УДК 519.2
MSC 60E99

Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 4

Задача об эгоистичной парковке*

С. М. Ананьевский, Н. А. Крюков

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Ананьевский С. М., Крюков Н. А.* Задача об эгоистичной парковке // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 4. С. 549–555. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.402

В настоящей работе предлагается исследовать одну из моделей дискретного аналога задачи Реньи, известной под названием «задача о парковке». Пусть n, i — целые, $n \geq 0$ и $0 \leq i \leq n-1$. На отрезок $[0, n]$ будем помещать открытый интервал $(i, i+1)$, где i — случайная величина, с равной вероятностью принимающая значения $0, 1, 2, \ldots, n-1$ для всех $n \geq 2$. Если $n < 2$, то говорим, что интервал не помещается. После размещения первого интервала образуются два свободных отрезка $[0, i]$ и $[i+1, n]$, которые заполняются интервалами единичной длины по тому же правилу, независимо друг от друга и т. д. По окончании процесса заполнения отрезка $[0, n]$ единичными интервалами между двумя любыми соседними интервалами расстояние будет не больше 1. Пусть X_n обозначает количество разместившихся интервалов. В работе изучается асимптотическое поведение моментов случайной величины X_n. В отличие от классического случая для первых моментов удается установить точные выражения для моментов.

Ключевые слова: случайное заполнение, задача о *парковке*, асимптотическое поведение моментов.

Введение. Задача случайного заполнения отрезка интервалами имеет давнюю историю. Начало было положено в работе Реньи [1], опубликованной в 1958 году, в которой он исследовал асимптотику среднего числа случайно размещенных интервалов единичной длины на отрезке, размер которого безгранично увеличивается. Позднее в работах Дворецкого и Роббинса [2] и других авторов было продолжено изучение свойств распределения числа разместившихся интервалов.

Первоначальная постановка задачи следующая. На отрезке $[0, x]$, если $x \geq 1$, случайным образом размещается интервал единичной длины и занимает место $(t, t+1)$. Выражение «случайным образом» означает, что начало размещаемого интервала t является случайной величиной с равномерным законом распределения на отрезке $[0, x-1]$. После размещения первого интервала образуются два незанятых отрезка $[0, t]$ и $[t+1, x]$, на которых в свою очередь располагаются единичные интервалы независимо друг от друга и также с равномерным законом распределения на соответствующих отрезках. Этот процесс заполнения продолжается до тех пор, пока все расстояния между размещенными единичными интервалами не станут меньше единицы. Количество разместившихся интервалов обозначим N_x. Если $x < 1$, то $N_x = 0$.

Нас интересуют свойства распределения случайной величины N_x, в частности, изучается асимптотическое поведение математического ожидания и моментов более старших порядков при увеличении длины отрезка $[0, x]$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-01-00393).

Эта постановка задачи в работе Реньи нашла следующую интерпретацию. На улице длины x случайным образом паркуются автомобили единичной длины в соответствии с описанным выше правилом. Тогда N_x обозначает количество запаркованных автомобилей. Эта интерпретация и дала название задаче как задача о «парковке» («parking» problem).

В работе Реньи [1] было установлено, что

$$EN_x = \lambda x + \lambda - 1 + O(x^{-n}) \quad (x \longrightarrow \infty) \tag{1}$$

при любом $n \geq 1$.

Реньи получил выражение для константы λ, значение которой выражено интегралом

$$\lambda = \int\limits_0^\infty e^{-2\int\limits_0^t \frac{1-e^{-u}}{u} du} dt \approx 0.748. \tag{2}$$

В работе Дворецкого и Роббинса [2] получено уточнение соотношения (1), а также изучались моменты случайной величины N_x более старших порядков. Они показали, что для математического ожидания справедливо соотношение

$$EN_x = \lambda x + \lambda - 1 + O\left(\left(\frac{2e}{x}\right)^{(x-\frac{3}{2})}\right) \qquad (x \longrightarrow \infty), \tag{3}$$

а для дисперсии доказано, что существует константа λ_2 такая, что

$$DN_x = \lambda_2 x + \lambda_2 + O\left(\left(\frac{4e}{x}\right)^{(x-4)}\right) \qquad (x \longrightarrow \infty). \tag{4}$$

В работах [3–7] изучались более общие постановки задачи, когда размещаемые интервалы могли, в свою очередь, иметь случайную длину или их случайное расположение отличалось от равномерного.

