

## Рассеяние энергии при колебаниях неоднородных композитных структур.

### 3. Численный эксперимент

*Л. В. Паршина*<sup>1</sup>, *В. М. Рябов*<sup>2</sup>, *Б. А. Ярцев*<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Крыловский государственный научный центр,  
Российская Федерация, 196158, Санкт-Петербург, Московское шоссе, 44

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** *Паршина Л. В., Рябов В. М., Ярцев Б. А.* Рассеяние энергии при колебаниях неоднородных композитных структур. 3. Численный эксперимент // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 1. С. 144–156. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.111>

Исследовано влияние относительной толщины слоя «жесткого» вязкоупругого полимера и ориентации армирующих слоев силового слоя на величины собственных частот и коэффициентов механических потерь затухающих колебаний безопорной двухслойной композитной пластины. Установлено, что каждой моде собственных колебаний соответствует эффективная относительная толщина вязкоупругого слоя. Дальнейшее увеличение относительной толщины для пластин с ортотропным силовым слоем в зависимости от температуры приводит как к росту, так и к убыванию собственных частот без значимого изменения диссипативных свойств. Для пластин с моноклинным силовым слоем увеличение относительной толщины вязкоупругого слоя сопровождается как уменьшением, так и увеличением диссипации энергии различных мод колебаний. Показано, что изменение ориентации армирующих слоев силового слоя сопровождается появлением областей взаимной трансформации связанных мод колебаний. Установлено, что взаимная трансформация собственных форм связанных мод колебаний безопорной квазиоднородной прямоугольной пластины возникает в случае, если хотя бы в одном из направлений пластины одна из собственных форм характеризуется четным числом четвертей волны, а другая собственная форма — нечетным числом четвертей волны. Продемонстрировано влияние температурно-частотной зависимости упруго-диссипативных характеристик «жесткого» вязкоупругого полимера на величины собственных частот и коэффициентов механических потерь всех мод колебаний двухслойной пластины.

*Ключевые слова:* анизотропия, колебания, собственная частота, коэффициент механических потерь.

**1.** Влияние относительной толщины «жесткого» слоя изотропного вязкоупругого полимера на величины собственных частот  $f_i$  и коэффициентов механических потерь  $\eta_i$  низших тонов колебаний ( $i = \overline{1, 5}$ ) изучалось на примере двухслойной безопорной прямоугольной пластины ( $a = 0,16$  м,  $b = a/2 = 0,08$  м). Силовой слой двухслойной пластины толщиной  $h_1 = a/100 = 0,0016$  м = const представляет собой квазиоднородную структуру, образованную совокупностью конечного числа армирующих слоев углепластика HMS/DX-209. Ориентация всех армирующих слоев

силового слоя относительно связанной с направлениями осей пластины глобальной системы координат  $xyz$  одинакова. Предполагалось, что в рассматриваемом диапазоне температур упруго-диссипативные характеристики однонаправленного углепластика HMS/DX-209 частотно независимы. На одну из наружных поверхностей силового слоя нанесен слой частотно зависимого «жесткого» изотропного вязкоупругого полимера. Величины упруго-диссипативных характеристик всех компонуемых в слоистую структуру материалов приведены в [1].

Численные исследования проводились путем варьирования относительной толщины слоя «жесткого» изотропного вязкоупругого полимера  $\bar{h} \in [0, 3]$  при фиксированных значениях углов ориентации армирующих слоев силового слоя пластины  $\theta = 0^\circ$  и  $\theta = 15^\circ$ . Полученные результаты представлены на рис. 1 и 2 в виде графиков зависимостей собственных частот  $f_i = f_i(\bar{h})$  и коэффициентов механических потерь  $\eta_i = \eta_i(\bar{h})$  первых пяти тонов колебаний рассматриваемой двухслойной безпорной прямоугольной пластины для трех значений температуры окружающей среды:  $T_C = 0^\circ \text{C}$ ,  $20^\circ \text{C}$ ,  $40^\circ \text{C}$ .

Прежде чем перейти к анализу полученных результатов, отметим, что в случае ориентации армирующих слоев силового слоя пластины относительно связанной с направлениями осей пластины глобальной системы координат  $xyz$  в направлениях  $\theta = 0^\circ$ ,  $90^\circ$  элементы матрицы жесткости  $A_{16} = A_{26} = A_{45} = B_{16} = B_{26} = D_{16} = D_{26} = 0$ . Тогда описывающая связанные затухающие колебания пластины система дифференциальных уравнений движения (см. [2]) упрощается и записывается в виде

$$\begin{aligned} A_{11}u_{0,xx} + A_{66}u_{0,yy} + (A_{12} + A_{66})v_{0,xy} + B_{11}\alpha_{0,xx} + \\ + B_{66}\alpha_{0,yy} + (B_{12} + B_{66})\beta_{0,xy} + \omega^2(I_0u_0 + I_1\alpha_0) = 0, \\ (A_{12} + A_{66})u_{0,xy} + A_{66}v_{0,xx} + A_{22}v_{0,yy} + (B_{12} + B_{66})\alpha_{0,xy} + \\ + B_{66}\beta_{0,xx} + B_{22}\beta_{0,yy} + \omega^2(I_0v_0 + I_1\beta_0) = 0, \\ A_{44}(\beta_{0,y} + w_{0,yy}) + A_{55}(\alpha_{0,x} + w_{0,xx}) + \omega^2I_0w_0 = 0, \\ B_{11}u_{0,xx} + B_{66}u_{0,yy} + (B_{12} + B_{66})v_{0,xy} + D_{11}\alpha_{0,xx} + \\ + D_{66}\alpha_{0,yy} + (D_{12} + D_{66})\beta_{0,xy} - A_{55}(\alpha_0 + w_{0,x}) + \omega^2(I_1u_0 + I_2\alpha_0) = 0, \\ (B_{12} + B_{66})u_{0,xy} + B_{66}v_{0,xx} + B_{22}v_{0,yy} + (D_{12} + D_{66})\alpha_{0,xy} + \\ + D_{66}\beta_{0,xx} + D_{22}\beta_{0,yy} - A_{44}(\beta_0 + w_{0,y}) + \omega^2(I_1v_0 + I_2\beta_0) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\omega$  — круговая собственная частота колебаний.

