УДК 519.2 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 1
MSC 62G32

# О распределениях сумм рекордных величин*

*В. Б. Невзоров*[1], *А. В. Степанов*[2]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
[2] Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта,
Российская Федерация, 236041, Калининград, ул. А. Невского, 14

**Для цитирования:** *Невзоров В. Б., Степанов А. В.* О распределениях сумм рекордных величин // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 1. С. 110–117. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.108

В данной работе рассматриваются нижние и верхние рекордные величины, полученные из последовательности независимых равномерно распределенных на интервале [0,1] случайных величин. Приводятся представления, связывающие такие величины с суммами и произведениями независимых одинаково распределенных случайных величин. С помощью данных представлений исследуются распределения и моментные характеристики нижних и верхних рекордных величин, полученных из равномерных выборок. В работе также рассматриваются последовательные суммы нижних рекордных величин. Исследуются функции распределения и преобразования Лапласа таких сумм. В работе ищется преобразование Лапласа ряда, состоящего из нижних рекордных величин, взятых из равномерной совокупности. В работе также сравниваются последовательные суммы минимальных порядковых статистик и рекордных величин, содержащихся в равномерной выборке.

*Ключевые слова*: рекордные величины, суммы рекордов, предельные распределения сумм нижних рекордных величин, равномерное распределение.

**1. Введение.** Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин (с. в.), имеющих общую непрерывную функцию распределения (ф. р.) $F(x)$. По набору с. в. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $(n \geq 1)$ построим вариационный ряд $X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq \ldots \leq X_{n,n}$, члены которого назовем порядковыми статистиками. Пользуясь исходной последовательностью с. в. $X_1, X_2, \ldots$, определим верхние рекордные моменты $L(n)$ $(n \geq 1)$ и верхние рекордные величины $X(1) < X(2) < \ldots < X(n) < \ldots$ следующим образом:

$$L(1) = 1, \quad X(1) = X_1,$$

$$L(n) = \min\left\{j : j > L(n-1),\, X_j > X_{L(n-1)}\right\}, \quad X(n) = X_{L(n)}\ (n \geq 2). \tag{1.1}$$

Аналогично (при помощи замены в (1.1) знака во втором неравенстве на противоположный) определяются нижние рекордные моменты $l(n)$ $(n \geq 1)$ и нижние рекордные величины $x(1) > x(2) > \ldots > x(n) > \ldots$ Отметим, что при каждом фиксированном $n = 1, 2, \ldots$ распределения рекордных моментов $l(n)$ и $L(n)$ совпадают. Что касается распределений рекордных величин, то здесь результаты для верхних рекордов сразу получаются из соответствующих результатов для нижних, если вместо исходных с. в. $X_k$ $(k \geq 1)$ рассматривать величины $Y_k = -X_k$ $(k \geq 1)$. Верно и обратное, если некоторые соотношения получены для верхних рекордных величин,

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-01-00393).

то переход от с. в. $X_k$ к $Y_k = -X_k$ позволяет переформулировать эти соотношения для нижних рекордов. Поэтому достаточно исследовать подробно лишь один из этих типов случайных величин. Схожая ситуация наблюдается для минимальных и максимальных порядковых статистик. Результаты, выведенные для одних из них, позволяют легко получать результаты для других. Подробное изложение теории порядковых статистик и рекордов можно найти в монографиях [1–7].

Отметим, что упорядоченные рекордные величины $X(1) < X(2) < \ldots < X(n) \ldots$ и $x(1) > x(2) > \ldots > x(n) \ldots$ теряют важное свойство независимости, позволяющее использовать методы и схемы, разработанные для последовательностей независимых с. в. В то же время, несмотря на упомянутый выше «недостаток» (отсутствие свойства независимости), рекорды весьма популярны в теории вероятностей и математической статистике. С ними приходится иметь дело при решении различных прикладных задач, связанных, например, с метеорологией, гидрологией, страхованием, спортивной статистикой. Для облегчения работы с рекордами эти зависимые случайные величины часто представляют в виде сумм или произведений независимых случайных величин.