В последнее время интерес к задаче о парковке возобновился. Появились работы, например [8] и [9], в которых рассматриваются дискретные аналоги этой задачи.

В настоящей работе изучается одна из моделей дискретного аналога задачи о парковке, которую авторы назвали задачей об эгоистичной парковке.

Основные результаты. Пусть n, i — целые, $n \geq 0$ и $0 \leq i \leq n-1$.

На отрезок $[0, n]$ будем помещать открытый интервал единичной длины $(i, i+1)$, где i — случайная величина, с равной вероятностью принимающая значения $0, 1, 2, \ldots, n-1$ для всех $n \geq 2$. Если $n < 2$, то говорим, что интервал не помещается. После размещения первого интервала образуются два свободных отрезка $[0, i]$ и $[i+1, n]$, которые заполняются интервалами единичной длины по тому же правилу, и т. д.

Интерпретацию этого процесса заполнения можно привести следующую. На размеченной парковке случайным образом останавливаются автомобили одинаковой длины, причем каждый следующий автомобиль останавливается так, что хотя бы с одной стороны у него сразу после его парковки остается свободное парковочное место. В частности, если место $(n-2, n-1)$ в какой-то момент оказалось занятым, а место $(n-1, n)$, находящееся на краю, еще свободно, то в дальнейшем на это место автомобиль запарковать нельзя. При этом очередной автомобиль может припарковаться так, что какой-то ранее запаркованный автомобиль окажется заблокированным, то есть рядом с ранее остановившимся автомобилем парковочные места окажутся занятыми. Это и объясняет появление в названии модели определения «эгоистичный».

По окончании процесса заполнения отрезка $[0, n]$ единичными интервалами между двумя любыми соседними интервалами расстояние будет не больше 1.

Пусть X_n обозначает количество разместившихся единичных интервалов. Нас будут интересовать прежде всего моменты случайной величины X_n.

Теорема. *Для описанной выше модели*

$$EX_n = \frac{2n-1}{3} \quad \textit{при} \quad n \geq 2 \qquad \textit{и} \qquad EX_n = 0 \quad \textit{при} \quad n < 2, \tag{5}$$

$$DX_n = \frac{n+1}{45} \quad \textit{при} \quad n \geq 4, \qquad DX_3 = \frac{2}{9} \quad \textit{и} \quad DX_n = 0 \quad \textit{при} \quad n < 3, \tag{6}$$

$$E(X_n - EX_n)^3 = -\frac{n+11}{135} \quad \textit{при} \quad n \geq 4. \tag{7}$$

Доказательство. Введем обозначение $X_{n,i}$ — количество разместившихся единичных интервалов на отрезке $[0, n]$ при условии, что первый интервал занял место $(i, i+1)$.

Тогда верно равенство

$$X_{n,i} = X_i + X_{n-i-1} + 1, \tag{8}$$

где X_i, X_{n-i+1} — независимые случайные величины.

Пусть $E_n = EX_n$. Учитывая, что i — случайная величина, с равными вероятностями принимающая значения $0, 1, 2, \ldots, n-1$, получаем из (8) соотношение

$$E_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} E_i + \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} E_{n-i-1} + 1$$

или

$$E_n = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} E_i + 1. \tag{9}$$

Поскольку

$$P(X_0 = 0) = P(X_1 = 0) = 1, \quad P(X_2 = 1) = 1$$

и

$$P(X_3 = 1) = 1 - P(X_3 = 2) = \frac{1}{3},$$

то для первых значений n имеем

$$E_0 = E_1 = 0, \quad E_2 = 1 \quad \text{и} \quad E_3 = \frac{5}{3}. \tag{10}$$

Найдем решение для соотношения (9) с начальными условиями (10).

Используя обозначение

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} E_i,$$

равенство (9) можно представить как

$$S_n - S_{n-1} = 1 + \frac{2}{n} S_{n-1}$$

или

$$S_n = 1 + \frac{2+n}{n} S_{n-1}.$$

Последнее равенство нам удобнее записать в следующем виде:

$$S_{n+1} = 1 + \frac{n+3}{n+1} S_n. \tag{11}$$

Пусть

$$c_n = \frac{n+3}{n+1} \quad \text{и} \quad p_n = \prod_{i=1}^{n} c_i.$$

Тогда из (11) получаем

$$S_{n+1} = 1 + c_n S_n = 1 + c_n(1 + c_{n-1} S_{n-1}) = \cdots = 1 + c_n(1 + \cdots c_3(1 + c_2 S_2) \cdots).$$

