

АСТРОНОМИЯ

УДК 521.14

MSC 70F15

Геометрия фигуры Гюйгенса—Роша*

К. В. Холшевников^{1,2}¹ Санкт-Петербургский государственный университет,

Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

² Институт прикладной астрономии РАН,

Российская Федерация, 191187, Санкт-Петербург, наб. Кутузова, 10

Для цитирования: Холшевников К. В. Геометрия фигуры Гюйгенса—Роша // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 1. С. 170–176. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.113>

Теория фигур небесных тел, находящихся в состоянии гидростатического равновесия под действием сил давления, гравитационных и центробежных, во второй половине XX века приняла форму строгой математической теории, опирающейся на фундаментальные законы физики. Важное место в теории занимает фигура Гюйгенса—Роша, вся масса которой сосредоточена в центре, а равновесную форму принимает вращающаяся атмосфера. Свойства фигуры тщательно изучены. Известно, в частности, что каждая изобара (поверхность равного давления) сама является одной из трехпараметрического семейства поверхностей Гюйгенса—Роша. Однако выпуклость (или ее отсутствие) в литературе не обсуждалась, насколько нам известно. Между тем среди фигур равновесия встречаются и невыпуклые. В настоящей статье мы находим кривизну меридионального сечения произвольной фигуры Гюйгенса—Роша как в замкнутой форме, так и с использованием ряда по степеням основного в теории фигур равновесия параметра Клеро. Удалось доказать, что кривизна положительна и отделена от нуля. Таким образом, каждая поверхность из семейства фигур Гюйгенса—Роша выпукла и не имеет точек уплощения. Более того, ни одна из кривых на ее поверхности не имеет точек выпрямления.

Ключевые слова: фигура равновесия, фигура Гюйгенса—Роша, гравитационный потенциал, кривизна плоской кривой.

Введение. В теории фигур небесных тел, находящихся в состоянии гидростатического равновесия под действием сил давления, гравитационных и центробежных [1–6], важное место занимают фигуры Гюйгенса—Роша [7, 8]. Их свойства тща-

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-02-00552).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2019

тельно изучены. Однако выпуклость (или ее отсутствие) в литературе не обсуждалась, насколько нам известно. Между тем выпуклость фигур равновесия неочевидна. Более того, ответвляющиеся от эллипсоида Маклорена фигуры могут не быть выпуклыми [1, 2].

В настоящей статье мы сводим задачу исследования трехпараметрического семейства поверхностей Гюйгенса—Роша к исследованию однопараметрического семейства кривых $S(Q)$, порожденных меридиональным сечением произвольной фигуры Гюйгенса—Роша. Затем находим кривизну $S(Q)$ как в замкнутой форме, так и с использованием равномерно сходящегося ряда по степеням основного в теории фигур равновесия параметра Клеро Q . Удалось доказать, что кривизна отделена от нуля. Таким образом, каждая поверхность из семейства фигур Гюйгенса—Роша выпукла и не имеет точек уплощения. Более того, ни одна из кривых на ее поверхности не имеет точек выпрямления.

Фигура Гюйгенса—Роша. В этом разделе приведем известные сведения о фигуре Гюйгенса—Роша [7, 8]. Она представляет собой фигуру равновесия небесного тела, состоящего из точечной массы, окруженной невесомой атмосферой. Тело вращается твердотельно вокруг фиксированной в пространстве и теле оси с постоянной угловой скоростью. Невесомость атмосферы означает, что ее вкладом в гравитацию можно пренебречь. Однако она обладает обычными упругими свойствами, поэтому можно говорить об изобарах (поверхностях равного давления). Известно, что они совпадают с эквиденситами (поверхностями равной плотности), но невесомость атмосферы делает это понятие неопределенным.