Для таких представлений используются величины, имеющие стандартное $U(0,1)$-равномерное распределение с ф. р. $Q(x) = x$ $(0 < x < 1)$ и стандартное $E(1)$-экспоненциальное распределение с ф. р. $H(x) = \max\{0, 1-e^{-x}\}$ $(-\infty < x < \infty)$. Пусть $U_1, U_2, \ldots$ и $Z_1, Z_2, \ldots$ — последовательности с. в. с функциями распределений $Q(x)$ и $H(x)$ соответственно. Пусть $U(1) < U(2) < \ldots$ и $Z(1) < Z(2) < \ldots$ — верхние рекордные величины, соответствующие этим последовательностям, а $u(1) > u(2) > \ldots$ — нижние рекордные величины в последовательности $U_1, U_2, \ldots$ Для представления рекордных величин в виде сумм или произведений независимых случайных величин часто используется вероятностное интегральное преобразование Смирнова. Данное преобразование позволяет записать стандартную равномерно распределенную с. в. $U$ в виде $U \stackrel{d}{=} F(X)$, где $X$ — некоторая с. в. с непрерывной ф. р. $F(x)$, а $X \stackrel{d}{=} Y$ — обозначение равенства распределений с. в. $X$ и $Y$. Если $G(x)$ является функцией, обратной к ф. р. $F(x)$, т. е. $G(s) = \inf\{x : F(x) \geq s\}$, то справедливо равенство $X \stackrel{d}{=} G(U)$.

Преобразование Смирнова, примененное к с. в. $X_1, X_2, \ldots$, не нарушает порядка этих величин. Отсюда для любого $n \geq 1$ и любой непрерывной ф. р. $F(x)$ вытекает справедливость следующих векторных равенств:

$$\{F(X(1)), F(X(2)), \ldots, F(X(n))\} \stackrel{d}{=} \{U(1), U(2), \ldots, U(n)\},$$

$$\{X(1), X(2), \ldots, X(n)\} \stackrel{d}{=} \{G(U(1)), G(U(2)), \ldots, G(U(n))\}.$$

Использование равномерных рекордов $U(n)$ и $u(n)$ позволяет при любом $n \geq 1$ соответствующим образом связать верхние и нижние рекорды, построенные по последовательностям $X_1, X_2, \ldots$ с некоторой непрерывной ф. р. $F(x)$ и $Y_1, Y_2, \ldots$ со стандартной экспоненциальной ф. р. $H(x)$:

$$\{F(X(1)), F(X(2)), \ldots, F(X(n))\} \stackrel{d}{=} \{U(1), U(2), \ldots, U(n)\} \stackrel{d}{=}$$
$$\stackrel{d}{=} \{H(Y(1)), H(Y(2)), \ldots, H(Y(n))\},$$

$$\{F(x(1)), F(x(2)), \ldots, F(x(n))\} \stackrel{d}{=} \{u(1), u(2), \ldots, u(n)\} \stackrel{d}{=}$$
$$\stackrel{d}{=} \{H(y(1)), H(y(2)), \ldots, H(y(n))\}.$$

В приведенных равенствах $Y(m)$ и $y(m)$ $(m \geq 1)$ обозначают верхние и нижние рекордные величины в последовательности $Y_1, Y_2, \ldots$

Несмотря на возможность получения результатов для равномерных рекордов $U(1), U(2), \ldots$ и дальнейшего переноса этих результатов на с. в. $X(1), X(2), \ldots$, оказывается, что удобнее брать в качестве исходной последовательности экспоненциальные с. в. $Z_1, Z_2 \ldots$ с ф. р. $H(x)$ и иметь дело с экспоненциальными рекордными величинами $Z(1) < Z(2) < \ldots$ Дело в том, что для этих рекордов при любом $n \geq 1$ справедливо важное соотношение

$$\{Z(1), Z(2), \ldots, Z(n)\} \stackrel{d}{=} \{\xi_1, \xi_1 + \xi_2, \ldots, \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n\}, \tag{1.2}$$

в котором $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые величины, имеющие стандартное экспоненциальное распределение. Для нижних рекордных величин удобнее уже работать с набором $u(1) = U_1 > u(2) > \ldots$ Некоторые соответствующие результаты для этих случайных величин представлены в работе [8]. Ниже нас будут интересовать распределения и моменты сумм равномерных рекордов.