Поскольку $S_2 = 1$, то

$$S_{n+1} = 1 + c_n + c_n c_{n-1} + \cdots + \prod_{i=2}^{n} c_i = \frac{p_n}{p_n} + \frac{p_n}{p_{n-1}} + \cdots + \frac{p_n}{p_1}.$$

Таким образом,

$$S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_n}{p_i}. \tag{12}$$

Из равенств (12) и $E_n = S_n - S_{n-1}$ следуют соотношения

$$E_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{p_{n-1}}{p_i} - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{p_{n-2}}{p_i} = \frac{p_{n-1}}{p_{n-1}} + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{p_{n-1} - p_{n-2}}{p_i}.$$

Заметим, что

$$p_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{i+3}{i+1} = \frac{(n+3)(n+2)}{6},$$

из чего следует равенство

$$p_{n-1} - p_{n-2} = \frac{n+1}{3}.$$

Учитывая последние соотношения для p_n, при всех $n \geq 2$ получаем

$$E_n = 1 + \frac{n+1}{3} \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{p_i} = 1 + \frac{n+1}{3} \sum_{i=1}^{n-2} \frac{6}{(i+3)(i+2)} =$$

$$= 1 + 2(n+1)\sum_{i=1}^{n-2}\left(\frac{1}{i+2} - \frac{1}{i+3}\right) == 1 + 2(n+1)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{2n-1}{3}.$$

Поскольку $E_2 = 1$, то утверждение (5) окончательно доказано.

Далее обозначим через $S_{n,k} = E(X_n - EX_n)^k$ центральный момент порядка k случайной величины X_n, где k — целое неотрицательное число. Заметим, что

$$\frac{2i-1}{3} + \frac{2(n-i-1)-1}{3} = \frac{2n-1}{3} - 1.$$

Следовательно, учитывая равенство (8) и независимость в этом равенстве случайных величин X_i и X_{n-i-1}, получаем

$$S_{n,k} = E(X_n - E_n)^k = E\left(X_n - \frac{2n-1}{3}\right)^k =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k} C_k^j E(X_{i-1} - EX_{i-1})^j E(X_{n-i} - EX_{n-i})^{k-j} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k} C_k^j S_{i-1,j} S_{n-i,k-j}.$$

Для $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ последнее равенство выглядит следующим образом:

$$S_{n,0} = 1, \quad S_{n,1} = 0,$$

$$S_{n,2} = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} S_{i,2}, \quad S_{n,3} = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} S_{i,3}.$$

Отметим, что если $k > 0$, то $S_{0,k} = S_{1,k} = S_{2,k} = 0$. Решим соотношение

$$Z_n = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} Z_i \tag{13}$$

при начальных условиях

$$Z_0 = Z_1 = Z_2 = 0 \quad \text{и} \quad Z_3 = c. \tag{14}$$

Применяя обозначение $T_n = \sum\limits_{i-0}^{n} Z_i$, получаем

$$T_n - T_{n-1} = \frac{2}{n} T_{n-1}$$

или

$$T_n = \frac{2+n}{n} T_{n-1} = \frac{2+n}{n}\frac{1+n}{n-1} T_{n-2} = \cdots = \frac{(2+n)(1+n)}{20} T_3.$$

Тогда

$$Z_n = T_n - T_{n-1} = \left(\frac{(2+n)(1+n)}{20} - \frac{(1+n)n}{20}\right) T_3 = \frac{1+n}{10} T_3 = \frac{1+n}{10} Z_3 = c.$$

Применив этот результат к $S_{n,2}$ и $S_{n,3}$, получаем

$$S_{n,2} = \frac{n+1}{10} S_{3,2} \tag{15}$$

и

$$S_{n,3} = \frac{n+1}{10} S_{3,3}. \tag{16}$$

Величины $S_{3,2}$ и $S_{3,3}$ вычисляются непосредственно, поскольку мы знаем закон распределения случайной величины X_3:

$$S_{3,2} = \frac{2}{9}, \quad S_{3,3} = -\frac{2}{27}.$$

Подставляя эти значения в (15) и (16), получаем (6) и (7).

Литература

1. *Renji A.* On a one-dimensional problem concerning space-filling // Publ. of the Math. Inst. of Hungarian Acad. of Sciences. 1958. Vol. 3. P. 109–127.

