестности гомоклинической точки w_1 лежит счетное множество двухобходных устойчивых периодических точек, характеристические показатели которых отделены от нуля.*

Доказательство. Из включений (13) следует, что при достаточно больших номерах k множество B_k содержит неподвижную точку u_k отображения $f^{n_k}Lf^{m_k}L$, которая является периодической точкой диффеоморфизма f.

Пусть $\overline{u}_k = f^{m_k}L(u_k)$, ясно, что $\overline{u}_k \in \overline{B}_k$.

Обозначим

$$\Theta_k = D\left(f^{n_k}Lf^{m_k}L(u_k)\right) = Df^{n_k}L(\overline{u}_k)Df^{m_k}L(u_k).$$

В дальнейшем $\mathrm{Det}\Theta_k$ — определитель матрицы Θ_k, а $\mathrm{Tr}\Theta_k$ — ее след.

Ясно, что

$$\Theta_k = \begin{pmatrix} \lambda^{n_k}a_2(k) & \lambda^{n_k}b_2(k) \\ \mu^{n_k}c_2(k) & \mu^{n_k}g_2(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^{m_k}a_1(k) & \lambda^{m_k}b_1(k) \\ \mu^{m_k}c_1(k) & \mu^{m_k}g_1(k) \end{pmatrix},$$

где $\lim\limits_{k\to+\infty} a_i(k) = a$, $\lim\limits_{k\to+\infty} b_i(k) = b$, $\lim\limits_{k\to+\infty} c_i(k) = c$, $\lim\limits_{k\to+\infty} g_i(k) = 0$, $i = 1, 2$, $|g_1(k)| < \mu^{-\alpha(m_k+n_k)}$.

Очевидно, что

$$\mathrm{Det}\Theta_k = (\lambda\mu)^{(m_k+n_k)} \left(a_2(k)g_2(k) - b_2(k)c_2(k)\right) \left(a_1(k)g_1(k) - b_1(k)c_1(k)\right),$$

$$\mathrm{Tr}\Theta_k = \lambda^{(m_k+n_k)}a_1(k)a_2(k) + \lambda^{m_k}\mu^{n_k}b_1(k)c_2(k)+$$
$$+ \lambda^{n_k}\mu^{m_k}b_2(k)c_1(k) + \mu^{(m_k+n_k)}g_1(k)g_2(k),$$

или, с учетом условий (12), получим

$$\mathrm{Det}\Theta_k = (\lambda\mu)^{(m_k+n_k)}(bc)^2(1+\theta_k),$$

$$\mathrm{Tr}\Theta_k = \lambda^{m_k}\mu^{n_k}bc\left[1+\left(\lambda\mu^{-1}\right)^{(n_k-m_k)}+\eta_k\right],$$

где $\lim\limits_{k\to+\infty}\theta_k = \lim\limits_{k\to+\infty}\eta_k = 0$.

Пусть $\rho_i(k)$, $i=1,2,$ — собственные числа матрицы Θ_k. Ясно, что

$$\rho_i(k) = 0.5\mathrm{Tr}\Theta_k \mp 0.5\left((\mathrm{Tr}\Theta_k)^2 - 4\mathrm{Det}\Theta_k\right)^{0.5}.$$

Легко видеть, что

$$|\rho_1(k)| = 0.5\lambda^{m_k}\mu^{n_k}|bc|\left|1+\left(\lambda\mu^{-1}\right)^{(n_k-m_k)}+\eta_k+\left[\left(1-\left(\lambda\mu^{-1}\right)^{(n_k-m_k)}\right)^2+\psi_k\right]^{0.5}\right|,$$

где $\lim\limits_{k\to+\infty}\psi_k = 0$.

Ясно, что

$$|\rho_1(k)| = \lambda^{m_k}\mu^{n_k}|bc|q_k,$$

где q_k определяются последними соотношениями. Из условий (9) следует, что q_k положительны, ограничены и отделены от нуля.

Очевидно, что

$$|\rho_2(k)| = |\mathrm{Det}\Theta_k|\,|\rho_1(k)|^{-1},$$

откуда

$$|\rho_2(k)| = \lambda^{n_k}\mu^{m_k}|bc|Q_k,$$

где Q_k положительны, ограничены и отделены от нуля.

Известно, что характеристические показатели $\nu_i(k)$, $i=1,2$, точек u_k определяются как

$$\nu_i(k) = (m_k+n_k+2\omega)^{-1}\ln|\rho_i(k)|.$$

В результате получаем, с учетом условий (2), (9), что для достаточно больших номеров k имеют место следующие неравенства:

$$\nu_1(k) \le -0.25\left(\overline{\gamma}-\gamma\right)(1+\gamma)^{-1}\ln\mu,$$

$$\nu_2(k) \le 0.25(1+\gamma)^{-1}\ln(\lambda\mu).$$

Последние неравенства доказывают теорему.

