

Уединенные волны на цилиндрической оболочке с жидкостью

А. Н. Кореньков

Т-Системс, Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, 13-я лин. В. О., 14

Для цитирования: *Кореньков А. Н.* Уединенные волны на цилиндрической оболочке с жидкостью // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 1. С. 131–143. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.110>

Рассматривается упругая цилиндрическая оболочка бесконечной длины. Для описания оболочки используются геометрически нелинейные безмоментные уравнения. Идеальная несжимаемая жидкость заполняет оболочку целиком. Предполагается, что скорость невозмущенного движения жидкости постоянна. Задача рассматривается в осесимметричной постановке. Исследуется случай линейной дисперсии, а также строятся решения в виде нелинейных уединенных волн при помощи разложений по степеням малого параметра — амплитуды. Для нелинейной оболочки без жидкости отыскиваются решения в виде пары волн с различными фазовыми скоростями, которые могут распространяться в обоих направлениях вдоль оси оболочки. Для оболочки, заполненной покоящейся жидкостью, наблюдается похожая ситуация, однако сами решения имеют качественно иной характер. В случае жидкости, протекающей вдоль оси оболочки, строятся четыре различных решения, отличающиеся фазовыми скоростями. Изучается зависимость полученных решений от физических параметров, характеризующих систему. Приводится численный пример.

Ключевые слова: оболочка, дисперсия, асимптотические разложения, жидкость, солитон.

1. Введение. В течение последних нескольких десятков лет внимание исследователей, занимающихся нелинейными волновыми явлениями в физике, сместилось от традиционных задач гидродинамики, оптики и теории плазмы в область механики деформируемого твердого тела.

Обзор задач о распространении уединенных волн в балках, пластинах и оболочках до 2002 года содержится в [1]. Большинство работ посвящено распространению волн в нелинейно-упругих стержнях. Теоретическим вопросам распространения нелинейных волн в твердых телах посвящена монография [2]. Математическая модель для описания объемных продольных волн в нелинейно-упругой тонкостенной цилиндрической оболочке предложена в работе А. М. Самсонова с соавторами [3]. Получено разрешающее уравнение для продольных смещений. Нелинейным волнам в полупроводниках и наноструктурах посвящена монография [4].

Впервые, по-видимому, задача о распространении нелинейных волн солитонного типа в простейшей одномерной модели трубопровода, заполненного жидкостью, рассматривалась в монографии [5], первое издание которой относится к 1980 г.

В строгой постановке, использующей нелинейные безмоментные уравнения теории оболочек [6], эта задача изучалась в [7]. Было показано, что в рассматриваемой системе существуют две пары бегущих уединенных волн, распространяющихся

вдоль оси оболочки в обоих направлениях. Эти уединенные волны обладают скоростями, близкими к скоростям, полученным из линейного дисперсионного соотношения.

Изучение решений в виде стоячих уединенных волн в форме аневризмы на цилиндрической оболочке, заполненной жидкостью, которые возникают при конкретных диапазонах начальных деформаций трубы и постоянном давлении в жидкости, посвящен ряд работ А. Т. Ильичева и соавторов, например [8]. Этим же автором в [9] изучалась задача о распространении бегущих уединенных волн по цилиндрической оболочке, заполненной жидкостью. Предполагалось, что радиальная компонента скорости жидкости равна нулю, а для продольной координаты скорости использовалось среднее по сечению значение, что сводило задачу к одномерной. Были построены семейства решений в виде уединенных волн, скорости которых близки к скоростям, получаемым из линейного дисперсионного соотношения.

Распространению нелинейных волн деформаций в упругих физически нелинейных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость, посвящены работы [10, 11]. Задача рассматривалась в двумерной постановке. Материал оболочки предполагался нелинейно-упругим с кубической зависимостью интенсивности напряжений от интенсивности деформаций. По отдельности для оболочки и жидкости строились разложения по степеням двух малых параметров с использованием предположений о малости соответствующих физических величин. Это позволило вывести нелинейное разрешающее уравнение, для численного решения которого была предложена специальная разностная схема. Скорость уединенной волны определялась из соотношения, соответствующего «сухой» оболочке (см. формулу (8) в разделе 3 данной работы). В случае отсутствия заполняющей оболочку жидкости разрешающее уравнение сводилось к уравнению Кортевега—де Фриза. Работа [12] рассматривает ту же задачу для вязкоупругого материала оболочки.

В данной работе, написанной в продолжение [7], построены асимптотические представления решений солитонного типа для упругой оболочки с протекающей внутри нее несжимаемой жидкостью. Скорость невозмущенного движения жидкости постоянна. Изучаемая физическая система описывается двумерной осесимметричной контактной задачей гидроупругости. Каких-либо предположений о распределении скоростей жидкости по сечению не вводится. Решение строится в виде рядов по степеням малого параметра — амплитуды смещений.

2. Основные уравнения. Рассмотрим задачу о распространении волн в физической системе, состоящей из бесконечной круговой цилиндрической оболочки, заполненной идеальной несжимаемой жидкостью. Оболочка отнесена к цилиндрическим координатам (r, z) . Задача рассматривается в осесимметричной постановке.

