УДК 512.625 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 1
MSC 11S31

Формальные группы над подкольцами кольца целых многомерного локального поля*

А. И. Мадунц, С. В. Востоков, Р. П. Востокова

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Мадунц А. И., Востоков С. В., Востокова Р. П.* Формальные группы над подкольцами кольца целых многомерного локального поля // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 1. С. 88–97. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.106

В работе строятся так называемые кольца сходимости кольца целых многомерного локального поля. Кольцо сходимости — это подкольцо кольца целых, обладающее тем свойством, что любой степенной ряд с коэффициентами из подкольца сходится при подстановке вместо переменной произвольного элемента максимального идеала. Выводятся свойства колец сходимости и явная формула для их построения. Заметим, что многомерный случай принципиально отличается от случая классического (одномерного) локального поля, где кольцом сходимости является все кольцо целых. Далее рассматривается многомерное локальное поле с нулевой характеристикой предпоследнего поля вычетов. Для каждого кольца сходимости такого поля вводится гомоморфизм, позволяющий по степенному ряду с коэффициентами из кольца построить формальную группу над тем же кольцом с логарифмом, имеющем коэффициенты из поля, причем для коэффициентов задается явная формула. Кроме того, по изогении с коэффициентами из кольца сходимости строится обобщение понятия формальной группы Любина—Тейта над этим кольцом, а также изучаются эндоморфизмы данных формальных групп и выводится критерий их изоморфизма. Доказывается взаимно однозначное соответствие между формальными группами, созданными с помощью кольцевого гомоморфизма и с помощью изогении. Также для любого конечного расширения многомерного локального поля с нулевой характеристикой предпоследнего поля вычетов рассматривается группа точек, порожденная соответствующей формальной группой Любина—Тейта.

Ключевые слова: многомерные локальные поля, формальные группы Любина—Тейта, сходимость степенных рядов.

1. Многомерные локальные поля и их топология. Формальные группы над кольцом целых классического локального поля (в частности, группы Любина—Тейта) не только широко применимы, но и допускают различные модификации (см. [1–3]). Однако при обобщении результатов на многомерный случай (см. [4–6]) существенным оказывается факт, что степенной ряд с коэффициентами из кольца целых, вообще говоря, не сходится при подстановке вместо переменной элемента из максимального идеала. В [7] установлено, при каком необходимом и достаточном условии на подмножество кольца целых сходятся всевозможные ряды, коэффициенты которых принадлежат данному подмножеству. Мы построим и изучим кольца с соответствующим свойством, объединение которых дает все кольцо целых.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 16-11-10200).

Приведем уже известные результаты, которые будут использованы далее (подробнее о многомерных локальных полях см. [7–11]).

Прежде всего, напомним, что структура n-мерного локального поля на K — это цепочка полей $K^{(n)} = K$, $K^{(n-1)}$, …, $K^{(1)}$, $K^{(0)}$, где $K^{(i)}$ — полное дискретно нормированное поле с полем вычетов $K^{(i-1)}$, $i = 1, \dots, n$, причем $K^{(0)}$ конечно.

Пусть K — n-мерное локальное поле, $(t_1, \dots, t_n)$ — система его локальных параметров, $\overline{v}_K = \overline{v} = (v^{(1)}, \dots, v^{(n)})$ — многомерное нормирование, $\mathcal{O}_K = \mathcal{O}$ — кольцо целых, а $\wp_K = \wp$ — максимальный идеал этого кольца.

Для поля F, полного относительно дискретного нормирования w, положим

$$F\{\{t\}\} = \left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i t^i : c_i \in F,\ w(c_i) \geq c > -\infty,\ w(c_i) \overset{i \to -\infty}{\longrightarrow} \infty \right\}.$$

Множество $F\{\{t\}\}$ является полем относительно стандартных операций. Пусть

$$v\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i t^i \right) = \min_i w(c_i).$$

Тогда v — дискретное нормирование на $F\{\{t\}\}$, и $F\{\{t\}\}$ превращается в полное поле с полем вычетов $\overline{F}((\overline{t}))$. Таким образом, если F — $(n-1)$-мерное локальное поле, то $F\{\{t\}\}$ — n-мерное локальное поле.

В работе [12] доказана следующая структурная теорема.