Если армирующие слои силового слоя пластины произвольно ориентированы относительно осей пластины ( $\theta \neq 0^\circ, 90^\circ$ ), то система дифференциальных уравнений движения такова:

$$\begin{aligned} A_{11}u_{0,xx} + 2A_{16}u_{0,xy} + A_{66}u_{0,yy} + A_{16}v_{0,xx} + (A_{12} + A_{66})v_{0,xy} + \\ + A_{26}v_{0,yy} + B_{11}\alpha_{0,xx} + 2B_{16}\alpha_{0,xy} + B_{66}\alpha_{0,yy} + B_{16}\beta_{0,xx} + \\ + (B_{12} + B_{66})\beta_{0,xy} + B_{26}\beta_{0,yy} + \omega^2(I_0u_0 + I_1\alpha_0) = 0, \\ A_{16}u_{0,xx} + (A_{12} + A_{66})u_{0,xy} + A_{26}u_{0,yy} + A_{66}v_{0,xx} + 2A_{26}v_{0,xy} + \\ + A_{22}v_{0,yy} + B_{16}\alpha_{0,xx} + (B_{12} + B_{66})\alpha_{0,xy} + B_{26}\alpha_{0,yy} + B_{66}\beta_{0,xx} + \\ + 2B_{26}\beta_{0,xy} + B_{22}\beta_{0,yy} + \omega^2(I_0v_0 + I_1\beta_0) = 0, \\ A_{44}(\beta_{0,y} + w_{0,yy}) + A_{45}(\alpha_{0,y} + \beta_{0,x} + 2w_{0,xy}) + A_{55}(\alpha_{0,x} + w_{0,xx}) + \omega^2I_0w_0 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& B_{11}u_{0,xx} + 2B_{16}u_{0,xy} + B_{66}u_{0,yy} + B_{16}v_{0,xx} + (B_{12} + B_{66})v_{0,xy} + \\
& + B_{26}v_{0,yy} + D_{11}\alpha_{0,xx} + 2D_{16}\alpha_{0,xy} + D_{66}\alpha_{0,yy} + D_{16}\beta_{0,xx} + \\
& + (D_{12} + D_{66})\beta_{0,xy} + D_{26}\beta_{0,yy} - A_{45}(\beta_0 + w_{0,y}) - \\
& - A_{55}(\alpha_0 + w_{0,x}) + \omega^2(I_1u_0 + I_2\alpha_0) = 0, \quad (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& B_{16}u_{0,xx} + (B_{12} + B_{66})u_{0,xy} + B_{26}u_{0,yy} + B_{66}v_{0,xx} + \\
& + 2B_{26}v_{0,xy} + B_{22}v_{0,yy} + D_{16}\alpha_{0,xx} + (D_{12} + D_{66})\alpha_{0,xy} + D_{26}\alpha_{0,yy} + \\
& + D_{66}\beta_{0,xx} + 2D_{26}\beta_{0,xy} + D_{22}\beta_{0,yy} - A_{44}(\beta_0 + w_{0,y}) - \\
& - A_{45}(\alpha_0 + w_{0,x}) + \omega^2(I_1v_0 + I_2\beta_0) = 0.
\end{aligned}$$

Анализ системы (1) позволяет заключить, что в случае двухслойной неоднородной пластины, силовой слой которой представляет собой ортотропную или трансверсально-изотропную структуру, возникает лишь мембранно-изгибное взаимодействие.

Система дифференциальных уравнений движения (2) описывает мембранно-изгибно-сдвиговые связанные затухающие колебания анизотропной слоистой композитной пластины. Связанность колебаний, обусловленная как несимметрией по толщине структуры, так и произвольностью углов ориентации армирующих слоев силового слоя пластины относительно глобальной системы координат  $xuz$ , порождает взаимные трансформации собственных форм.

Перейдем к анализу результатов исследования влияния относительной толщины слоя вязкоупругого полимера на величины собственных частот  $f_i$  и коэффициентов механических потерь  $\eta_i$  двухслойной безопорной прямоугольной пластины.

Судя по приведенным на рис. 1 и 2 данным, согласующимся с результатами работы [3], каждой моде собственных колебаний двухслойной пластины соответствует эффективная относительная толщина слоя «жесткого» изотропного вязкоупругого полимера  $\bar{h}_e$ , отвечающая максимуму функции  $\eta_i = \eta_i(\bar{h})$ . В зависимости от температуры окружающей среды  $T_C$  дальнейшее увеличение  $\bar{h}$  двухслойной пластины с ортотропным (трансверсально-изотропным) силовым слоем может приводить как к возрастанию, так и к убыванию величин собственных частот  $f_i$  без значимого изменения величин  $\eta_i$  (рис. 1). Если же силовой слой двухслойной пластины представляет собой моноклинную структуру, то для некоторых мод колебаний при  $\bar{h} > \bar{h}_e$  происходит быстрое убывание функций  $\eta_i = \eta_i(\bar{h})$  (рис. 2, кривые 2 для  $T_C = 0^\circ\text{C}$ ,  $20^\circ\text{C}$ ,  $40^\circ\text{C}$  и кривая 5 для  $T_C = 40^\circ\text{C}$  на графиках зависимостей  $\eta_i = \eta_i(\bar{h})$ ). При этом в зависимости от  $T_C$  происходит как возрастание, так и убывание функций  $f_i = f_i(\bar{h})$ . Отмеченное различие характера изменения функций  $\eta_i = \eta_i(\bar{h})$  объясняется тем, что в двухслойной пластине, силовой слой которой либо ортотропен, либо трансверсально-изотропен, возникает лишь мембранно-изгибное взаимодействие, не сопровождающееся изменением собственных форм колебаний по мере увеличения относительной толщины слоя «жесткого» изотропного вязкоупругого полимера на рассматриваемом отрезке изменения  $\bar{h} \in [0, 3]$ .

Если же структура армирования силового слоя моноклинная, то в двухслойной пластине на отрезке  $\bar{h} \in [0, 3]$  возникает мембранно-изгибно-сдвиговое взаимодействие, приводящее к изменению собственных форм колебаний (рис. 3 демонстрирует изменения собственных форм второй моды колебаний).