Фигура Гюйгенса—Роша является телом вращения, симметричным относительно экваториальной плоскости. Тем же свойством обладают ее изобары. Достаточно поэтому ограничиться ее меридиональным сечением. В полярных координатах уравнение изобары $S(a, R, Q)$ имеет вид

$$r = RaF(a, Q, \theta), \quad (1)$$

где

$$F = \frac{3 \sin u}{Qa^{3/2} \sin \theta}, \quad u = \frac{1}{3} \arcsin(Qa^{3/2} \sin \theta).$$

Здесь приняты следующие обозначения: r — радиус, θ — угловое расстояние от северного полюса (дополнение широты), a — безразмерный параметр, различающий изобары, R — полярный радиус фигуры, Q — безразмерный параметр Клеро (с точностью до нормировки), характеризующий быстроту вращения тела. Переменные и параметры изменяются в замкнутой области:

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq a \leq 1, \quad 0 \leq Q \leq 1. \quad (2)$$

Используя предельный переход при обращении $\sin \theta$, Q или a в нуль, полагаем

$$F(0, Q, \theta) = F(a, 0, \theta) = F(a, Q, 0) = 1.$$

При $a = 1$ получаем поверхность фигуры $S = S(1, R, Q)$, при $a = 0$ — ее центр.

Очевидно, $S(a, R, Q) = S(1, \tilde{R}, \tilde{Q})$ при

$$\tilde{R} = Ra, \quad \tilde{Q} = Qa^{3/2}.$$

Кроме того, R играет несущественную роль масштабного множителя. Поэтому свойства семейства $S(a, R, Q)$ сразу выводятся из свойств семейства $S(1, 1, Q)$. При этом по-прежнему имеем $0 \leq Q \leq 1$.

Итак, достаточно положить $a = 1$, $R = 1$ в (1) и вместо трехпараметрического семейства $S(a, R, Q)$ изучить свойства однопараметрического семейства кривых $S(Q)$. Каждая кривая семейства задается уравнением

$$r = F(Q, \theta), \quad (3)$$

где

$$F = \frac{3 \sin u}{Q \sin \theta}, \quad u = \frac{1}{3} \arcsin(Q \sin \theta).$$

Переменные изменяются в замкнутой области

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq Q \leq 1. \quad (4)$$

Входящая в (3) функция F в области (4) разлагается в ряд по степеням $Q \sin \theta$, который можно представить в виде

$$r = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (5)$$

где $x = \sin^2 \theta$, а коэффициенты определяются выражениями

$$a_n = b_n Q^{2n}, \quad b_n = \frac{(3n)!}{n!(2n+1)!} \left(\frac{4}{27}\right)^n \sim \sqrt{\frac{3}{16\pi n^3}}. \quad (6)$$

Заметим, что

$$b_0 = 1, \quad b_{n+1} = \frac{2(3n+1)(3n+2)}{9(n+1)(2n+3)} b_n. \quad (7)$$

Асимптотика (6) обеспечивает равномерную относительно Q, θ сходимость ряда (5). Однако уже для первой производной r' по θ это не так. И действительно, на экваторе касательная плоскость при $Q < 1$ перпендикулярна плоскости экватора, но при $Q = 1$ экватор служит ребром фигуры. В этом случае угол ψ между предельными положениями касательных плоскостей северного и южного полушарий дается равенством

$$\psi = 2 \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3}} = 98^\circ.21. \quad (8)$$

Из (5), (6) следует, что r строго возрастает вместе с θ от полюса до экватора, причем

$$r \geq 1, \quad (9)$$

где равенство достигается на полюсах.

Полярное сжатие. По определению полярное сжатие равно разности экваториального и полярного радиусов в единицах экваториального радиуса:

$$\alpha = \frac{F(Q, \pi/2) - F(Q, 0)}{F(Q, \pi/2)} = 1 - \frac{\sin 3\xi}{3 \sin \xi}, \quad (10)$$

где введено обозначение $\arcsin Q = 3\xi$, $Q = \sin 3\xi$. Простая тригонометрия позволяет вывести из (10) представление

$$\alpha = \frac{4}{3} \sin^2 \xi. \quad (11)$$

Таким образом, с ростом Q от нуля до единицы, соответственно ξ от 0 до $\pi/6$, сжатие α возрастает от 0 до $1/3$.

Кривизна. Докажем выпуклость произвольной фигуры Гюйгенса—Роша, для чего вычислим кривизну кривой (3). По симметрии север—юг можно ограничиться частью меридиана от северного полюса до экватора, $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

Кривизна K плоской кривой в полярных координатах определяется отношением [9, 10]

$$K = \frac{K_1}{K_2^{3/2}}, \quad (12)$$

где

$$K_1 = rK_3 + 2r'^2, \quad K_2 = r^2 + r'^2, \quad K_3 = r - r''. \quad (13)$$

Кривая (3) с ростом θ обходится по часовой стрелке. Поэтому в (12) принято правило знаков, по которому кривизна считается положительной, если касательная тоже вращается по часовой стрелке.