Теорема 1.1. *Пусть $K = K^{(n)}$ — n-мерное локальное поле.*

1. Если $\mathrm{char} K = p$, *то* $K \approx \mathbb{F}_q((t_1)) \dots ((t_n))$, *где* $\mathbb{F}_q$ *— конечное поле из* q *элементов.*

2. Если $\mathrm{char} K^{(m-1)} = p$, $\mathrm{char} K^{(m)} = 0$, $2 \leq m \leq n$, *то* K *изоморфно конечному вполне разветвленному расширению поля*

$$k\{\{t_1\}\} \dots \{\{t_{m-1}\}\}((t_{m+1})) \dots ((t_n)),$$

где k *— классическое локальное поле (конечное расширение поля* $\mathbb{Q}_p$*). Кроме того,* K *имеет конечное расширение подобного вида.*

3. Если $\mathrm{char} K^{(1)} = 0$, $\mathrm{char} K^{(0)} = p$, *то* $K \approx k((t_2)) \dots ((t_n))$, *где* $k = K^{(1)}$ *— классическое локальное поле.*

Топология многомерного локального поля подробно описана в [13]. Заметим, что она учитывает топологии полей вычетов. Структурная теорема позволяет в интересующих нас вопросах ограничиться так называемыми стандартными полями: $K = k((t_2)) \dots ((t_n))$ (случай нулевой характеристики поля K_1, подробно разобранный в [5]), $K = \mathbb{F}_q((t_1)) \dots ((t_n))$ (многомерное локальное поле положительной характеристики) или

$$K = k\{\{t_1\}\} \dots \{\{t_{m-1}\}\}((t_{m+1})) \dots ((t_n)),$$

где k — классическое локальное поле нулевой характеристики, а в качестве t_m взяли униформизующую поля k. Первый вариант можно считать частным случаем третьего при $m = 1$, второй — при $m = 1$ и одномерном поле k характеристики p (то есть, $k = \mathbb{F}_q((t_1))$).

Теперь сформулируем доказанный в [7] критерий для подмножества кольца целых многомерного локального поля, позволяющий гарантировать сходимость всевозможных рядов, коэффициенты которых принадлежат данному подмножеству. В [13] он был применен к исследованию сходимости степенных рядов и бесконечных произведений, в виде которых, в частности, можно задавать элементы многомерного локального поля.

Пусть B — полная система представителей в k элементов последнего поля вычетов K. Тогда любое $a \in K$ однозначно представляется в виде

$$a = \sum_{r_n \geq w_n(a)} \sum_{r_{n-1} \geq w_{n-1}(a^{\overline{r}_n})} \cdots \sum_{r_1 \geq w_1(a^{\overline{r}_2})} a^{\overline{r}} t_1^{r_1} \dots t_n^{r_n}, a^{\overline{r}} \in B.$$

Здесь $w_s(a^{\overline{r}_{s+1}})$ — наименьшая степень t_s, имеющая ненулевой коэффициент, т. е. для $s \geq m$ имеем $w_s = v_{K^{(s)}}$. Однако при $s < m$ множество $B((t_1))\dots((t_s))$ не является полем, а соответствующие величины — нормированиями.

Обозначим $\overline{r}_s = (r_s, \dots, r_n), 1 \leq s \leq n$. Для элемента a, формально заданного как

$$a = \sum_{\overline{r}} a^{\overline{r}} t_1^{r_1} \dots t_n^{r_n},$$

при фиксированном $\overline{r}_s$ под $a^{\overline{r}_s}$ будем подразумевать коэффициент при $t_s^{r_s} \dots t_n^{r_n}$, т. е.

$$a^{\overline{r}_s} = \sum_{r_{s-1}} \cdots \sum_{r_1} a^{\overline{r}} t_1^{r_1} \dots t_{s-1}^{r_{s-1}}.$$

Пусть A — некоторое подмножество поля K. Тогда все ряды

$$c(X) = \sum_{m \geq 1} c_m X^m$$

с коэффициентами из A сходятся при подстановке вместо X произвольного элемента максимального идеала $\wp$ в том и только в том случае, когда выполнена следующая совокупность условий:

$$\inf_{a \in A} w_n(a) = I_n > -\infty;$$

для любого $s = n-1, \dots, 1$ при всех $\overline{r}_{s+1}$ имеем

$$\inf_{a \in A} w_s(a^{\overline{r}_{s+1}}) = I_s(\overline{r}_{s+1}) > -\infty.$$

Заметим, что все кольцо целых поля K не обладает нужным свойством — например, для $n = 2$ ряд $\sum_{m \geq 0} t_2 t_1^{-m} X^m$ расходится при $X = t_1$.