**2.** Влияние углов ориентации армирующих слоев силового слоя пластины  $\theta$  на величины собственных частот  $f_i$  и коэффициентов механических потерь  $\eta_i$  низших

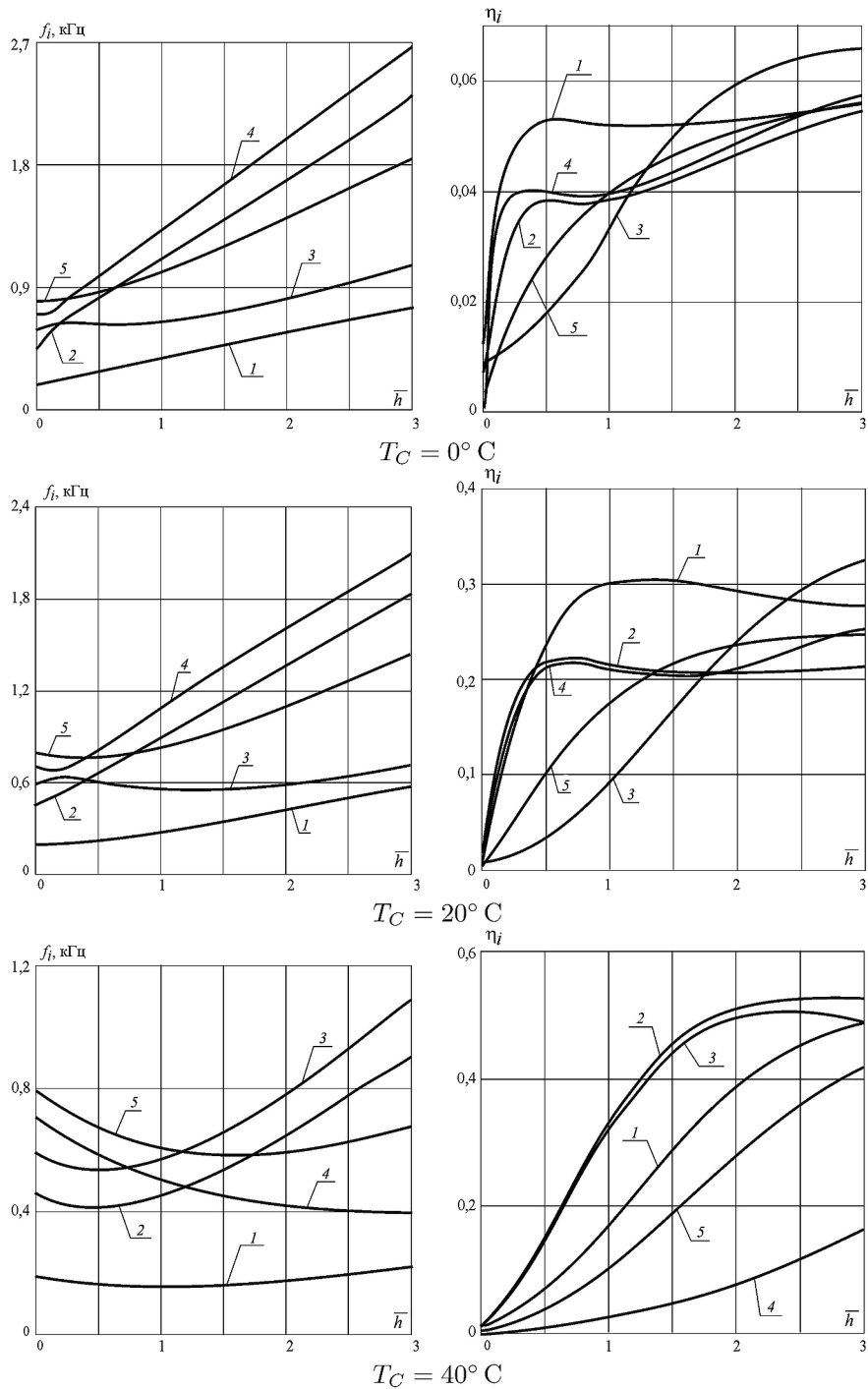


Рис. 1. Зависимости собственных частот и коэффициентов механических потерь низших тонов колебаний двухслойной безопорной прямоугольной пластины от относительной толщины слоя вязкоупругого материала ( $\theta = 0^\circ$ ).