**2. Распределения и моментные характеристики рекордов в последовательностях равномерных случайных величин.** Покажем, что рекорды, полученные из последовательности равномерно распределенных с. в. $U_1, U_2, \ldots$, удобно записывать в виде произведений независимых случайных сомножителей. Действительно, принимая во внимание преобразование Смирнова и соотношение (1.2), для верхних рекордных величин получаем

$$U(n) \stackrel{d}{=} 1 - e^{-Z(n)} \stackrel{d}{=} 1 - \prod_{k=1}^{n} e^{-\xi_k} \stackrel{d}{=} 1 - \prod_{k=1}^{n}(1 - U_k) \stackrel{d}{=} 1 - \prod_{k=1}^{n} U_k \quad (n \geq 1).$$

Более того, соответствующий результат для этих рекордов справедлив и в векторном виде:

$$\{U(1), U(2), \ldots, U(n)\} \stackrel{d}{=} \{1 - U_1, 1 - U_1U_2, \ldots, 1 - U_1U_2 \ldots U_n\}. \tag{2.1}$$

Учитывая симметрию стандартного равномерного распределения относительно его медианы, равной $1/2$, можно уже из (2.1) получить для нижних рекордов следующее равенство:

$$\{u(1), u(2), \ldots, u(n)\} \stackrel{d}{=} \{U_1,\ U_1U_2,\ \ldots,\ U_1U_2 \ldots U_n\} \quad (n \geq 1). \tag{2.2}$$

Откуда следует, в частности, что

$$Eu(n) = E(1 - U(n)) = \prod_{k=1}^{n} EU_i = 2^{-n} \quad (n \geq 1),$$

$$Eu^2(n) = E(1 - U(n))^2 = 3^{-n} \quad (n \geq 1),$$

$$Du(n) = DU(n) = 3^{-n} - 4^{-n} \quad (n \geq 1).$$

Пользуясь равенством

$$\log u(n) \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{n} \log U_k \stackrel{d}{=} -(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)\ (n \geq 1)$$

и тем фактом, что сумма $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ имеет Гамма-распределение с параметром $n$, получаем, что

$$\begin{aligned} P(u(n) < x) &= P(-\log u(n) > -\log x) = \\ &= P(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n > -\log x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{-\log x}^{\infty} y^{n-1} e^{-y} dy \end{aligned}$$

и, соответственно,

$$\begin{aligned} P(U(n) < x) &= P(1 - u(n) < x) = \\ &= P(u(n) > 1 - x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{0}^{-\log(1-x)} y^{n-1} e^{-y} dy. \end{aligned}$$

**3. Суммы последовательных нижних рекордных величин.** В статье уже отмечалось, что при работе с верхними рекордами удобно оперировать со с. в. $Z_1, Z_2, \ldots$, имеющими стандартное экспоненциальное распределение, и соответствующими рекордными величинами $Z(1) < Z(2) < \ldots$ При исследовании сумм $W(n) = Z(1) + Z(2) + \ldots + Z(n)$ также можно воспользоваться равенством

$$W(n) \stackrel{d}{=} n\xi_1 + (n-1)\xi_2 + \ldots + 2\xi_{n-1} + \xi_n.$$

Отсюда находим, что

$$EW(n) = n + (n-1) + \ldots + 2 + 1 = n(n+1)/2$$

и

$$DW(n) = n^2 + (n-1)^2 + \ldots + 4 + 1 = n(n+1)(2n+1)/6.$$

Случайные величины $(n-i+1)\xi_i$ $(1 \leq i \leq n)$ независимы и имеют экспоненциальные функции распределения $H_i(x) = \max\{0, 1 - e^{-x/(n-i+1)}\}$ $(-\infty < x < \infty)$. К их суммам можно применять центральную предельную теорему и получать, в частности, следующее асимптотическое соотношение

$$\sup_x \left| P\left(\frac{W(n) - EW(n)}{\sqrt{DW(n)}} < x\right) - \Phi(x)\right| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$ — стандартная нормальная функция распределения.