Уравнения динамики безмоментной цилиндрической оболочки запишем в безразмерном виде [6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial z} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & T_2 - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} T_1 + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= q, \\ T_1 &= \frac{\partial u}{\partial z} + \nu w + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \nu w^2 \right], \\ T_2 &= w + \nu \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[w^2 + \nu \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

Размерные переменные (помеченные звездочкой) даются выражениями

$$z^* = zR, \quad u^* = uR, \quad w^* = wR, \quad T_i^* = T_i \frac{Eh}{1 - \nu^2},$$

$$t^* = tR \sqrt{\frac{\rho(1 - \nu^2)}{E}}, \quad q^* = q \frac{E}{1 - \nu^2} \frac{h}{R}, \quad v^* = v \sqrt{\frac{E}{\rho(1 - \nu^2)}}.$$

Здесь R — радиус оболочки; h — ее толщина; E — модуль Юнга; ρ — плотность материала оболочки; ν — коэффициент Пуассона. Через u, w и q обозначены компоненты вектора смещения точек поверхности оболочки и нормальная нагрузка; v — характерная скорость.

Будем считать, что идеальная несжимаемая жидкость заполняет оболочку целиком и обозначим через a скорость невозмущенного движения жидкости в положительном направлении оси z . Уравнения Эйлера, записанные через потенциал скоростей, примут вид [13]

$$a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} = -\frac{\partial p}{\partial r},$$

$$a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\partial p}{\partial z}. \quad (2)$$

Здесь $p(r, z, t)$ — давление в жидкости; $\varphi(r, z, t)$ — потенциал скоростей: $(u_r, u_z) = \nabla \varphi$. Последний удовлетворяет уравнению неразрывности:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (3)$$

На поверхности оболочки задаются контактные условия. Нормальная компонента скорости жидкости связана с поперечным смещением условием непротекания:

$$u_r(1, z, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=1} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (4)$$

а распределенная нагрузка на поверхности оболочки с давлением в жидкости — соотношением

$$\gamma^2 p(1, z, t) = q(z, t). \quad (5)$$

Система уравнений (1)–(5) образует контактную задачу гидроупругости. Задача содержит безразмерный параметр γ , характеризующий взаимное влияние оболочки и жидкости (показатель связанности), определяемый выражением $\gamma^2 = R\rho_0/h\rho$, где ρ_0 — плотность жидкости. Случай $\gamma \ll 1$ отвечает тяжелой оболочке и легкой жидкости — ситуация, вряд ли реализуемая в реальных механических конструкциях; в более реалистичном случае тяжелой жидкости и тонкой оболочки имеем $\gamma \gg 1$. В примерах, рассмотренных в конце статьи в качестве иллюстрации, имеет место $\gamma \simeq 1$.

3. Линейная дисперсия. Ниже будет построено решение контактной задачи, отвечающее нелинейным волнам малой амплитуды бесконечного периода. Главный член в разложении фазовой скорости таких волн по степеням малого параметра

(амплитуды) совпадает с фазовой скоростью линейных волн. Для определения последней получим дисперсионное соотношение, действуя так же, как в [7].

Будем далее отделять переменные z и t в линейризованных уравнениях (3) и (6) в виде произведений функций, зависящих от r , на $\exp i(\kappa z - \omega t)$, где κ — волновое число и ω — циклическая частота колебаний. Фазовая скорость волны определяется выражением $c = \omega/\kappa$.

Из условия существования нетривиальных решений линейризованных уравнений (1)–(5) получаем дисперсионное соотношение:

$$c^4(\kappa^2 + \gamma^2\delta) - c^3 a \gamma^2 \delta - c^2(1 + \kappa^2 + \gamma^2\delta) + ca\gamma^2\delta + (1 - \nu^2) = 0, \\ \delta(\kappa) = \kappa I_0(\kappa)/I_1(\kappa). \quad (6)$$

Здесь $I_0(\kappa)$ и $I_1(\kappa)$ — бесселевы функции первого рода. Величина $\delta(\kappa)$ имеет порядок $O(1)$ при $0 \leq \kappa < \infty$. Полагая $\gamma = 0$, получим дисперсионное соотношение, отвечающее оболочке без жидкости:

$$c^4 \kappa^2 - c^2(1 + \kappa^2) + (1 - \nu^2) = 0. \quad (7)$$

Дискриминант этого уравнения строго больше нуля, и уравнение имеет два корня c_1^2 и c_2^2 . Это означает, что в отсутствие жидкости для заданного волнового числа существуют две пары волн с фазовыми скоростями $\pm c_1$ и $\pm c_2$, которые могут распространяться в обоих направлениях вдоль оси оболочки.