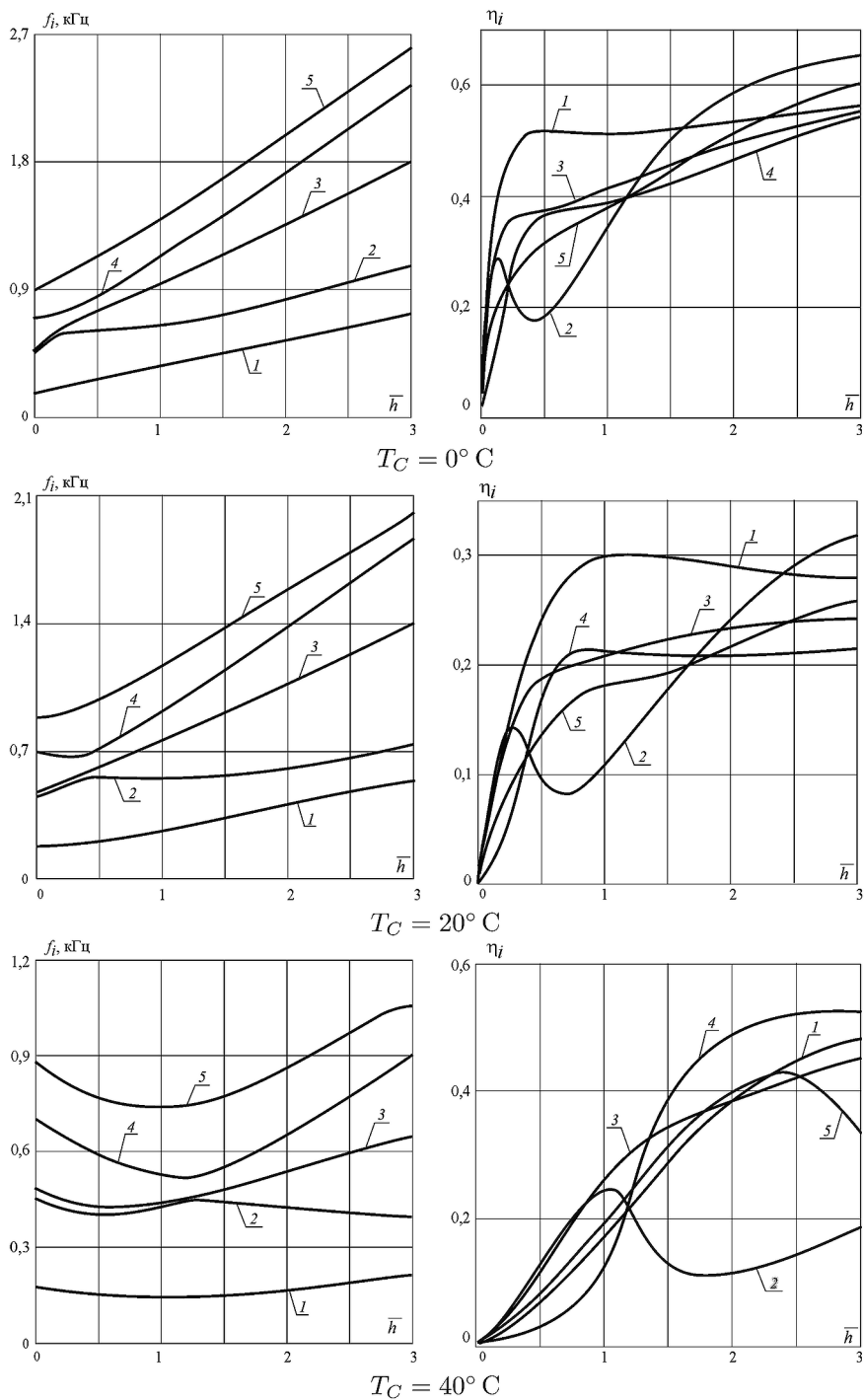


Рис. 2. Зависимости собственных частот и коэффициентов механических потерь низших тонов колебаний двухслойной безопорной прямоугольной пластины от относительной толщины слоя вязкоупругого материала ( $\theta = 15^\circ$ ).

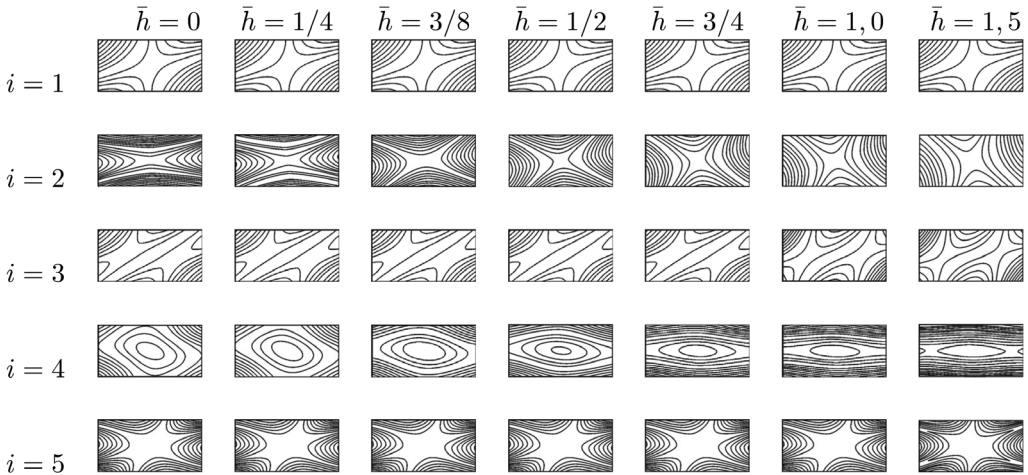


Рис. 3. Зависимость собственных форм низших тонов колебаний двухслойной безпорной прямоугольной пластины от относительной толщины слоя вязкоупругого материала ( $\theta = 15^\circ$ ,  $T = 20^\circ \text{C}$ ).

тонов колебаний ( $i = \overline{1, 7}$ ) изучалось на примере двухслойной безпорной прямоугольной пластины ( $a = 0,16 \text{ м}$ ,  $b = a/2 = 0,08 \text{ м}$ ,  $h_1 = h_2 = a/100 = 0,0016 \text{ м}$ ,  $\bar{h} = 1$ ), описанной в п. 1.

Вначале рассматривалась квазиоднородная прямоугольная пластина, образованная совокупностью одинаково ориентированных армирующих слоев углепластика HMS/DX-209 при отсутствии слоя «жесткого» изотропного вязкоупругого полимера. Такая пластина симметрична относительно срединной плоскости и, следовательно,  $B_{lm} = 0$  ( $l, m = 1, 2, 6$ ),  $I_1 = 0$ . Тогда описывающая затухающие колебания квазиоднородной анизотропной пластины связанная система пяти дифференциальных уравнений движения второго порядка (2) упрощается и разделяется на две независимые системы, первая из которых характеризует связанные мембранные колебания:

$$\begin{aligned}
 & A_{11}u_{0,xx} + 2A_{16}u_{0,xy} + A_{66}u_{0,yy} + A_{16}v_{0,xx} + \\
 & \quad + (A_{12} + A_{66})v_{0,xy} + A_{26}v_{0,yy} + \omega^2 I_0 u_0 = 0, \quad (3) \\
 & A_{16}u_{0,xx} + (A_{12} + A_{66})u_{0,xy} + A_{26}u_{0,yy} + A_{66}v_{0,xx} + 2A_{26}v_{0,xy} + A_{22}v_{0,yy} + \omega^2 I_0 v_0 = 0.
 \end{aligned}$$

Вторая система дифференциальных уравнений описывает связанные изгибно-сдвиговые колебания пластины:

$$\begin{aligned}
 & A_{44}(\beta_{0,y} + w_{0,yy}) + A_{45}(\alpha_{0,y} + \beta_{0,x} + 2w_{0,xy}) + A_{55}(\alpha_{0,x} + w_{0,xx}) + \omega^2 I_0 w_0 = 0, \\
 & D_{11}\alpha_{0,xx} + 2D_{16}\alpha_{0,xy} + D_{66}\alpha_{0,yy} + D_{16}\beta_{0,xx} + (D_{12} + D_{66})\beta_{0,xy} + \\
 & \quad + D_{26}\beta_{0,yy} - A_{45}(\beta_0 + w_{0,y}) - A_{55}(\alpha_0 + w_{0,x}) + \omega^2 I_2 \alpha_0 = 0, \quad (4) \\
 & D_{16}\alpha_{0,xx} + (D_{12} + D_{66})\alpha_{0,xy} + D_{26}\alpha_{0,yy} + D_{66}\beta_{0,xx} + 2D_{26}\beta_{0,xy} + \\
 & \quad + D_{22}\beta_{0,yy} - A_{44}(\beta_0 + w_{0,y}) - A_{45}(\alpha_0 + w_{0,x}) + \omega^2 I_2 \beta_0 = 0.
 \end{aligned}$$