При $Q = 0$, как показано выше, $r = 1$ тождественно. Кривая S сводится к единичной окружности с единичной же кривизной. Считаем ниже $0 < Q \leq 1$.

Неравенство (9) влечет $K_2(Q, \theta) \geq 1$. Нас интересует только знак K , поэтому о K_2 можно больше не упоминать.

Продифференцируем (5) почленно:

$$r' = 2 \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1/2}. \quad (14)$$

Из (6), (14) следует положительность r' вне экватора. На экваторе $r' = 0$, если $Q < 1$. При $x = 1$ или, что то же, $Q = 1, \theta = \pi/2$, ряд в (14) расходится и налицо неопределенность вида $0 \cdot \infty$. Ниже мы увидим, что при $Q = 1, \theta = \pi/2$ производной не существует, но односторонние производные существуют и равны $r' = \pm\sqrt{3}/2$ в согласии с (8).

Продолжим дифференцирование:

$$r'' = \sum_{n=0}^{\infty} [(2n+1)(2n+2)a_{n+1} - 4n^2 a_n] x^n. \quad (15)$$

Отсюда согласно (12) имеем

$$K_3(Q, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(Q) x^n, \quad (16)$$

где

$$h_n = (4n^2 + 1)a_n - (2n+1)(2n+2)a_{n+1}.$$

Используя рекуррентность (7), получим

$$h_n = \left[4n^2 + 1 - \frac{4(2n+1)(3n+1)(3n+2)}{9(2n+3)} Q^2 \right] b_n Q^{2n}. \quad (17)$$

Коэффициент h_0 положителен:

$$h_0(Q) = 1 - \frac{8}{27}Q^2, \quad \min_Q h_0(Q) = h_0(1) = \frac{19}{27}.$$

При $n > 0$ коэффициент h_n принимает наименьшее (отрицательное) значение при $Q = 1$:

$$\min_Q h_n(Q) = h_n(1) = -\frac{34n - 19}{9(2n + 3)}b_n. \quad (18)$$

Обратим внимание, что (18) справедливо и при $n = 0$. В силу асимптотики (6) ряд (16) сходится абсолютно и равномерно в области (4), причем

$$\min_{Q, \theta} K_3(Q, \theta) = K_3(1, \pi/2).$$

Итак, достаточно исследовать предельную кривую Гюйгенса—Роша при $Q = 1$ в левой полукрестности точки $\theta = \pi/2$. Уравнение (3) упрощается:

$$r = \frac{3 \sin(\theta/3)}{\sin \theta}.$$

Вычислим производные:

$$r' = \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\cos \frac{\theta}{3} \sin \theta - 3 \sin \frac{\theta}{3} \cos \theta \right),$$

$$r'' = \frac{2}{3 \sin^3 \theta} \left(9 \sin \frac{\theta}{3} \cos^2 \theta + 4 \sin \frac{\theta}{3} \sin^2 \theta - 3 \cos \frac{\theta}{3} \cos \theta \sin \theta \right),$$

откуда

$$K_3(1, \theta) = \frac{1}{3 \sin^3 \theta} \left(6 \cos \frac{\theta}{3} \cos \theta \sin \theta + \sin \frac{\theta}{3} \sin^2 \theta - 18 \sin \frac{\theta}{3} \cos^2 \theta \right).$$

При $\theta = \pi/2$ имеем

$$r = \frac{3}{2}, \quad r' = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad r'' = \frac{4}{3}.$$