Вернемся теперь к рассмотрению оболочки с жидкостью и положим в уравнении (6) $a = c$. Тогда для фазовой скорости снова приходим к уравнению (7). Это означает, что в том случае, если жидкость в невозмущенном состоянии имеет скорость, равную фазовой скорости волн на «сухой» оболочке, оболочка и жидкость не оказывают влияния друг на друга. Действительно, согласно первому из соотношений (4), давление на поверхности оболочки, приложенное со стороны жидкости, оказывается равным нулю.

Поскольку в данной работе нас интересуют, в первую очередь, изолированные решения солитонного типа, рассмотрим случай распространения длинных волн. Фазовую скорость будем искать в виде ряда по степеням κ . Тогда с точностью до $O(\kappa^2)$ начальное приближение определяется из уравнения

$$c^4 - ac^3 - \left(1 + \frac{1}{2\gamma^2}\right)c^2 + ac + \frac{1 - \nu^2}{2\gamma^2} = 0. \quad (8)$$

В случае покоящейся жидкости уравнение имеет два корня c_1^2 и c_2^2 , удовлетворяющих неравенствам $0 \leq c_1^2 \leq 1 - \nu^2$ и $1 \leq c_2^2$.

Зависимость корней дисперсионного соотношения (8) от скорости невозмущенного движения жидкости a приведена на рис. 1. Рисунок соответствует значению безразмерного параметра γ , отвечающего исходным данным из рассмотренного ниже численного примера.

Движение жидкости оказывает качественно различное воздействие на волны первого и второго типа в зависимости от их направления.

В случае противоположного распространения движение жидкости оказывает тормозящее воздействие на волну первого типа, а на фазовые скорости волны второго типа влияния практически не оказывает (два нижних графика).

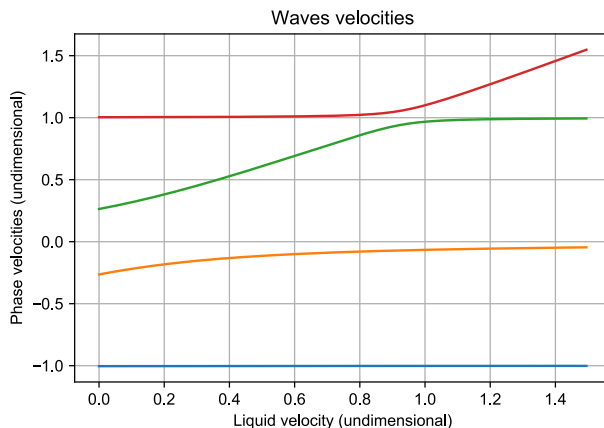


Рис. 1. Зависимость корней уравнения (8) от скорости жидкости, $\gamma^2 = 6.5$.

Для попутных волн (два верхних графика на рисунке) картина существенно иная. Фазовая скорость волны первого типа с увеличением скорости жидкости растет, не превосходя единицу. Фазовая скорость волны второго типа слабо зависит от скорости жидкости для медленных течений, и показывает практически линейный рост для быстрых волн.

Следует отметить, что практическое значение имеет, в основном, зона малых скоростей.

4. Решение для уединенных волн. Построим теперь решение системы (1)–(5), соответствующее уединенным волнам малой амплитуды, распространяющимся в положительном направлении оси z . Введем малый параметр ε и новые переменные $\xi = \varepsilon(z - ct)$, $\eta = \varepsilon^3 t$. Будем искать решение в виде рядов по степеням параметра ε . Неизвестные функции в уравнениях оболочки (1) ищем в виде

$$\begin{aligned} w(\xi, \eta) &= \varepsilon^2 \sum_i \varepsilon^{2i} w^{(i)}(\xi, \eta), & u(\xi, \eta) &= \varepsilon \sum_i \varepsilon^{2i} u^{(i)}(\xi, \eta), \\ T_i(\xi, \eta) &= \varepsilon^2 \sum_i \varepsilon^{2i} T_i^{(i)}(\xi, \eta), & q(\xi, \eta) &= \varepsilon^2 \sum_i \varepsilon^{2i} q^{(i)}(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (9)$$

а давление и потенциал в жидкости — в форме

$$p(r, \xi, \eta) = \varepsilon^2 \sum_i \varepsilon^{2i} p^{(i)}(r, \xi, \eta), \quad \varphi(r, \xi, \eta) = \varepsilon \sum_i \varepsilon^{2i} \varphi^{(i)}(r, \xi, \eta). \quad (10)$$

С помощью разложений (10), используемых с уравнениями жидкости (2), (3) и условиями (4) и (5), получим выражение для тангенциальной производной давления на поверхности оболочки через величину поперечного смещения w . Затем, подставляя разложения (9) в уравнения движения оболочки (1) и контактное условие (5), запишем условия разрешимости систем для определения коэффициентов соответствующих степенных рядов. Эти условия, в конечном итоге, сведутся к уравнению Кортевега—де Фриза относительно нормального смещения точек поверхности оболочки.