Докажем следующее важное утверждение.

Теорема 1.2. *Кольца вида*

$$A = \left\{ a = \sum_{r_n \geq I_n} \sum_{r_{n-1} \geq I_{n-1}(r_n)} \cdots \sum_{r_1 \geq I_1(r_2, \dots, r_n)} a^{\overline{r}} t_1^{r_1} \dots t_n^{r_n}, a^{\overline{r}} \in B \right\},$$

где $I_s(\overline{i}_{s+1}) + I_s(\overline{j}_{s+1}) = I_s(\overline{i}_{s+1} + \overline{j}_{s+1}), I_s(0, \ldots, 0) = 0$, *обладают тем свойством, что все ряды*

$$c(X) = \sum_{m \geq 1} c_m X^m$$

с коэффициентами $\mathbf{c}_m \in A$ *сходятся при подстановке вместо* X *произвольного элемента максимального идеала* $\wp$. *Будем называть эти кольца кольцами сходимости. По любому набору*

$$l_{ks} \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad 1 \leq k \leq s \leq n,$$

можно построить некоторое кольцо сходимости, причем $B \subset A$ *и* A *имеет образующие вида* $t_n^{r_n} \ldots t_1^{r_1}, r_s \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Выберем B, содержащее 0 и 1, и будем искать кольцо A такое, что все ряды

$$c(X) = \sum_{m \geq 1} c_m X^m$$

с коэффициентами из A сходятся при подстановке вместо X произвольного элемента максимального идеала $\wp$, причем $B \subset A$ и A имеет образующие вида $t_n^{r_n} \ldots t_1^{r_1}$, $r_s \in \mathbb{Z}$.

Поскольку $t_n^{r_n} \ldots t_{s+1}^{r_{s+1}} \in A$ можно записать как $t_n^{r_n} \ldots t_{s+1}^{r_{s+1}} t_s^0 \in A$, получаем $I_s(r_{s+1}, \ldots, r_n) \leq 0$ при всех подходящих $r_{s+1}, \ldots, r_n$.

При условии $t_n^{r_n} \ldots t_1^{r_1} \in A$ по мультипликативной замкнутости верно $t_n^{kr_n} \ldots t_1^{kr_1} \in A$ всех натуральных k. Поэтому $kI_n \geq I_n$ и $I_n \geq 0$. Аналогично при $1 \leq s \leq n-1$ получаем $kI_s(0, \ldots, 0) \geq I_s(0, \ldots, 0)$. Следовательно, $I_n = 0, I_s(0, \ldots, 0) = 0$ для $1 \leq s \leq n-1$.

Условие $1 > I_1(0, \ldots, 0) = 0$ дает $t_1 \in A$, а из $1 > I_2(0, \ldots, 0) = 0$ следует $t_2 t_1^{-l_{12}} \in A, l_{12} = -I_1(1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Продолжая процесс, получаем $\tilde{t}_s = t_s t_{s-1}^{-l_{s-1s}} \ldots t_1^{-l_{1s}} \in A$, где

$$a_{ks} = -I_k(-l_{k+1s}, \ldots, -l_{s-1s}, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

при $k < s$, причем $l_{s-1s} = -I_{s-1}(1, 0, \ldots, 0)$.

Заметим, что по мультипликативности $t_s \in A, 1 \leq s \leq n$, а также из

$$t_n^{i_n} \ldots t_{s+1}^{i_{s+1}} t_s^{I_s(\overline{i}_{s+1})} \in A, \quad t_n^{j_n} \ldots t_{s+1}^{j_{s+1}} t_s^{I_s(\overline{j}_{s+1})} \in A$$

следует $t_n^{i_n + j_n} \ldots t_{s+1}^{i_{s+1} + j_{s+1}} t_s^{I_s(\overline{i}_{s+1} + \overline{j}_{s+1})} \in A$, что дает

$$I_s(\overline{i}_{s+1}) + I_s(\overline{j}_{s+1}) \geq I_s(\overline{i}_{s+1} + \overline{j}_{s+1}).$$