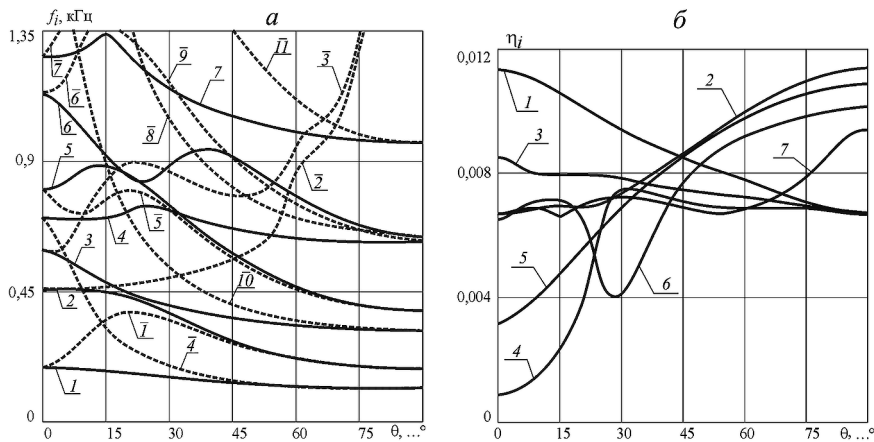


Рис. 4. Зависимости (а) собственных частот и (б) коэффициентов механических потерь низших тонов колебаний квазиоднородной пластины от угла ориентации армирующих слоев углепластика HMS/DX-209.

Неклассический вид графиков зависимостей собственных частот  $f_i = f_i(\theta)$  и коэффициентов механических потерь  $\eta_i = \eta_i(\theta)$  от угла ориентации слоев однонаправленного углепластика  $\theta \in [0^\circ, 90^\circ]$  ( $i = \overline{1, 7}$ ), представленных на рис. 4, свидетельствует о фейерверке эффектов, порождаемых связанностью мод колебаний пластины. Анализ полученных результатов позволил установить, что в зависимости от значения угла  $\theta$  ( $\theta \in [0^\circ, 90^\circ]$ ) каждой моде собственных колебаний соответствуют несколько различных собственных форм, порождаемых чередой взаимных трансформаций собственных форм взаимодействующих мод колебаний.

Для демонстрации описанных эффектов рассмотрим последовательность взаимных трансформаций взаимодействующих первой, второй и четвертой связанных мод колебаний, графики зависимостей собственных частот  $f_i = f_i(\theta)$  и коэффициентов механических потерь  $\eta_i = \eta_i(\theta)$  ( $i = 1, 2, 4$ ) которых приведены на рис. 4 (кривые 1, 2, 4). На рис. 4, а также нанесены графики зависимостей парциальных собственных частот  $\bar{f}_i = \bar{f}_i(\theta)$  (кривые  $\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}$ ). Расчет значений парциальных собственных частот производился при выполнении условия  $\bar{Q}_{16} = \bar{Q}_{26} = \bar{Q}_{45} = 0$  в комплексной матрице жесткости слоя углепластика HMS/DX-209 [1]. Величины парциальных собственных частот определялись по «свободным» комплексным модулям упругости  $E_{xx} = E_{xx}(\theta)$  и «свободным» комплексным модулям межслойного сдвига  $G_{xz} = G_{xz}(\theta)$ ,  $G_{yz} = G_{yz}(\theta)$ , в то время как «свободный» комплексный модуль сдвига в плоскости армирования  $G_{xy} = G_{xy}(\theta)$  заменялся «чистым» комплексным модулем сдвига в плоскости армирования  $\bar{G}_{xe}(\theta) = G_{xy}(\theta)/[1 - \eta_{xy,x}(\theta) \cdot \eta_{x,xy}(\theta)]$ , соответствующим полному «запрещению» изгибных деформаций при сдвиге пластины в плоскости армирования. Здесь  $\eta_{x,xy}(\theta)$ ,  $\eta_{xy,x}(\theta)$  – коэффициенты взаимного влияния первого и второго рода слоя ПКМ в локальной системе координат. Понятия «свободных» и «чистых» модулей введены Фойгтом [4]. Изменения собственных форм низших тонов связанных колебаний квазиоднородной пластины в зависимости от угла ориентации армирующих слоев углепластика HMS/DX-209 приведены на рис. 5. Собственные формы парциальных мод колебаний, не зависящие от ориентации армирующих слоев, представлены на рис. 6.

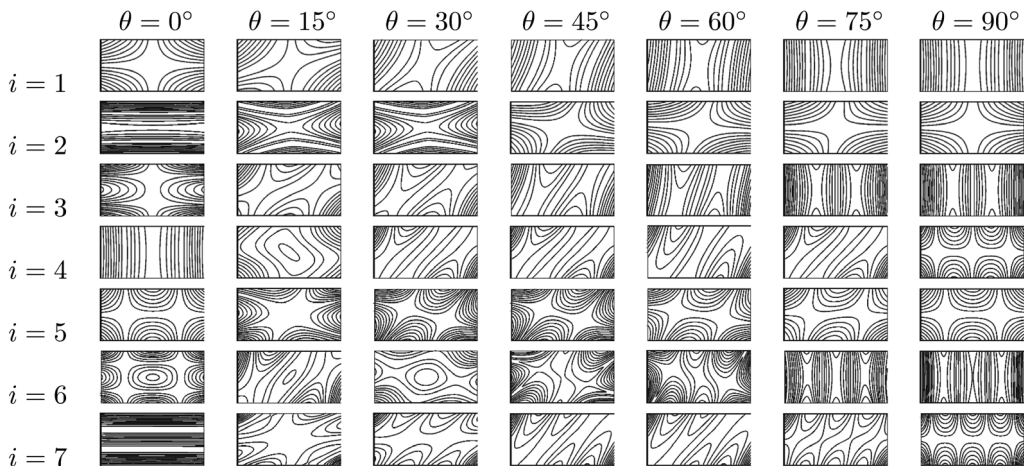


Рис. 5. Зависимость собственных форм связанных мод колебаний квазигодородной пластины от угла ориентации армирующих слоев углепластика HMS/DX-209.