4.1. Жидкость. Подставляя разложения (10) в уравнение неразрывности (3) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях параметра, получим систему уравнений для определения коэффициентов рядов

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial r} \right] = - \frac{\partial^2 \varphi^{(n-1)}}{\partial \xi^2}, \quad n = 0, 1 \dots \quad (\varphi^{(-1)} \equiv 0),$$

которая легко интегрируется. Из условия ограниченности потенциала скоростей при $r = 0$ следует, что начальное приближение не зависит от радиальной координаты, а последующие приближения являются полиномами различных степеней r :

$$\varphi^{(0)} = \bar{\varphi}^{(0)}(\xi, \eta), \quad \varphi^{(1)} = - \frac{r^2}{4} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}^{(0)}}{\partial \xi^2} + \bar{\varphi}^{(1)}(\xi, \eta), \quad (11)$$

$$\varphi^{(2)} = - \frac{r^4}{64} \frac{\partial^4 \bar{\varphi}^{(0)}}{\partial \xi^4} - \frac{r^2}{4} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}^{(1)}}{\partial \xi^2} + \bar{\varphi}^{(2)}(\xi, \eta). \quad (12)$$

Здесь $\bar{\varphi}^{(n)}(\xi, \eta)$ — функции, подлежащие определению из контактного условия. Подстановка разложений (10) в контактные условия (4) и (5) дает

$$\left. \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial r} \right|_{r=1} = -c \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \xi}, \quad \left. \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial r} \right|_{r=1} = -c \frac{\partial w^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \eta}, \quad (13)$$

$$q^{(n)}(\xi, \eta) = \gamma^2 p^{(n)}(1, \xi, \eta).$$

Из (11) и (12) следует, что

$$\left. \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial r} \right|_{r=1} = - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}^{(0)}}{\partial \xi^2}, \quad \left. \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial r} \right|_{r=1} = \frac{1}{16} \frac{\partial^4 \bar{\varphi}^{(0)}}{\partial \xi^4} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}^{(1)}}{\partial \xi^2}. \quad (14)$$

Сравнивая выражения (13) и (14), получим

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}^{(0)}}{\partial \xi^2} = 2c \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 \bar{\varphi}^{(1)}}{\partial \xi^2} = 2c \frac{\partial w^{(1)}}{\partial \xi} - 2 \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \eta} + \frac{c}{4} \frac{\partial^3 w^{(0)}}{\partial \xi^3}. \quad (15)$$

Подставляя разложения (10) в уравнения Эйлера (2), будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[p^{(0)} - (c - a) \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial \xi} \right] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left[p^{(0)} - (c - a) \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial \xi} \right] = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[p^{(1)} - (c - a) \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \xi} \right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[p^{(1)} - (c - a) \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \xi} \right] = - \frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial \xi^2}. \quad (17)$$

Используя первое из соотношений (15) и второе из соотношений (11) (справедливое, в частности, при $r = 1$), а также условие равенства нулю всех неизвестных функций справа на бесконечности, куда возмущение еще не распространилось, получим

$$\left. \frac{\partial p^{(0)}}{\partial \xi} \right|_{r=1} = 2c(c - a) \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial \xi} = 2cw^{(0)}.$$

Эти выражения используем для исключения $\varphi^{(0)}$ из правой части второго из соотношений (17), которое будем рассматривать при $r = 1$. Исключая также функцию $\varphi^{(1)}$ при помощи (12) и (15), получим выражение для тангенциальной производной давления жидкости на поверхности оболочки. Тогда, в силу контактного условия (5), для тангенциальной производной нормальной нагрузки будем иметь

$$\frac{\partial q^{(1)}}{\partial \xi} = 2\gamma^2 \left[c(c-a) \frac{\partial w^{(1)}}{\partial \xi} - (2c-a) \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \eta} - 2c^2 w^{(0)} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \xi} - \frac{c(c-a)}{8} \frac{\partial^3 w^{(0)}}{\partial \xi^3} \right]. \quad (18)$$

Используя последнее выражение, сведем дальнейшее рассмотрение задачи к уравнениям оболочки.

4.2. Оболочка. Подставляя разложения (9) и (10) в уравнения (1), приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε и исключая продольные усилия, в начальном приближении получим однородную систему

$$(1 - 2\gamma^2 c(c-a)) \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \xi} + \nu \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial \xi^2} = 0, \quad (1 - c^2) \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \xi^2} = 0. \quad (19)$$

Условие существования нетривиальных решений этой системы дает уравнение для определения скорости c подвижной системы координат (ξ, η) , совпадающее с уравнением (8), которое уже встречалось при рассмотрении линейной дисперсии.