2. *Dvoretzky A., Robbins H.* On the “parking” problem // Publ. of the Math. Inst. of Hungarian Acad. of Sciences. 1964. Vol. 9. P. 209–226.

3. *Ney P. E.* A random interval filling problem // Annals of Math. Statist. 1962. Vol. 33. P. 702–718.

4. *Mannion D.* Random packing of an interval // Adv. Appl. Prob. 1976. Vol. 8. P. 477–501.

5. *Ananjevskii S. M.* The “parking” problem for segments of different length // Journal of Mathematical Sciences. 1999. Vol. 93. P. 259–264. https://doi.org/10.1007/BF02364808

6. *Ананьевский С. М., Шульгина Е. А.* О мере заполненной части отрезка в задаче «парковки» // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2013. Вып. 4. С. 3–12.

7. *Ананьевский С. М.* Некоторые обобщения задачи о «парковке» // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3 (61). Вып. 4. С. 525–532. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.401

8. *Clay M. P., Simanyi N. J.* Renyi’s parking problem revisited // ArXiv:1406.1781v1 [math.PR] 29 Dec 2014

9. *Gerin L.* The Page-Renyi parking process // ArXiv:1411.8002v1[math.PR] 28 Nov 2014

Статья поступила в редакцию 22 марта 2018 г.; рекомендована в печать 2 июля 2018 г.

Контактная информация:

Ананьевский Сергей Михайлович — канд. физ.-мат. наук, доц.; ananjevskii@mail.ru
Крюков Николай Алексеевич — студент; kryuknik@gmail.com

The problem of selfish parking

S. M. Ananjevskii, N. A. Kryukov

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Ananjevskii S. M., Kryukov N. A. The problem of selfish parking. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 4, pp. 549–555. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.402 (In Russian).

In this paper, we propose to investigate one of the models of the discrete analogue of the Renyi problem known as the “parking problem”. Let n, i be integers, $n \geq 0$ and $0 \leq i \leq n-1$. On the segment $[0, n]$ we will place an open interval $(i, i+1)$, where i is a random variable with equal probability taking the values $0, 1, 2 \ldots, n-1$ for all $n \geq 2$. If $n < 2$, then we say that the interval does not fit. After placing the first interval, two free segments $[0, i]$ and $[i+1, n]$, are formed, which are filled with intervals of unit length according to the same rule, independently of each other, etc. At the end of the process of filling the segment $[0, n]$ with single intervals, between any two adjacent intervals the distance will not exceed 1. Let

X_n denote the number of placed intervals. We study the asymptotic behavior of moments of a random variable X_n. Unlike the classical case, for the first moments it is possible to establish exact expressions for the moments.

Keywords: random fill, the problem of parking, asymptotic behaviour of moments.

References

1. Renji A., "On a one-dimensional problem concerning space-filling", *Publ. of the Math. Inst. of Hungarian Acad. of Sciences* **3**, 109–127 (1958).

2. Dvoretzky A., Robbins H., "On the "parking" problem", *Publ. of the Math. Inst. of Hungarian Acad. of Sciences* **9**, 209–226 (1964).

3. Ney P. E., "A random interval filling problem", *Annals of Math. Statist.* **33**, 702–718 (1962).

4. Mannion D., "Random packing of an interval", *Adv. Appl. Prob.* **8**, 477–501 (1976).

5. Ananjevskii S. M., "The "parking" problem for segments of different length", *Journal of Mathematical Sciences* **93**, 259–264 (1999). https://doi.org/10.1007/BF02364808

6. Ananjevskii S. M., Shulgina E. A., "On the measure of the occupied part of a segment in the "parking" problem", *Vestnik St. Petersburg University. Ser. 1* iss. 4, 3–12 (2013) [in Russian].

7. Ananjevskii S. M., "Some Generalizations of "parking" problem", *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **49**, iss. 4, 299–304 (2016). https://doi.org/10.3103/S1063454116040026

8. Clay M. P., Simanyi N. J., "Renyi's parking problem revisited", ArXiv:1406.1781v1 [math.PR] 29 Dec 2014

9. Gerin L., "The Page-Renyi parking process", ArXiv:1411.8002v1[math.PR] 28 Nov 2014

Received: March 22, 2018
Accepted: July 2, 2018

Author's information:

Sergey M. Ananjevskii — ananjevskii@mail.ru
Nikolay A. Kryukov — kryuknik@gmail.com