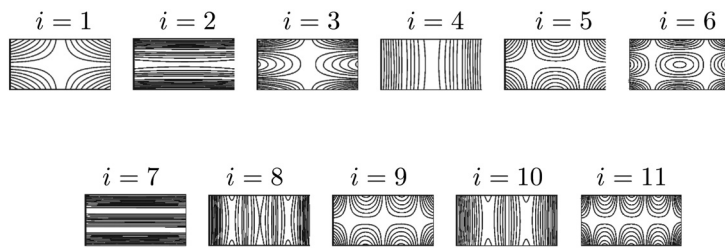


Рис. 6. Собственные формы парциальных мод колебаний квазигодородной пластины из углепластика HMS/DX-209.

Совместный анализ приведенных на рис. 4–6 зависимостей позволяет утверждать, что на отрезке  $\theta \in [0^\circ, 30^\circ]$  происходят взаимные трансформации собственных форм первой, второй и четвертой мод связанных колебаний. Об этом свидетельствует появление точек пересечения графиков зависимостей их парциальных собственных частот от угла ориентации армирующих слоев  $\bar{f}_i = \bar{f}_i(\theta)$  (кривые  $\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}$  на рис. 4, а) внутри областей, ограничиваемых функциями  $f_m = f_m(\theta)$  и  $f_n = f_n(\theta)$  связанных мод колебаний (кривые  $1, 2, 4$  на рис. 4, а). Пересечение графиков функций  $\bar{f}_2 = \bar{f}_2(\theta)$  и  $\bar{f}_4 = \bar{f}_4(\theta)$  в точке  $\theta \approx 8^\circ$  свидетельствует о том, что на прилегающем к ней отрезке с нечеткими границами по оси  $\theta$  начинается взаимная трансформация собственных форм второй и четвертой связанных мод колебаний. Поэтому при  $\theta > 8^\circ$  собственная форма второй связанной моды трансформируется в собственную форму четвертой связанной моды, а собственная форма четвертой связанной моды — в собственную форму второй связанной моды. На отрезке с условным центром в точке  $\theta \approx 14^\circ$  процесс взаимной трансформации собственных форм второй и четвертой мод дополняется процессом взаимной трансформации собственных форм первой и второй мод связанных колебаний. Это подтверждается пересечением графиков функций  $\bar{f}_1 = \bar{f}_1(\theta)$  и  $\bar{f}_4 = \bar{f}_4(\theta)$ . Следовательно, при  $\theta > 14^\circ$  собственная форма первой связанной моды трансформируется в собственную форму второй связанной моды, а собственная форма второй связанной моды трансформируется



в собственную форму первой связанной моды. Процесс взаимных трансформаций окончательно завершается при  $\theta = 90^\circ$ . Поэтому собственные формы первой и четвертой мод связанных колебаний при  $\theta = 0^\circ$  тождественны собственным формам второй и первой мод связанных колебаний при  $\theta = 90^\circ$ . Следствием множества взаимных трансформаций на отрезке  $\theta \in [0^\circ, 90^\circ]$  является тождественность собственной формы второй моды связанных колебаний при  $\theta = 0^\circ$  собственной форме четырнадцатой моды связанных колебаний при  $\theta = 90^\circ$ .

Аналогичная картина наблюдается и для более высоких тонов колебаний. Например, пересечение графиков функций  $f_3 = f_3(\theta)$  и  $f_5 = f_5(\theta)$  в точке  $\theta \approx 8^\circ$  свидетельствует о том, что на примыкающем к ней отрезке изменения  $\theta$  происходит взаимная трансформация собственных форм третьей и пятой связанных мод колебаний. При  $\theta > 8^\circ$  собственная форма третьей связанной моды трансформируется в собственную форму пятой связанной моды, а собственная форма пятой связанной моды — в собственную форму третьей связанной моды. В свою очередь, по мере увеличения угла ориентации армирующих слоев при  $\theta \approx 16^\circ$  и  $\theta \approx 18^\circ$  графики парциальных частот  $f_3 = f_3(\theta)$  и  $f_5 = f_5(\theta)$  пересекаются графиком парциальной частоты  $f_{10} = f_{10}(\theta)$ , что также свидетельствует о появлении областей взаимных трансформаций третьей и пятой связанных мод колебаний. Результатом этих трансформаций является тождественность собственных форм пятой моды связанных колебаний при  $\theta = 0^\circ$  и  $\theta = 90^\circ$ . Собственная форма третьей связанной моды колебаний при  $\theta = 90^\circ$ , тождественная собственной форме десятой связанной моды колебаний при  $\theta = 0^\circ$ , приведена на рис. 5.

Приведенный анализ позволяет заключить, что взаимная трансформация собственных форм связанных мод колебаний безопорной квазиоднородной прямоугольной пластины возникает в случае, если хотя бы в одном из направлений пластины  $x$  или  $y$  одна из собственных форм характеризуется четным числом четвертей волны, а другая собственная форма — нечетным числом четвертей волны.

**3.** Перейдем теперь к исследованию влияния угла ориентации армирующих слоев силового слоя  $\theta$  на величины собственных частот и коэффициентов механических потерь низших тонов колебаний двухслойной безопорной пластины. Поскольку  $\theta \in [0^\circ, 90^\circ]$ , то двухслойная пластина совершает связанные мембранно-изгибно-сдвиговые колебания, описываемые системой дифференциальных уравнений (2). Численные исследования проводились путем варьирования угла  $\theta$  при фиксированном значении относительной толщины слоя вязкоупругого полимера  $\bar{h} = 1$ .