Рассмотрим ситуацию с суммированием нижних рекордов в последовательности стандартных равномерных с. в. $U_1, U_2, \ldots$ Отметим, что суммирование верхних рекордных величин, полученных из последовательности стандартных равномерных с. в., изучалось, например, в работе [9]. Пусть $T(n) = u(0) + u(1) + \ldots + u(n)$ $(n \geq 1)$, где в качестве исходной рекордной величины берем $u(0) = 1$. Пользуясь представлением (2.2), перейдем к равенству

$$T(n) \stackrel{d}{=} 1 + U_1 + U_1U_2 + \ldots + U_1U_2 \ldots U_n, \tag{3.1}$$

из которого следует, например, что

$$ET(n) = 1 + 1/2 + 1/4 + \ldots + 1/2^n = 2 - 1/2^n \quad (n \geq 1).$$

Из формулы (3.1) для случайных величин $T(n)$ выводим следующие рекуррентные соотношения:

$$T(n) \stackrel{d}{=} 1 + UT(n-1) \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

в которых равномерно распределенная на интервале $[0, 1]$ с. в. $U$ не зависит от $T(n-1)$. Отметим, что $1 \leq T(n) \leq n+1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Для функций распределения $F_n(x)$ с. в. $T(n)$ справедливы соотношения:

$$F_n(x) = \int_0^1 F_{n-1}\left(\frac{x-1}{u}\right) du = \int_0^{\min\{1, x-1\}} F_{n-1}\left(\frac{x-1}{u}\right) du \quad (1 \leq x \leq n+1).$$

Если $1 \leq x < 2$, то получаем, что

$$F_n(x) = \int_0^{x-1} F_{n-1}\left(\frac{x-1}{u}\right) du = \int_0^{(x-1)/n} du + \int_{(x-1)/n}^{x-1} F_{n-1}\left(\frac{x-1}{u}\right) du =$$
$$= \frac{x-1}{n} + (x-1)\int_1^n (F_{n-1}(z)/z^2) dz.$$

Если же $2 \leq x \leq n+1$, то

$$F_n(x) = \int_0^{(x-1)/n} du + \int_{(x-1)/n}^{x-1} F_{n-1}\left(\frac{x-1}{u}\right) du = \frac{x-1}{n} + (x-1)\int_{x-1}^n (F_{n-1}(z)/z^2) dz.$$

Таким образом, ф. р. $F_n(x)$ имеет вид

$$F_n(x) = \frac{x-1}{n} + (x-1)\int_{\max\{1, x-1\}}^n (F_{n-1}(z)/z^2) dz \quad (1 \leq x \leq n-1), \tag{3.2}$$

и $F_n(x) = 0$, если $x \leq 1$, и $F_n(x) = 1$, если $x > n+1$.

Рассмотрим в частном случае величину $T(2) = 1 + U_1 + U_1U_2$. Поскольку

$$F_1(x) = P(1 + U_1 < x) = x - 1 \quad (1 \leq x \leq 2)$$

и $F_1(x) = 1$, если $x > 2$, то, пользуясь (3.2), получаем, что

$$F_2(x) = P(1 + U_1 + U_1U_2 < x) = (x-1)\log 2 \quad (1 \leq x \leq 2)$$

и

$$F_2(x) = (x-2) + (x-1)(\log 2 - \log(x-1)) \quad (2 \leq x \leq 3),$$

и $F_2(x) = 0$, если $x < 1$, и $F_2(x) = 1$, если $x > 3$.

Очевидно, что даже при небольших значениях $n$ функции распределения $F_n(x)$ с. в. $T(n)$ достаточно громоздки. Для исследования асимптотического поведения неотрицательных случайных величин $T(n)$ рассмотрим их преобразования Лапласа $\lambda_n(s) = Ee^{-sT(n)}$ $(n \geq 1)$. Справедливы следующие соотношения:

$$\lambda_n(s) = Ee^{-s(1+UT(n-1))} = e^{-s}\int_0^1 Ee^{-usT(n-1)} du = \frac{e^{-s}}{s}\int_0^s Ee^{-zT(n-1)} dz,$$