Рассмотрение следующего приближения дает систему

$$\begin{aligned} (1 - 2\gamma^2 c(c-a)) \frac{\partial w^{(1)}}{\partial \xi} + \nu \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial \xi^2} &= -c^2 \frac{\partial^3 w^{(0)}}{\partial \xi^3} - \left(\nu \frac{\partial u^{(0)}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial \xi^2} + w^{(0)} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \xi} \right) - \\ &- 2\gamma^2 \left((2c-a) \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \eta} + 2c^2 w^{(0)} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{c(c-a)}{8} \frac{\partial^3 w^{(0)}}{\partial \xi^3} \right), \\ (1 - c^2) \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial w^{(1)}}{\partial \xi} &= -2c \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial \xi \partial \eta} - \left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial \xi^2} + \nu w^{(0)} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \xi} \right). \end{aligned}$$

Условием существования решения последней системы с равным нулю определителем в силу бифуркационного соотношения (8), является уравнение

$$\begin{aligned} -c^2(1 - c^2) \frac{\partial^3 w^{(0)}}{\partial \xi^3} + 2c\nu \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial \xi \partial \eta} - (1 - c^2 - \nu^2) w^{(0)} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \xi} + c^2 \nu \frac{\partial u^{(0)}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial \xi^2} - \\ - 2\gamma^2(1 - c^2) \left((2c-a) \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \eta} + 2c^2 w^{(0)} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{c(c-a)}{8} \frac{\partial^3 w^{(0)}}{\partial \xi^3} \right) = 0. \quad (20) \end{aligned}$$

С учетом равенства нулю искомым величин в невозмущенной части системы на бесконечности из уравнений начального приближения (19) получим

$$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial \xi} = -\frac{\nu}{1 - c^2} w^{(0)}.$$

Подстановка последнего соотношения в (20) приводит к уравнению Кортевега—де Фриза относительно нормальной компоненты смещения срединной поверхности оболочки

$$f \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \eta} + g w^{(0)} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \xi} + h \frac{\partial^3 w^{(0)}}{\partial \xi^3} = 0. \quad (21)$$

Коэффициенты f , g и h определяются выражениями

$$\begin{aligned} f &= -\frac{2c\nu^2}{1-c^2} - 2\gamma^2(1-c^2)(2c-a), \\ g &= -(1-c^2-\nu^2) + \frac{c^2\nu^3}{(1-c^2)^2} - 4c^2\gamma^2(1-c^2), \\ h &= -c^2(1-c^2) \left(1 + \frac{\gamma^2}{4} \left(1 - \frac{a}{c} \right) \right). \end{aligned}$$

В случае использования линеаризованной версии безмоментных уравнений оболочки коэффициент g принимает вид

$$g = -4c^2\gamma^2(1-c^2),$$

остальные коэффициенты сохраняют прежнюю форму.

Решение уравнения (21) в виде одиночного солитона амплитуды A может быть записано в виде [5]

$$w^{(0)} = A \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\xi - V\eta}{L} \right), \quad V = \frac{A}{3} \frac{g}{f}, \quad L = 2\sqrt{3h/gA}.$$

Как можно заметить, коэффициенты g и h в уравнении (21) отвечают за вклад в решение нелинейности и диффузии соответственно.

5. Одиночный солитон. Возвращаясь к координатам z и t , запишем решение в виде

$$\begin{aligned} w &= W \operatorname{sech}^2 \kappa(z - vt), & q &= Q \operatorname{sech}^2 \kappa(z - vt), \\ u &= U (1 - \tanh \kappa(z - vt)), \end{aligned}$$

где

$$U = \frac{2\nu}{1-c^2} \sqrt{3Wh/g}, \quad Q = \frac{1-c^2-\nu^2}{1-c^2} W \quad (22)$$

и

$$\kappa = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Wg}{3h}}, \quad v = c + \frac{Wg}{3f}.$$

Скорость волны складывается из скорости линейных волн и поправки, зависящей от амплитуды.

В случае покоящейся жидкости, как следует из (8), для заданной амплитуды всегда существует два солитона, различающихся скоростями распространения: «медленный» и «быстрый». В этом смысле ситуация аналогична той, что наблюдалась при распространении линейных волн. Поскольку знаки коэффициентов g и h одинаковые, оба солитона имеют характер вздутия на оболочке, скорость распространения которого несколько выше скорости линейных волн.

Рассматривая первое выражение (22) для амплитуды продольного смещения и учитывая неравенства для фазовых скоростей, полученные в разделе 3, посвященном линейной дисперсии, видим, что после прохождения волны в возмущенной области продольные смещения для «быстрой» и «медленной» волн имеют разные

знаки. Из второго выражения (22) с учетом тех же неравенств следует, что знак поперечной нагрузки q , приложенной со стороны жидкости к поверхности оболочки, всегда совпадает со знаком поперечного смещения w .

В случае протекающей жидкости решения расщепляются на пару «быстрых» солитонов, скорости которых зависят от направления распространения, и такую же пару «медленных».

Полагая $\gamma = 0$ и рассматривая решение, отвечающее «медленным» солитонам, приходим к рассмотрению оболочки без жидкости. В этом случае коэффициенты g и h имеют разные знаки. Уравнение КДВ в этом случае принимает вид

$$\frac{\partial w^{(0)}}{\partial \eta} - \frac{c}{2\nu} w^{(0)} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{c\nu^2}{2} \frac{\partial^3 w^{(0)}}{\partial \xi^3} = 0.$$

Поскольку κ вещественно, волна имеет характер вмятины глубины W с характерной длиной $1/\kappa$, скорость распространения которой также превышает фазовую скорость линейных волн.