Литература

1. *Иванов Б. Ф.* Устойчивость траекторий, не покидающих окрестность гомоклинической кривой // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 8. С. 1411–1419.

2. *Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П.* Динамические явления в многомерных системах с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре // Докл. Академии наук. 1993. Т. 330, № 2. С. 144–147.

3. *Гонченко С. В., Шильников Л. П.* О динамических системах с негрубыми гомоклиническими кривыми // Доклады АН СССР. 1986. Т. 286, № 5. С. 1049–1053.

4. *Newhouse Sh.* Diffeomorphisms with infinitely many sinks // Topology. 1973. Vol. 12. P. 9–18.

5. *Васильева Е. В.* Устойчивые периодические точки двумерных диффеоморфизмов класса C^1 // Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2007. Вып. 2. С. 20–26.

6. *Васильева Е. В.* Диффеоморфизмы многомерного пространства с бесконечным множеством устойчивых периодических точек // Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2012. Вып. 3. С. 3–13.

7. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1977. 304 с.

Статья поступила в редакцию 23 августа 2018 г.;
после доработки 13 сентября 2018 г.;
рекомендована в печать 27 сентября 2018 г.

К о н т а к т н а я и н ф о р м а ц и я:

Васильева Екатерина Викторовна — д-р физ.-мат. наук, доц.; ekvas1962@mail.ru

Stability of periodic points of diffeomorphism of a plane in the case of a homoclinic orbit

E. V. Vasileva

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Vasileva E. V. Stability of periodic points of diffeomorphism of a plane in the case of a homoclinic orbit. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2019, vol. 6 (64), issue 1, pp. 44–52. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.103 (In Russian)

We consider a diffeomorphism of a plane into itself with a fixed hyperbolic point at the origin and a non-transversal homoclinic point to it. Periodic points lying in a sufficiently small neighborhood of the homoclinic point are divided into single-pass and multi-pass, depending on the location of the orbit of the periodic point with respect to the orbit of the homoclinic point. From the works of S. Newhouse, L. P. Shil'nikov, B. F. Ivanov and a number of other authors it follows that for a certain method of tangency of the stable and unstable manifold an arbitrarily small neighborhood of the nontransversal homoclinic point can contain an infinite set of stable periodic points, but at least one of the characteristic exponents of these points tends to zero with increasing period. From the previous works of the author it follows that for the other method of tangency of the stable and unstable manifold, an arbitrarily small neighborhood of the nontransversal homoclinic point can contain an infinite set of stable single-pass periodic points. Characteristic exponents of these points are separated from zero. In this paper it is shown that under certain conditions imposed, first of all, on the method of tangency of the stable and unstable manifold, an arbitrarily small neighborhood of the nontransversal homoclinic point can contain a countable set of multi-pass (exactly two-pass) stable periodic points. Characteristic exponents of these points are separated from zero.

Keywords: diffeomorphism of the plane, hyperbolic point, nontransversal homoclinic point, stability.

References

1. Ivanov B. F., "Stability of the Trajectories That Do Not Leave the Neighborhood of a Homoclinic Curve", *Differ. Uravn.* **15**(8), 1411–1419 (1979). (In Russian)

2. Gonchenko S. V., Turaev D. V., Shil'nikov L. P., "Dynamical Phenomena in Multidimensional Systems with a Structurally Unstable Homoclinic Poincare Curve", *Doklady Mathematics* **17**(3), 410–415 (1993).

3. Gonchenko S. V., Shil'nikov L. P., "Dynamical Systems with Structurally Unstable Homoclinic Curve", *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **286**(5), 1049–1053 (1986). (In Russian)

4. Newhouse Sh., "Diffeomorphisms with Infinitely Many Sinks", *Topology* **12**, 9–18 (1973).

5. Vasil'eva E. V., "Stable Periodic Points of Two-dimensional C^1-Diffeomorphisms", *Vestnik St. Petersburg Univ.: Math.* **40**(2), 107–113 (2007).

6. Vasil'eva E. V., "Diffeomorphisms of Multidimensional Space with Infinite Set of Stable Periodic Points", *Vestn. St. Petersburg Univ.: Math.* **45**(3), 115–124 (2012).

7. Pliss V. A., *Integral Sets of Periodic Systems of Differential Equations* (Nauka Publ., Moscow, 1977, 304 p.). (In Russian)

Received: August 23, 2018
Revised: September 13, 2018
Accepted: September 27, 2018

Author's information:

Ekaterina V. Vasileva — ekvas1962@mail.ru