приводящие нас к равенству

$$se^s\lambda_n(s) = \int_0^s \lambda_{n-1}(z)dz \quad (n \geq 2). \tag{3.3}$$

Поскольку нас интересует преобразование Лапласа с. в. $T = \sum_{i=0}^{\infty} u(i)$, то перейдем к пределу в левой и правой частях равенства (3.3). Получим

$$se^s\lambda(s) = \int_0^s \lambda(z)dz. \tag{3.4}$$

Из формулы (3.4) и равенства $\lambda(0) = 1$ вытекает, что интересующее нас предельное преобразование Лапласа имеет вид

$$\lambda(s) = \exp\left(\int_0^s \frac{e^{-z} - 1 - z}{z} dz\right). \tag{3.5}$$

Отметим также, что соответствующая предельная для с. в. $T(n)$ характеристическая функция $h(t)$ задается равенством $h(t) = \lambda(-it)$. Соотношение (3.5) позволяет вычислять моменты с. в. $T$. Получаем, в частности, что

$$ET = -\lambda'(0) = 2, \quad ET^2 = \lambda''(0) = 9/2, \quad DT = 1/2.$$

**4. Сравнение последовательных сумм минимальных порядковых статистик и рекордных величин.** Рассмотрим набор из $n$ независимых с. в. $U_1, U_2, \ldots, U_n$ и суммы

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k, \quad m(n) = \sum_{k=1}^{n} U_{1,k}.$$

Пусть $w(n)$ обозначает сумму всех нижних рекордных величин $u(1), u(2), \ldots$, появившихся в этом наборе. Будем также иметь дело с индикаторами нижних рекордов $\eta_1, \eta_2, \ldots$, которые представляют собой независимые случайные величины и задаются следующим образом: $\eta_k = 1$, если $U_k < U_{1,k-1}$, т. е. $\eta_k = 1$, если $U_k = U_{1,k}$, и $\eta_k = 0$ иначе. Известно, что $P(\eta_k = 1) = 1 - P(\eta_k = 0) = 1/k$ $(k \geq 1)$. Отметим также, что для любого $k = 1, 2, \ldots$ с. в. $\eta_k$ и $U_{1,k}$ независимы. Сумму $w(n)$ можно представить в виде

$$w(n) = U_{1,1} + \sum_{k=2}^{n} \eta_k U_{1,k}.$$

Интересно сравнить средние значения рассматриваемых сумм. Воспользуемся тем, что $EU_k = 1/2$, $EU_{1,k} = 1/(k+1)$ $(k \geq 1)$. Получаем следующие равенства:

$$ES_n = n/2 \quad (n \geq 1),$$

$$Em(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \quad (n \geq 1),$$

$$Ew(n) = EU_{1,1} + \sum_{k=2}^{n} E\eta_k EU_{1,k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \quad (n \geq 1). \tag{4.1}$$

Таким образом, при $n \to \infty$

$$Em(n) \sim \log n \quad \text{и} \quad Ew(n) \to 1.$$

**Замечание 4.1.** Аналогичный подход можно использовать для сумм максимальных величин $M(n) = \sum_{k=1}^{n} X_{k,k}$ и сумм $W(n)$ верхних рекордов в наборе $U_1, U_2, \ldots, U_n$. В этой ситуации получается, что

$$EM(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} \quad (n \geq 1),$$

$$E(m(n) + M(n)) = n \ (n \geq 1).$$

Для сумм $W(n)$ справедливо соотношение, аналогичное (4.1), в котором индикаторы $\eta_k$ заменяются на индикаторы верхних рекордов, принимающие с теми же вероятностями $1/k$ и $1-1/k$ значения 1 и 0, и в котором вместо минимумов $U_{1,k}$ берутся максимумы $U_{k,k}$. В результате данных замен получаем, что $EW(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$ $(n \geq 1)$. Интересно отметить, что $EW(n) = Em(n)$.

### Литература


1. *Ahsanullah M., Nevzorov V. B.* Order Statistics. Examples and exercises. New York: Nova Science Publishers, 2005.

2. *Ahsanullah M., Nevzorov V. B.* Records via probability theory. Atlantis Press, 2015.

3. *Ahsanullah M., Nevzorov V. B., Shakil M.* An introduction to order statistics. Atlantis Press, 2013.