Рассматривая уравнение (20), можно заметить, что в случае «сухой» оболочки член $w^{(0)} \partial w^{(0)} / \partial \xi$ исчезает. Это означает, что основной вклад при образовании нелинейной одиночной волны на бесконечной цилиндрической оболочке вносят продольные смещения.

6. Численный пример. Рассмотрим вначале стальную трубу без жидкости радиуса $R = 0.5$ м с толщиной стенки $h = 0.01$ м. Формула (8) дает значение для фазовой скорости линейных волн: $c = 5100$ м/сек. Полагая амплитуду волны $W = 1$ см, из формул (22) получим, что характерная длина волны составляет величину порядка диаметра трубы, а фазовая скорость $v = 5380$ м/сек отличается от скорости линейных волн приблизительно на 5%.

Предположим теперь, что труба целиком заполнена водой. Скорость «медленного» солитона теперь составляет $v_1 = 1400$ м/сек, скорость «быстрого» — $v_2 = 5540$ м/сек. Для более легкой жидкости — бензина — значения составляют, соответственно, $v_1 = 1690$ м/сек и $v_2 = 5490$ м/сек. Поправки к скорости распространения волны в обоих случаях не превышают 3% от приближения, определяемого формулой (8).

Профили нормального и продольного смещений поверхности оболочки для этих пар волн, приведены на рис. 2 и 3. Ось абсцисс на приведенных графиках соответствует направлению вдоль образующей оболочки. Верхний плавный график на обоих рисунках отвечает «медленной» волне, нижний, более резкий — «быстрой». Из второго рисунка видно, что продольные смещения в возмущенной области для этих двух типов волн имеют разные знаки. Поперечные смещения экспоненциально затухают.

Пусть теперь в невозмущенном состоянии жидкость течет в положительном направлении с постоянной скоростью v . В таблице приведены значения скоростей всех четырех нелинейных волн для различных значений скорости протекающей жидкости (вода).

Влияние протекающей жидкости на профили нелинейных волн показано на рис. 4 и 5. Расчет соответствует последней строчке таблицы, для малых скоростей изменение профилей нелинейных волн практически незаметно. Установить соответствие между рисунками и данными таблицы легко — чем выше абсолютная величина скорости, тем более крутым оказывается профиль.

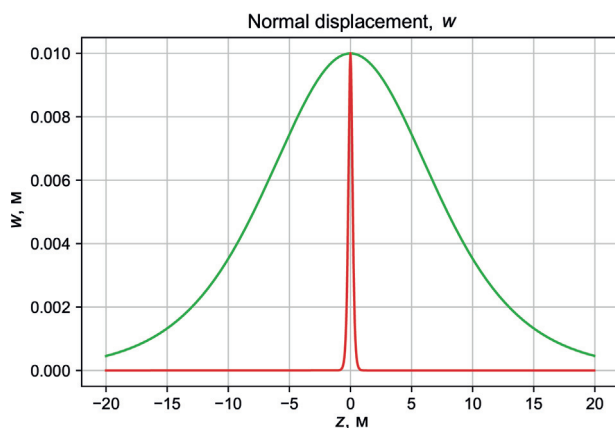


Рис. 2. Профиль одиночной волны. Нормальное смещение w (метры).

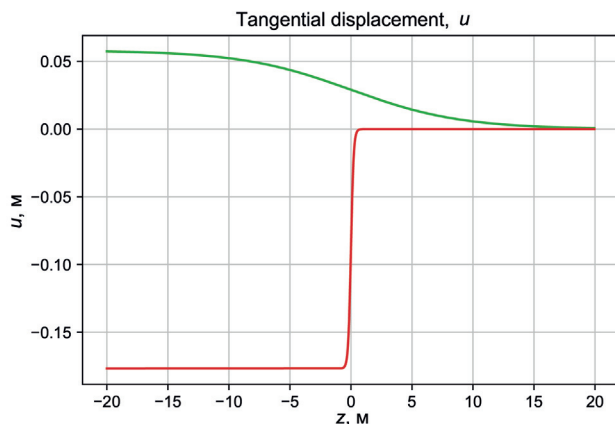


Рис. 3. Профиль одиночной волны. Продольное смещение u (метры).

**Влияние протекающей жидкости
на нелинейные волны, м/с**

v	v_1	v_2	v_3	v_4
0	-5540	-1400	1400	5540
50	-5542	-1390	1440	5539
500	-5558	-1180	1690	5525
2000	-5600	-730	2720	5480

Качественно результаты, полученные для других практически важных вариантов исходных данных (вода/алюминий, вода/резина), не отличаются от представленных выше.