Итак,

$$A = \left\{ a = \sum_{r_n \geq I_n} \sum_{r_{n-1} \geq I_{n-1}(r_n)} \cdots \sum_{r_1 \geq I_1(r_2, \ldots, r_n)} a^{\overline{r}} t_1^{r_1} \ldots t_n^{r_n}, a^{\overline{r}} \in B \right\},$$

где

$$I_s(\overline{i}_{s+1}) + I_s(\overline{j}_{s+1}) \geq I_s(\overline{i}_{s+1} + \overline{j}_{s+1}), \quad I_s(0, \ldots, 0) = 0$$

(в частности, A содержится в кольце целых поля K).

Положим $I_s(\bar{i}_{s+1}+\bar{j}_{s+1}) = I_s(\bar{i}_{s+1}) + I_s(\bar{j}_{s+1})$. В этом случае непосредственным вычислением можно вывести рекуррентную формулу

$$I_s(\overline{r}_{s+1}) = -l_{ss+1}(r_{s+1} - I_{s+1}(\overline{r}_{s+2})) - \dots - l_{sn-1}(r_{n-1} - I_{n-1}(r_n)) - l_{sn}r_n,$$

где $I_{n-1}(r_n) = -l_{n-1n}r_n$.

Индукцией можно получить также явную формулу

$$\begin{aligned} I_s(\overline{r}_{s+1}) = -l_{ss+1}r_{s+1} - (l_{ss+2} + l_{ss+1}l_{s+1s+2})r_{s+2} - \dots - \\ - (l_{sn} + l_{ss+1}l_{s+1n} + \dots + l_{sn-1}l_{n-1n} + l_{ss+1}l_{s+1s+2}l_{s+2n} + \dots + \\ + l_{ss+1}l_{s+1s+2}\dots l_{n-1n})r_n. \end{aligned}$$

Таким образом, любое $t_1^{r_1}\dots t_n^{r_n} \in A$ представляется в виде произведения фиксированных элементов из A в неотрицательных степенях:

$$\begin{aligned} t_1^{r_1}\dots t_n^{r_n} = (t_n t_{n-1}^{-ln-1n}\dots t_1^{-l_{1n}})^{r_n} \times \\ \times (t_{n-1}t_{n-2}^{-ln-2n-1}\dots t_1^{-l_{1n-1}})^{r_{n-1}-I_{n-1}(r_n)}\dots (t_2 t_1^{-l_{12}})^{r_2 - I_2(r_3,\dots,r_n)} t_1^{r_1 - I_1(r_2,\dots,r_n)}. \end{aligned}$$

Следовательно, $A = B[[\tilde{t}_1,\dots,\tilde{t}_n]]$, где $\tilde{t}_1 = t_1,\dots,\tilde{t}_n = t_n t_{n-1}^{-ln-1n}\dots t_1^{-l_{1n}}$, — новые локальные параметры, лежащие в A.

Данные формулы позволяют также по любому набору

$$l_{ks} \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \quad 1 \le k \le s \le n,$$

построить функции $I_s(\overline{r}_{s+1})$ со свойством

$$I_s(\bar{i}_{s+1}+\bar{j}_{s+1}) = I_s(\bar{i}_{s+1}) + I_s(\bar{j}_{s+1}),$$

а по ним — соответствующее кольцо сходимости. □

2. Формальные группы Любина—Тейта над кольцами сходимости (случай нулевой характеристики предпоследнего поля вычетов). Пусть теперь K — многомерное локальное поле с предпоследним полем вычетов характеристики ноль, т. е. $K \approx k((t_2))\dots((t_n))$, где $k = K^{(1)}$ — классическое локальное поле с униформизующей π. В этом случае кольца сходимости, введенные в предыдущем пункте, имеют вид

$$A = \mathcal{O}_k[[\tilde{t}_2]]\dots[[\tilde{t}_n]],$$

где $\tilde{t}_2 = t_2\pi^{-l_{12}},\dots,\tilde{t}_n = t_n t_{n-1}^{-ln-1n}\dots t_1^{-l_{1n}}$.