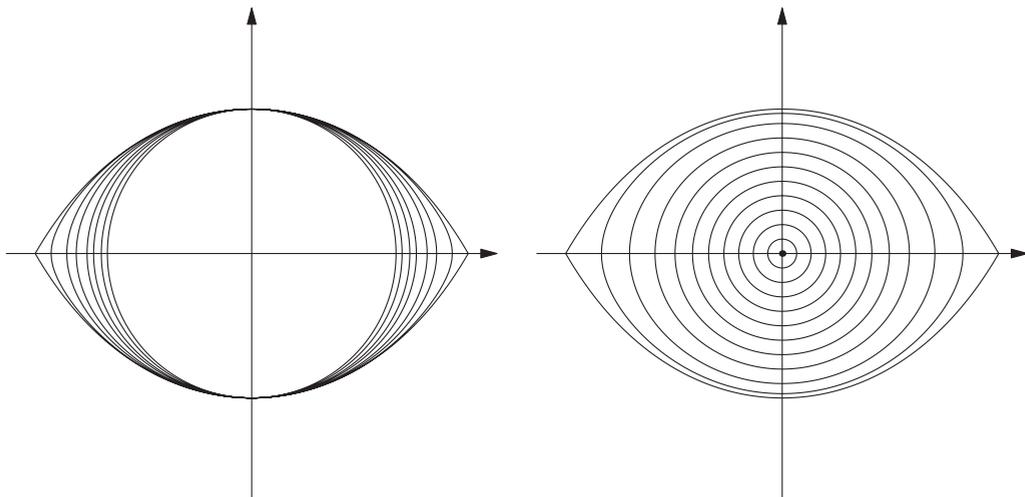
Отсюда с учетом (13) получаем

$$K_3 \left(1, \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{6}, \quad K_2 \left(1, \frac{\pi}{2} \right) = 3, \quad K_1 \left(1, \frac{\pi}{2} \right) = \frac{7}{4}, \quad K \left(1, \frac{\pi}{2} \right) = \frac{7}{12\sqrt{3}}.$$

Закключаем, что кривизна положительна и отделена от нуля. Кривая $S(Q)$ при всех допустимых $Q \leq 1$ выпукла и не имеет точек выпрямления. Поверхность Гюйгенса—Роша выпукла и не имеет точек уплощения. Более того, ни одна из кривых на ее поверхности не имеет точек выпрямления.

Замечание. При $Q = 1$, как отмечено выше, кривая $S(1)$ имеет угловую точку при $\theta = \pi/2$, а фигура Гюйгенса—Роша — ребро. Кривизну $S(1)$ на экваторе следует понимать как предел при $\theta \rightarrow \pi/2 \pm 0$. В нашем случае оба односторонних предела равны между собой.

В заключение проиллюстрируем установленные свойства фигур Гюйгенса—Роша, возвращаясь к общему (с точностью до масштаба) семейству $S(a, 1, Q)$. На рисунке слева представлено семейство поверхностей $S(1, 1, Q)$ фигур Гюйгенса—Роша,



Меридиональные сечения фигур Гюйгенса—Роша. Слева — $S(1, 1, Q)$ для $Q = 0, 0.5, 0.7, 0.8, 0.9, 0.95, 0.99, 1$. Справа — $S(a, 1, 1)$ для $a = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.97, 1$.

где Q изменяется от нуля (сфера) до единицы (фигура с ребром). На рисунке справа представлено семейство изобар предельной фигуры $S(a, 1, 1)$, где a изменяется от нуля (точка в центре) до единицы (поверхность, имеющая ребро). В первом случае уравнение кривых семейства имеет вид (3). Во втором —

$$r = \frac{3 \sin u}{\sqrt{a} \sin \theta}, \quad u = \frac{1}{3} \arcsin \left(a^{3/2} \sin \theta \right).$$

Литература

1. *Liapunoff A. M.* Recherches dans la théorie de la figure des corps célestes // Notes de l'Académie Impériale des Sciences. 1903. Т. 14, № 7. Р. 1–37. Перевод на русский язык см. в кн.: Ляпунов А. М. Соч. Т. 3. М.: изд АН СССР, 1959. С. 114–146.
2. *Пуанкаре А.* Фигуры равновесия жидкой массы. М.; Ижевск: РХД, 2000. 208 с.
3. *Аппель П.* Фигуры равновесия вращающейся жидкости. Л.; М.: ОНТИ, 1936. 376 с.
4. *Лигтенштейн Л.* Фигуры равновесия вращающейся жидкости. М.: Наука, 1965. 252 с.
5. *Чандрасекар С.* Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1973. 289 с.
6. *Кондратьев Б. П.* Теория потенциала и фигуры равновесия. М.; Ижевск: Изд-во ИКИ, 2003. 624 с.
7. *Питъев Н. П., Титов В. Б., Холшевников К. В.* Фигуры равновесия небесных тел. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2002. 108 с.
8. *Kholshchevnikov K. V., Kurdubov S. L.* Convergence of Liapunov series for Huygens—Roche figures // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2004. Vol. 89, issue 1. Р. 83–96.
9. *Рацевский П. К.* Курс дифференциальной геометрии. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. 428 с.
10. *Фавар Ж.* Курс локальной дифференциальной геометрии. М.: ИЛ, 1960. 560 с.