7. Заключение. Итак, в системе состоящей из оболочки, заполненной жидкостью, существуют два типа волн, каждому из которых отвечает своя условная

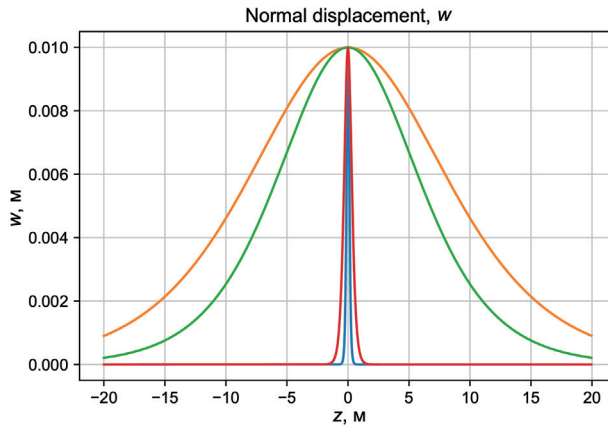


Рис. 4. Влияние протекающей жидкости. Нормальное смещение w (метры).

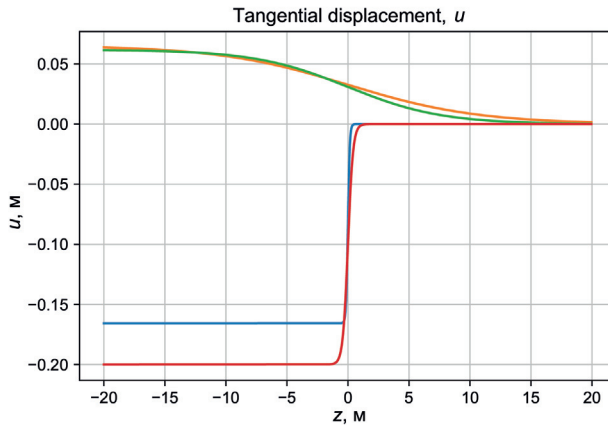


Рис. 5. Влияние протекающей жидкости. Продольное смещение u (метры).

«среда распространения». За более «медленную» волну преимущественно отвечает оболочка. Эта волна существует также и в вырожденном случае, когда оболочка рассматривается самостоятельно. При наличии заполняющей оболочку жидкости скорость этой волны заметно снижается.

Волна, порождаемая жидкостью, имеет существенно большую скорость. Упругая поверхность оболочки играет при ее образовании ту же роль, что силы тяжести для классических солитонных волн в жидкости со свободной поверхностью.

Скорость волн первого типа никогда не превосходит скорость волн второго. Как следует из (8), она ограничена величиной $1 - \nu^2$, то есть верхней границей непрерывного участка спектра безмоментной цилиндрической оболочки согласно линейной теории [14]. Обращаясь к размерным величинам, легко заметить, что это есть скорость звука в материале оболочки.

В случае, если невозмущенная жидкость внутри оболочки имеет постоянную скорость протекания, происходит расщепление каждой из двух упомянутых волн на две, отличающиеся не только направлением распространения, но и абсолютной величиной скорости. Из рассмотрения результатов расчетов можно сделать вывод, что в технически реализуемых механических системах влиянием скорости протекающей жидкости на нелинейные волны можно пренебречь.

Литература

1. Ерофеев В. И., Клюева Н. В. Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках (обзор) // Акустический журнал. 2002. Т. 48, № 6. С. 122–125.
2. Samsonov A. M. Strain Solitons in Solids and How to Construct Them. Chapman & Hall/CRC, 2001. ISBN 0-8493-0684-1
3. Dreiden G. V., Samsonov A. M., Semenova I. V., Shvartz A. G. Strain solitary waves in a thin-walled waveguide // Appl. Phys. Lett. 2014. Vol. 105. Issue 21. Art. no. 211906.
4. Muskens O. L. High-Amplitude, Ultrashort Strain Solitons In Solids. Thesis Universiteit Utrecht, 2004. ISBN 90-393-3627-X
5. Лэм Дж. Л. Введение в теорию солитонов. Могилев: Бибфизмат, 1997. 294 с.
6. Товстик П. Е. Устойчивость тонких оболочек. М.: Наука, 1995. 320 с.
7. Кореньков А. Н. Линейная дисперсия и солитоны на цилиндрической оболочке с жидкостью // Журнал технической физики. 2000. Т. 70. Вып. 6. С. 789–793.
8. Pichev A. T., Fu Y. B. Stability of an inflated hyperelastic membrane tube with localized wall thinning // International Journal of Engineering Science. 2014. Vol. 80. P. 53–61.
9. Pichev A. T., Fu Y. B. Solitary waves in fluid-filled elastic tubes: existence, persistence, and the role of axial displacement // IMA Journal of Applied Mathematics. 2010. Vol. 75. Issue 2. P. 257–268. <https://doi.org/10.1093/imamat/hxq004>
10. Иванов С. В., Могилевич Л. И., Попов В. С. Моделирование колебаний и волн в цилиндрической оболочке с вязкой несжимаемой жидкостью внутри нее // Вестник СГТУ. 2011. № 4(59). Вып. 1. С. 13–19.
11. Блинкова А. Ю., Иванов С. И., Ковалев А. Д., Могилевич Л. И. Математическое и компьютерное моделирование динамики нелинейных волн в физически нелинейных упругих цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Физика. 2012. Т. 12. Вып. 2. С. 12–18.
12. Блинкова А. Ю. Моделирование нелинейных волн деформаций в физически линейных вязкоупругих цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость // Вестник СГТУ. 2012. № 4(68). Вып. 1. С. 7–15.
13. Седов Л. И. Механика сплошной среды: в 2 томах. Т. I. М.: Наука, 1983. 528 с.
14. Гольдвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 384 с.