Обозначим через σ эндоморфизм поля K, тождественный на k и действующий по формуле

$$\Big(\sum_{\overline{r}} a^{\overline{r}}\pi^{r_1}\dots t_n^{r_n}\Big)^{\sigma} = \sum_{\overline{r}} a^{\overline{r}}\pi^{r_1}t_2^{r_2 q}\dots t_n^{r_n q}.$$

Заметим, что в случае нулевой характеристики предпоследнего поля вычетов σ является кольцевым гомоморфизмом колец сходимости, т. е. переводит A в A.

Главный идеал $\mathfrak{B} = (\pi)$ кольца A обладает следующими свойствами:

$$a^{\sigma} \equiv a^q \mod \mathfrak{B}, \quad p \in \mathfrak{B}, \quad \frac{1}{\pi}\mathfrak{B} \subset A.$$

Для любого ряда $g(X) = \sum_{i\ge1} a_i X^i, a_i \in A$, положим $g^{\sigma}(X) = \sum_{i\ge1} a_i^{\sigma} X^i$.

При этих условиях применима функциональная лемма из работы Хазевинкеля [14].

Лемма 2.1. *1. Для любого ряда $g(X) \in XA[[X]]$ существует единственный ряд $\lambda_g(X) \in K[[X]]$ такой, что $\lambda_g(X) = g(X) + \frac{1}{\pi}\lambda_g^\sigma(X^q)$, причем*

$$F(X,Y) = \lambda_g^{-1}(\lambda_g(X) + \lambda_g(Y)) \in A[[X,Y]].$$

При $g(X) \equiv X \bmod \deg 2$ ряд $F(X,Y)$ является формальной группой, а $\lambda_g(X)$ — ее логарифмом.

2. Для любых $\lambda_{g_1}(X), \lambda_{g_2}(X)$ таких, что

$$\lambda_{g_1}(X) = g_1(X) + \frac{1}{\pi}\lambda_{g_1}^\sigma(X^q), \lambda_{g_2}(X) = g_2(X) + \frac{1}{\pi}\lambda_{g_2}^\sigma(X^q)$$

и первый коэффициент ряда $g_1(X)$ обратим, имеем

$$\lambda_{g_1}^{-1}(\lambda_{g_2}(X)) \in A[[X]].$$

3. Для любых $g_1(X), h(X) \in XA[[X]]$ существует единственный ряд $g_2(X) \in XA[[X]]$ такой, что $\lambda_{g_1}(h(X)) = \lambda_{g_2}(X)$.

4. Для любых $\alpha(X), \beta(X) \in A[[X]]$ имеем

$$\alpha(X) \equiv \beta(X) \bmod \pi^s \Leftrightarrow \lambda(\alpha(X)) \equiv \lambda(\beta(X)) \bmod \pi^s.$$

5. Пусть $G(X,Y)$ — произвольная формальная группа, а $F(X,Y)$ — формальная группа, логарифм которой удовлетворяет функциональному уравнению $\lambda_g(X) = g(X) + \frac{1}{\pi}\lambda_g^\sigma(X^q)$. Тогда F и G изоморфны в том и только том случае, когда логарифм G удовлетворяет функциональному уравнению того же типа, причем в этом случае изоморфизм строгий.

Непосредственным вычислением можно проверить следующее утверждение.

Предложение 2.2. *Пусть $g(X) = X + \sum_{i>1} b_i X^i, \lambda_g(X) = X + \sum_{i>1} c_i X^i$. Тогда если $q \nmid i$, то $c_i = b_i$, а если*

$$q^m \mid i, q^{m+1} \nmid i,$$

то

$$c_i = b_i + \frac{1}{\pi} b_{i/q}^\sigma + \frac{1}{\pi^2} b_{i/q^2}^{\sigma^2} \cdots + \frac{1}{\pi^m} b_{i/q^m}^{\sigma^m}.$$

Заметим, что λ_g^σ и $\pi\lambda_g$ удовлетворяют функциональному уравнению одного типа. Положим $l(X) = (\lambda_g^\sigma)^{-1}(\pi\lambda_g(X))$, где $g(X) \equiv X \bmod \deg 2$. Тогда

$$l(X) \in A[[X]], \quad l(X) \equiv X^q \bmod \mathfrak{B}, \quad l(X) \equiv \pi X \bmod \deg 2.$$

Введем множество

$$\mathcal{F}_\pi = \{f(X) \in A[[X]] : f(X) \equiv X^q \bmod \mathfrak{B}, f(X) \equiv \pi X \bmod \deg 2\}.$$

Аналогично случаю классической формальной группы Любина—Тейта (см. [1, 15]) доказывается следующее утверждение.