Результаты исследования представлены на рис. 7, 8 в виде графиков зависимостей собственных частот  $f_i = f_i(\theta)$ , коэффициентов механических потерь  $\eta_i = \eta_i(\theta)$  и собственных форм первых семи тонов колебаний рассматриваемой пластины для трех значений температуры окружающей среды:  $T_C = 0^\circ \text{C}$ ,  $20^\circ \text{C}$ ,  $40^\circ \text{C}$ . Приведенные на рис. 7, 8 данные качественно согласуются с полученными ранее результатами. Свидетельством этого является множество взаимных трансформаций собственных форм связанных мод колебаний безопорной двухслойной прямоугольной пластины. Последовательность взаимных трансформаций собственных форм помимо ориентации армирующих слоев силового слоя пластины также определяется частотой колебаний и температурой окружающей среды, поскольку упруго-диссипативные характеристики слоя «жесткого» изотропного вязкоупругого полимера демонстрируют существенную зависимость от этих параметров. Из сопоставления результатов, представленных на рис. 7, 8, следует, что при  $T_C = 0^\circ \text{C}$  и  $T_C = 20^\circ \text{C}$  для всех  $\theta \in [0^\circ, 90^\circ]$  последовательность собственных форм первых семи тонов связанных

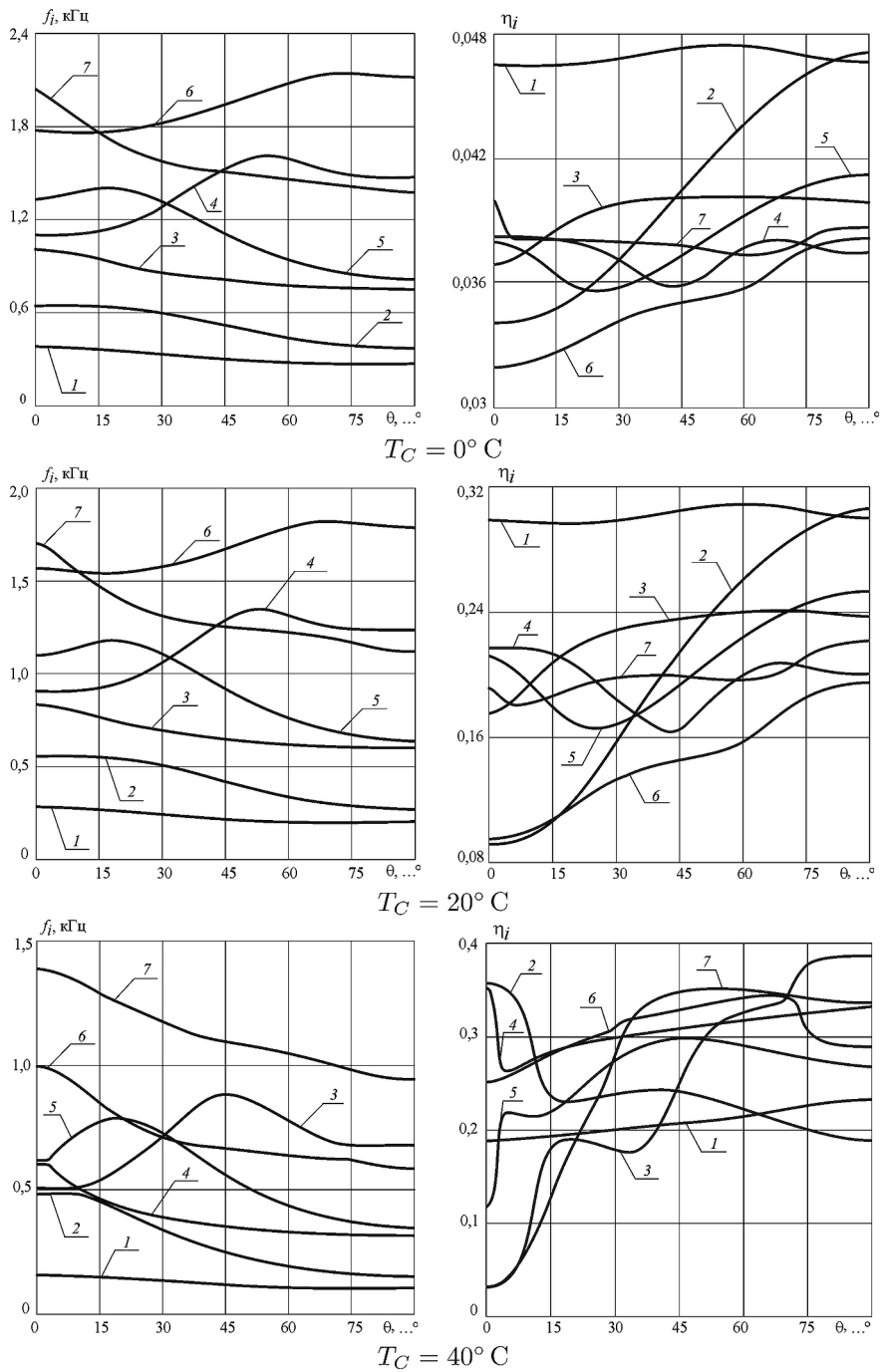


Рис. 7. Зависимости собственных частот и коэффициентов механических потерь низших тонов колебаний двухслойной безопорной прямоугольной пластины от угла ориентации армирующих слоев углепластика HMS/DX-209.

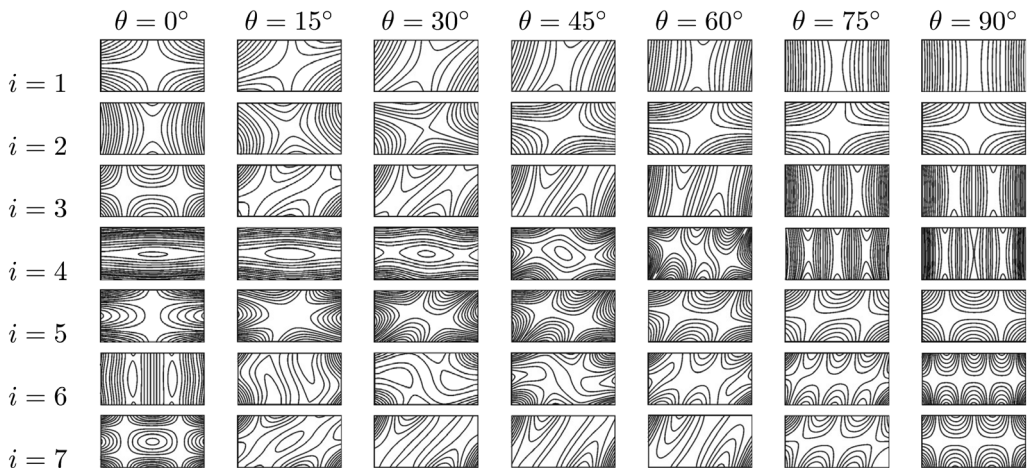


Рис. 8. Зависимость собственных форм низших тонов колебаний двухслойной безопорной прямоугольной пластины от угла ориентации армирующих слоев углепластика HMS/DX-209 ( $\bar{h} = 1$ ,  $T_C = 0^\circ \text{ C}$ ,  $T_C = 20^\circ \text{ C}$ ).