Статья поступила в редакцию 5 августа 2018 г.;
после доработки 31 августа 2018 г.;
рекомендована в печать 27 сентября 2018 г.

Контактная информация:

Холшевников Константин Владиславович — д-р физ.-мат. наук, проф.; kvk@astro.spbu.ru

Geometry of the Huygens—Roche figure

K. V. Kholshchevnikov^{1,2}

¹ St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

² Institute of Applied Astronomy RAS, nab. Kutuzova, 10, St. Petersburg, 191187, Russian Federation

For citation: Kholshchevnikov K. V. Geometry of the Huygens—Roche figure. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2019, vol. 6 (64), issue 1, pp. 170–176. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.113> (In Russian)

Theory of the figures of celestial bodies, which are in the state of hydrostatic equilibrium under gravitational, centrifugal, and pressure forces, took the form of a rigorous mathematical theory in the second part of the XX century. Fundamental physical laws served as its basis. The Huygens—Roche figure (total mass is concentrated in the centre, while the rotating atmosphere takes the equilibrium form) plays an important role in the theory. Properties of the figure are carefully examined. In particular, it is known that each isobar (surface of equal pressure) represents one of the three-parameter family of the Huygens—Roche surfaces. Meanwhile, convexity (or its absence) was not discussed in the literature as far as we know. It is worth noting that there are non-convex figures between equilibrium ones. In the present paper, we find the curvature of a meridional section of an arbitrary Huygens—Roche figure (in the closed form as well as in the form of a series in powers of the Clairaut parameter, main in the theory of equilibrium figures). We succeed to prove that the curvature is positive and is separated from zero. Hence, each surface from the Huygens—Roche figures family is convex, and has no points of flattening. Moreover, no curve on its surface has points of straightening.

Keywords: equilibrium figure, Huygens—Roche figure, gravitational potential, curvature of a planar curve.

References

1. Liapunoff A. M., “Recherches dans la théorie de la figure des corps célestes”, *Notes de l’Académie Impériale des Sciences* **14**(7), 1–37 (1903).
2. Poincaré H., *Figures d’équilibre d’une masse fluide* (Gauthier-Villars, Paris, 1900; RKhD, Moscow, 2000).
3. Appell P., *Figures d’équilibre d’une masse liquide homogène en rotation* (Gauthier-Villars, Paris, 1932; ONTI, Moscow, 1936).
4. Lichtenstein L., *Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten* (Springer, Berlin, 1933).
5. Chandrasekhar S., *Ellipsoidal Figures of Equilibrium* (Yale Univ. Press, New Haven, CT, 1969; Mir, Moscow, 1973).
6. Kondratiev B. P., *Theory of Potential, and Figures of Equilibrium* (Izhevsk. Inst. Komp’yut. Issled., Moscow, 2003). (In Russian)
7. Pitiev N. P., Titov V. B., Kholshchevnikov K. V., *Equilibrium Figures of Celestial Bodies* (St. Petersburg. St. Petersburg State University Publ., 2002). (In Russian)
8. Kholshchevnikov K. V., Kurdubov S. L., “Convergence of Liapunov series for Huygens—Roche figures”, *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **89**(1), 83–96 (2004).
9. Rashevsky P. K., *Course of differential geometry* (Moscow; Leningrad. GITTL, 1950). (In Russian)
10. Favard J., *Cours de géométrie différentielle locale* (Gauthier-Villars, Paris, 1957; Inostrannaya Literatura, Moscow, 1960).

Received: August 5, 2018

Revised: August 31, 2018

Accepted: September 27, 2018

Author’s information:

Konstantin V. Kholshchevnikov — kvk@astro.spbu.ru