Лемма 2.3. *Для любых* $f(X), g(X) \in \mathcal{F}_\pi$ *и* $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathcal{O}_k$ *существует единственный ряд*

$$F(X_1, \ldots, X_s) \in A[[X_1, \ldots, X_s]]$$

такой, что $F(X_1, \ldots, X_s) \equiv \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_s X_s \bmod \deg 2$ *и*

$$f(F(X_1, \ldots, X_s)) = F^\sigma(g(X_1), \ldots, g(X_s)).$$

Следствие 2.3.1. *Для любого* $f(X) \in \mathcal{F}_\pi$ *существует единственная формальная группа* $F_f(X, Y)$ *над* A*, для которой* $f(X) \in \mathrm{Hom}(F, F^\sigma)$ *(то есть,* $f \circ F_f = F_f^\sigma \circ f$*).*

Определение 2.4. Формальную группу F_f, полученную таким образом, назовем *формальной группой Любина—Тейта над* A, а $f(X)$ — ее *изогенией.* Формальную группу F_0, ассоциированную с

$$f_0(X) = \pi X + X^q,$$

назовем *базисной.*

Следствие 2.4.1. *Для любых* $f(X), g(X) \in \mathcal{F}_\pi$ *и каждого* $\alpha \in \mathcal{O}_k$ *существует единственный ряд* $[\alpha]_{f,g}(X) \in A[[X]]$ *такой, что*

$$[\alpha]_{f,g}(X) \equiv \alpha X \bmod \deg 2$$

и

$$[\alpha]_{f,g}^\sigma \circ g = f \circ [\alpha]_{f,g}.$$

При этом $[\alpha]_{f,g}(X) \in \mathrm{Hom}(F_g, F_f)$.

Для соответствующих $[\alpha]_{f,g}, [\beta]_{g,h}$ верно $[\alpha]_{f,g} \circ [\beta]_{g,h} = [\alpha\beta]_{f,h}$, а для $[\alpha]_{f,g}, [\beta]_{f,g}$ имеем

$$[\alpha]_{f,g} +_F [\beta]_{f,g} = [\alpha + \beta]_{f,g},$$

где под $([\alpha]_{f,g} +_F [\beta]_{f,g})(X)$ подразумевается $F_f([\alpha]_{f,g}(X), [\beta]_{f,g}(X))$.

Таким образом, отображение $\alpha \to [\alpha]_{f,g}$ является вложением $\mathcal{O}_k$ в кольцо $\mathrm{Hom}(F_g, F_f)$.

Теорема 2.5. *Формальные группы Любина—Тейта над* A *находятся во взаимно-однозначном соответствии с формальными группами, полученными применением леммы 2.1.*

Доказательство. Уже было проверено, что для произвольного

$$g(X) \in XA[[X]], \quad g(X) \equiv X \bmod \deg 2$$

имеем $f(X) = (\lambda^\sigma)^{-1}(\pi\lambda(X)) \in \mathcal{F}_\pi$. Кроме того, $f(X) \in \mathrm{Hom}_A(F, F^\sigma)$. По единственности в лемме 2.3 формальная группа $F(X, Y)$ совпадает с $F_f(X, Y)$.

Теперь выберем любое $h(X) \in \mathcal{F}_\pi$. По следствию леммы 2.3 существует

$$[1]_{f,h} \in \mathrm{Hom}_A(F_h, F_f).$$

Но $\lambda_f^{-1}(\lambda_h(X)) \equiv X \bmod \deg 2$, причем $\lambda_f^{-1}(\lambda_h) \in \mathrm{Hom}_A(F_h, F_f)$. Значит, $\lambda_h = \lambda([1]_{f,h})$, что по лемме 2.1 дает $\lambda_h = \lambda_{g_1}$. □

Замечание 2.5.1. Аналогично получаем, что $[\alpha](X) = \lambda^{-1}(\alpha\lambda(X))$. Кроме того, легко видеть, что формальные группы Любина—Тейта изоморфны над A тогда и только тогда, когда их изогении принадлежат одному семейству $\mathcal{F}_\pi$.