колебаний двухслойной пластины совпадает. В то же время слой «жесткого» изотропного вязкоупругого полимера приводит к отличию этой последовательности от последовательности собственных форм квазиоднородной пластины из углепластика HMS/DX-209. В частности, в отличие от квазиоднородной пластины, в процесс трансформации собственных форм низших тонов колебаний которой вовлечены четыре связанные моды — первая, вторая и четвертая (рис. 4, 5), в двухслойной пластине в аналогичном процессе участвуют лишь две связанные моды (рис. 8) — первая и вторая. Взаимодействие первой и второй связанных мод колебаний приводит к взаимной трансформации их собственных форм. Результатом этой трансформации является тождественность собственных форм первой и второй мод связанных колебаний при  $\theta = 0^\circ$  собственным формам второй и первой мод связанных колебаний при  $\theta = 90^\circ$ .

Аналогичная картина наблюдается и для более высоких тонов колебаний.

Дальнейшее повышение температуры окружающей среды до  $T_C = 40^\circ \text{ C}$  сопровождается очередными изменениями последовательности взаимных трансформаций собственных форм колебаний.

Кстати, стоит отметить, что вследствие температурно-частотной зависимости вещественной части комплексного модуля упругости  $\text{Re} E(f, T_C)$  и коэффициента механических потерь  $\eta(f, T_C)$  «жесткого» вязкоупругого полимера повышение температуры окружающей среды на отрезке  $T_C \in [0^\circ \text{ C}, 40^\circ \text{ C}]$  влечет за собой понижение собственных частот и повышение коэффициентов механических потерь всех рассматриваемых мод колебаний при  $\theta \in [0^\circ, 90^\circ]$ .

## Литература

1. Паршина Л. В., Рябов В. М., Ярцев Б. А. Рассеяние энергии при колебаниях неоднородных композитных структур. 2. Метод решения // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 4. С. 678–688.
2. Паршина Л. В., Рябов В. М., Ярцев Б. А. Рассеяние энергии при колебаниях неоднородных композитных структур. 1. Постановка задачи // Вестник Санкт-Петербургского университета. Ма-

3. Чернышев В. М. Демпфирование колебаний механических систем покрытиями из полимерных материалов. М.: Наука, 2004. 288 с.

4. Voigt W. Lehrbuch der Kristallphysik. Leipzig und Berlin: Teubner, 1928. 978 s.

Статья поступила в редакцию 20 ноября 2017 г.;  
после доработки 29 декабря 2017 г.;  
рекомендована в печать 27 сентября 2018 г.

#### Контактная информация:

Паршина Людмила Валентиновна — канд. техн. наук, ст. науч. сотр.; ludaparshina@mail.ru

Рябов Виктор Михайлович — д-р физ.-мат. наук, проф.; v.ryabov@spbu.ru

Ярцев Борис Александрович — д-р техн. наук, начальник сектора; boris\_yar@mail.ru

## Energy dissipation during vibrations of non-uniform composite structures. 3. Numerical experiments

L. V. Parshina<sup>1</sup>, V. M. Ryabov<sup>2</sup>, B. A. Yartsev<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Krylov State Research Center, Moskovskoye shosse, 44, St. Petersburg, 196158, Russian Federation

<sup>2</sup> St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

**For citation:** Parshina L. V., Ryabov V. M., Yartsev B. A. Energy dissipation during vibrations of non-uniform composite structures. 3. Numerical experiments. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2019, vol. 6 (64), issue 1, pp. 144–156. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.111> (In Russian)

The influence of the relative thickness of the “stiff” viscoelastic layer polymer and the orientation of the reinforcing layers of the power layer on the values of their natural frequencies and loss factors of damped oscillations unsupported two-layered composite plate is investigated. It has been established that each natural vibration mode of two-layered plate corresponds to a certain effective relative thickness of isotropic viscoelastic polymer layer. Further increase in relative thickness for plates with orthotropic or transversally isotropic bearing layer depending on ambient temperature may result in both growth and decrease of natural frequencies without any considerable change of their energy dissipation. For the plates with monoclinic bearing layer, increase in relative thickness of isotropic viscoelastic polymer layer is accompanied by both decrease and increase of loss factor for different vibration modes because these structure have membrane-bending-shearing interaction that results in the change of natural vibration shapes. It is shown that change in stacking sequence of reinforcing layers in the bearing layer with respect to global axes of two-layered plate brings about mutual transformation domains of coupled vibration modes. It has been established that mutual transformation of natural coupled vibration mode shapes of unsupported quasi-uniform rectangular plate appears in case if at least in one of the plate directions one of the natural shapes has an even number of quarter-wavelengths, whereas another natural shape has odd. It has been demonstrated that temperature-frequency relationship of elastic-dissipative characteristics of the “stiff” viscoelastic polymer has a considerable effect upon natural frequencies and loss factors of all the investigated vibration modes for unsupported rectangular two-layered plate.

**Keywords:** anisotropy, vibrations, natural frequency, loss factor.

## References

1. Parshina L. V., Ryabov V. M., Yartsev B. A., “Energy dissipation during vibrations of non-uniform composite structures. 2. Method of solution”, *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **5 (63)**, issue 4, 678–688 (2018). (In Russian)
2. Parshina L. V., Ryabov V. M., Yartsev B. A., “Energy dissipation during vibrations of non-uniform composite structures. 1. Formulation of problem”, *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **5 (63)**, issue 2, 300–309 (2018). (In Russian) <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.210>
3. Chernyshev V. M., *Vibration damping of mechanical systems by means of polymeric coatings* (Nauka Publ., Moscow, 2004, 288 p.). (In Russian)
4. Voigt W., *Lehrbuch der Kristallphysik* (Teubner, Leipzig, Berlin, 1928, 978 s.).

Received: November 20, 2017

Revised: December 29, 2017

Accepted: September 27, 2018

### Author's information:

Ludmila V. Parshina — ludaparshina@mail.ru

Victor M. Ryabov — v.ryabov@spbu.ru

Boris A. Yartsev — boris\_yar@mail.ru