4. *Arnold B. C., Balakrishnan N., Nagaraja H. N.* Records. New York: John Wiley & Sons, 1998.

5. *Arnold B. C., Balakrishnan N., Nagaraja H. N.* A first course in order statistics. New York: John Wiley & Sons, 1992.

6. *David H. A., Nagaraja H. N.* Order statistics. Third edition. New York: John Wiley & Sons, 2003.

7. *Невзоров В. Б.* Рекорды. Математическая теория. М.: ФАЗИС, 2000.

8. *Невзоров В. Б.* Представления упорядоченных случайных величин в виде сумм или произведений независимых величин // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3 (61). Вып. 4. С. 627–640. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.412

9. *Arnold B. C., Villasenor J. A.* Progress on Sums of Records. In book: Recent Developments Ordered Random Variables / ed. M. Ahsanullah, M. Raqab. New York: Nova Science Publisher, 2005. P. 155–169.



Статья поступила в редакцию 9 августа 2018 г.;
после доработки 10 сентября 2018 г.;
рекомендована в печать 27 сентября 2018 г.



Контактная информация:

*Невзоров Валерий Борисович* — д-р физ.-мат. наук, проф.; probabil@pisem.net
*Степанов Алексей Васильевич* — д-р физ.-мат. наук, проф.; alexeistep45@mail.ru


## On the distributions of sums of record values


*V. B. Nevzorov*[1], *A. V. Stepanov*[2]

[1] St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation
[2] Immanuel Kant Baltic Federal University, ul. A. Nevskogo, 14, Kaliningrad, 236041, Russian Federation

**For citation:** Nevzorov V. B., Stepanov A. V. On the distributions of sums of record values. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2019, vol. 6 (64), issue 1, pp. 110–117. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.108 (In Russian)

In the present paper, we discuss lower and upper record values obtained from sequences of independent and identically distributed on [0,1] random variables. Representations, in which such record values are equal in distribution to sums and products of independent and identically distributed auxiliary random variables, are provided in the paper. By these representations distributional and moment characteristics of lower and upper record values taken from uniform samples are studied. Sequential sums of lower record values which are taken from samples of independent and uniformly distributed random variables are also discussed in this work. The distributions and the Laplace transforms of the given sums are studied. The Laplace transform of the series of lower uniform record values are found. In the present work, we also compare the sums of lower order statistics and record values which belong to a certain uniform sample.

*Keywords*: record values, sums of records, limit distributions of sums of lower record values, uniform distribution.

## References

1. Ahsanullah M., Nevzorov V. B., *Order Statistics. Examples and exercises* (Nova Science Publishers, New York, 2005).

2. Ahsanullah M., Nevzorov V. B., *Records via probability theory* (Atlantis Press, 2015).

3. Ahsanullah M., Nevzorov V. B., Shakil M., *An introduction to order statistics* (Atlantis Press, 2013).

4. Arnold B. C., Balakrishnan N., Nagaraja H. N., *Records* (John Wiley & Sons, New York, 1998).

5. Arnold B. C., Balakrishnan N., Nagaraja H. N., *A first course in order statistics* (John Wiley & Sons, New York, 1992).

6. David H. A., Nagaraja H. N., *Order statistics* (third edition, John Wiley & Sons, New York, 2003).

7. Nevzorov V. B., *Records. Mathematical theory* (Phasis Publ., Moscow, 2000). [English translation in: Translations of Mathematical Monographs, American Math. Society, 2001.]

8. Nevzorov V. B., "Representations of ordered random variables in the terms of sums or products of independent variables", *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **3(61)**, issue 4, 627–640 (2016). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.412 (In Russian)

9. Arnold B. C., Villasenor J. A., *Progress on Sums of Records*. In *Recent Developments in Ordered Random Variables*, 155–169 (ed. M. Ahsanullah, M. Raqab, Nova Science Publisher, New York, 2005).

Received: August 9, 2018
Revised: September 10, 2018
Accepted: September 27, 2018

Author's information:

*Valery B. Nevzorov* — probabil@pisem.net
*Alexei V. Stepanov* — alexeistep45@mail.ru