Фиксируем A — кольцо сходимости поля K, и выберем $F_f(X,Y)$ — формальную группу Любина—Тейта над A. Пусть L — конечное расширение K (в нашем случае $L = L_1((T_2))\dots((T_n))$, где L_1 — конечное расширение локального поля k и $\overline{v}_L(t_s) = (0, \dots, e_s, \dots, 0)$). Легко видеть, что A является также кольцом сходимости для поля L.

Введем операции формального сложения элементов $x, y \in \wp_L$, где $\wp_L$ — максимальный идеал поля L: $x +_F y = F_f(x,y)$ и умножения элемента $x \in \wp_L$ на элемент $\alpha \in \mathcal{O}_k$: $\alpha \cdot_F x = [\alpha]_f(x)$.

Множество $\wp_L$ с данными операциями назовем группой точек (она имеет структуру $\mathcal{O}_k$-модуля). Таким образом, для колец описанного вида получено обобщение понятий формальных групп Любина—Тейта и группы точек.

Заметим, что в случае классических (одномерных) локальных полей ситуация гораздо проще. Там кольцом сходимости является все кольцо целых, что позволяет строить бесконечные формальные суммы для различных типов формальных групп и, в частности, вывести явную формулу для построения символа Гильберта (см. [1] и [16]).

Литература

1. *Lubin J., Tate J.* Formal complex multiplication in local fields // Ann. of Math. 1985. Vol. 81, № 2. P. 380–387.

2. *Madunts A. I.* Formal Modules for Relative Formal Lubin—Tate Groups // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2018. Vol. 232. P. 704–716.

3. *Shalite E.* Relative Lubin—Tate groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1985. Vol. 95, № 1. P. 1–4.

4. *Madunts A. I.* Classification of Generalized Formal Lubin—Tate Groups over Multidimensional Local Fields // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2018. Vol. 234. P. 175–179.

5. *Афанасьева С. С.* Символ Гильберта в многомерных локальных полях для формальной группы Любина—Тейта. 2 // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2013. Т. 413. С. 26–44.

6. *Мадунц А. И.* Формальные группы Любина—Тейта над кольцом целых многомерного локального поля // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2001. Т. 281. С. 221–226.

7. *Мадунц А. И.* Сходимость последовательностей и рядов в многомерных полных полях. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Санкт-Петербург. 1995. С. 1–14.

8. *Жуков И. Б.* Абелевы расширения и топологические K-группы многомерных локальных полей. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Санкт-Петербург, 1991. С. 1–14.

9. *Паршин А. Н.* К арифметике двумерных схем. I. Распределения и вычеты // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. Т. 40. С. 736–773.

10. *Фесенко И. Б.* Теория полей классов многомерных локальных полей нулевой характеристики с полем вычетов положительной характеристики // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. С. 165–196.

11. *Фесенко И. Б.* Теория локальных полей. Локальная теория полей классов. Многомерная локальная теория полей классов // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4. С. 403–438.

12. *Жуков И. Б.* Структурная теорема для полных полей // Труды Санкт-Петерб. Мат. общ. 1994. Т. 3. С. 215–234.

13. *Жуков И. Б., Мадунц А. И.* Аддитивные и мультипликативные разложения в многомерных локальных полях // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2000. Т. 272. С. 186–196.

14. *Hazewinkel M.* Formal groups and applications. New-York: Academic press, 1978. 573 p.

15. *Ивасава К.* Локальная теория полей классов. М.: Мир, 1983. 180 с.

16. *Шафаревич И. Р.* Общий закон взаимности // Матем. сб. 1950. Т. 26, №1. С. 113–146.

Статья поступила в редакцию 28 июня 2018 г.;
после доработки 30 августа 2018 г.;
рекомендована в печать 27 сентября 2018 г.