Статья поступила в редакцию 1 марта 2018 г.;
после доработки 31 марта 2018 г.;
рекомендована в печать 27 сентября 2018 г.

Контактная информация:

Кореньков Андрей Николаевич — канд. физ.-мат. наук; andreykorenkov@gmail.com

Solitary waves on a cylinder shell with liquid

A. N. Korenkov

T-Systems, 13th line V. O., 14, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Korenkov A. N. Solitary waves on a cylinder shell with liquid. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2019, vol. 6 (64), issue 1, pp. 131–143. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.110> (In Russian)

Traditionally, non-linear wave propagation has been under consideration in classical hydrodynamics, as well as in such areas of physics like optics and plasma theory. By contrast, we study the same problem within the framework of deformable solid body theory. Specifically, non-linear wave propagation is considered in a basic model of pipeline. We make use of classical non-linear thin elastic shell equilibrium equations along with Euler equations for a non-compressible non-viscous liquid. A soliton-type asymptotic solution is constructed. The existence of the single soliton on the “dry” shell is proved; while on the “filled up” shell there exist exactly two solitons. The behavior of these solutions was studied under the inter-connectedness factor, numerical results are provided. The results obtained may be put in practice, like construction engineering.

Keywords: non-linear wave propagation, dispersion, soliton, solitary wave, thin shell, non-viscous liquid, asymptotic solution.

References

1. Erofeev V. I., Klueva N. V., “Solitons and Nonlinear periodic Strain Waves in Rods, Plates and Shells (A Review)”, *Acoustical Physics* **48**(6), 725–740 (2002).
2. Samsonov A. M., *Strain Solitons in Solids and How to Construct Them* (Chapman & Hall/CRC, 2001, ISBN 0-8493-0684-1).
3. Dreiden G. V., Samsonov A. M., Semenova I. V., Shvartz A. G., “Strain solitary waves in a thin-walled waveguide”, *Appl. Phys. Lett.* **105**, issue 21, art. no. 211906 (2014).
4. Muskens O. L., *High-Amplitude, Ultrashort Strain Solitons In Solids* (Thesis Universiteit Utrecht, 2004, ISBN 90-393-3627-X).
5. Lamb G. L., *Elements of Soliton Theory, Pure & Applied Mathematics* (John Wiley & Sons Inc., 1980, ISBN 0471045594).
6. Tovstik P. E., Smirnov A. L., *Asymptotic methods in the buckling theory of elastic shells. In: Series of stability, vibration and control* (World Scientific, 2001, ISBN 9810247265, 9789810247263).
7. Koren'kov A., “Linear dispersion and solitons in a liquid-filled cylindrical shell”, *Technical Physics. The Russian Journal Of Applied Physics* **45**(6), 789–793 (2000).
8. Il'ichev A. T., Fu Y. B., “Stability of an inflated hyperelastic membrane tube with localized wall thinning”, *International Journal of Engineering Science* **80**, 53–61 (2014).
9. Il'ichev A. T., Fu Y. B., “Solitary waves in fluid-filled elastic tubes: existence, persistence, and the role of axial displacement”, *IMA Journal of Applied Mathematics* **75**, issue 2, 257–268 (2010). <https://doi.org/10.1093/imamat/hxq004>
10. Ivanov S. V., Mogilevich L. I., Popov V. S., “Modelling of oscillations and waves in cylinder shell including viscous incompressible liquid”, *Vestnik of Saratov State Technical University* (4(59)), iss. 1, 13–19 (2011).
11. Blinkova A. Yu., Ivanov S. V., Kovalev A. D., Mogilevich L. I., “Mathematical and Computer Modeling of Nonlinear Waves Dynamics in a Physically Nonlinear Elastic Cylindrical Shells with Viscous Incompressible Liquid inside Them”, *Izvestiya of Saratov University. New Series. Ser. Physics* **12**, iss. 2, 12–18 (2012).
12. Blinkova A. Yu., “Nonlinear waves deformation modelling in physically linear viscoelastic cylindrical shell with viscous incompressible fluid inside”, *Vestnik of Saratov State Technical University* (4(68)), iss. 1, 7–15 (2012).
13. Sedov L. I., *A course in continuum mechanics I* (Wolters-Noordhoff Publishing, Netherlands, 1971).
14. Goldenweizer A. L., Lidsky V. B., Tovstik P. E., *Free vibrations of thin elastic shells. In: Series of stability, vibration and control* (World Scientific, 1979).

Received: March 1, 2018

Revised: March 31, 2018

Accepted: September 27, 2018

Author's information:

Andrey N. Korenkov — andreykorenkov@gmail.com