Контактная информация:

Мадунц Александра Игоревна — старший преподаватель; madunts@mail.ru;
Востоков Сергей Владимирович — д-р физ.-мат. наук, проф.; s.vostokov@spbu.ru
Востокова Регина Петровна — канд. физ.-мат. наук, доц.; rvostokova@yandex.ru

Formal groups over sub-rings of the ring of integers of a multidimensional local field

A. I. Madunts, S. V. Vostokov, R. P. Vostokova

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Madunts A. I., Vostokov S. V., Vostokova R. P. Formal groups over sub-rings of the ring of integers of a multidimensional local field. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2019, vol. 6 (64), issue 1, pp. 88–97. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.106 (In Russian)

In the work we construct so-called convergence rings for the ring of integers of a multidimensional local field. The convergence ring is a sub-ring of the ring of integers having the property that any power series with coefficients from the sub-ring converges when replacing a variable on an arbitrary element of the maximum ideal. The properties of convergence rings and an explicit formula for their construction are derived. Note that the multidimensional case is fundamentally different from the case of the classical (one-dimensional) local field, where the convergence ring is the whole ring of integers. Next, we consider a multidimensional local field with zero characteristic of the penultimate residue field. For each convergence ring of such a field, we introduce a homomorphism that allows for a power series with coefficients from the ring to construct a formal group over the same ring with a logarithm having coefficients from the field, and we give an explicit formula for the coefficients. In addition, we constructe a generalization of the formal Lubin—Tate group over this ring, study the endomorphisms of these formal groups and derive a criterion for their isomorphism. We prove a one-to-one correspondence between formal groups created by ring homomorphism and by isogeny. Also for any finite extension of a multidimensional local field with zero characteristic of the penultimate residue field, we considere the point group generated by the corresponding Lubin—Tate formal group.

Keywords: multidimensional local field, Lubin—Tate formal group, convergence of power series.

References

1. Lubin J., Tate J., “Formal complex multiplication in local fields”, *Ann. of Math.* **81**(2), 380–387 (1985).

2. Madunts A. I., “Formal Modules for Relative Formal Lubin—Tate Groups”, *Journal of Mathematical Sciences (United States)* **232**, 704–716 (2018).

3. de Shalite E., “Relative Lubin—Tate groups”, *Proc. Amer. Math. Soc.* **95**(1), 1–4 (1985).

4. Madunts A. I., “Classification of Generalized Formal Lubin-Tate Groups over Multidimensional Local Fields”, *Journal of Mathematical Sciences (United States)* **234**, 175–179 (2018).

5. Afanas’eva S. S., “The Hilbert symbol in multidimensional complete fields for formal Lubin—Tate groups. 2”, *Zap. Nauchn. Semin. POMI* **413**, 26–44 (2013).

6. Madunts A. I., “Formal Lubin—Tate groups over the ring of integers of a multidimensional local field”, *Zap. Nauchn. Semin. POMI* **281**, 221–226 (2001).

7. Madunts A. I., *Convergence of sequences and series in multidimensional complete fields*, 1–14 (Author’s summary of the PhD Thesis, St. Petersburg, 1995).

8. Zhukov I., *Abelian extensions and topological K-groups of multidimensional local fields*, 1–14 (Author’s summary of the PhD Thesis, St. Petersburg, 1991).

9. Parsin A. N., “On the arithmetic of two-dimensional schemes. I. Distributions and deductions”, *Mathematics of the USSR-Izvestiya* **40**, 736–773 (1976).

10. Fesenko I. B., “Class field theory of multidimensional local fields of characteristic 0 with residue field of positive characteristic”, *Algebra and analysis* **3**(3), 165–196 (1991).

11. Fesenko I. B., “The theory of local fields. Local Class Field Theory. Multidimensional local class field theory”, *Algebra and analysis* **4**, 403–438 (1992).

12. Zhukov I., “Structural theorem for complete fields”, *Trudy SPb Mat. Obshch.* **3**, 215–234 (1994).

13. Zhukov I., Madunts A. I., “Additive and Multiplicative Expansions in Multidimensional Local Fields”, *Zap. Nauchn. Semin. POMI* **272**, 186–196 (2000).

14. Hazewinkel M., *Formal groups and applications* (Academic press, New York, 1978, p. 573).

15. Iwasawa K., *Local Class Field Theory* (Russian translation, Mir Publ., Moscow, 1983, p. 180).

16. Shafarevich I. R., “The general reciprocity law”, In: *Mat. Sb.* **26(68)**(1), 113–146 (1950).

Received: June 28, 2018
Revised: August 30, 2018
Accepted: September 27, 2018

Author’s information:

Aleksandra I. Madunts — madunts@mail.ru
Sergey V. Vostokov — s.vostokov@spbu.ru
Regina P. Vostokova — rvostokova@yandex.ru